

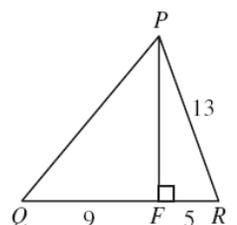
# 2011 年台南市市長盃國民中學數學競賽第二階段能力測驗試題

## 第一部分(第 1 題到第 20 題每題 3 分，共 60 分)

1. 設  $a = 2^{19} \times 3^{13} \times 5^{14}$ 、 $b = 2^{18} \times 3^{12} \times 7^{15}$ 、 $c = 2^{20} \times 3^{14} \times 7^{13}$ ，則  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三數大小關係為何？  
 (A)  $a > b > c$  (B)  $a > c > b$  (C)  $c > a > b$  (D)  $b > c > a$
2.  $53^{39} \times 39^{57}$  的個位數字是多少？  
 (A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9
3. 有 36 個梨子分給甲、乙、丙三人，如果甲、乙所得到的梨子個數和，與乙、丙的個數和，與甲、丙的個數和之比為  $2:3:4$ ，則丙分的到幾個梨子？  
 (A) 4 (B) 12 (C) 20 (D) 24
4. 若  $145 = a \times 4^3 + b \times 4^2 + c \times 4 + d$ ，其中  $0 \leq a, b, c, d < 4$ ，且  $a, b, c, d$  均為正整數，則  $c = ?$   
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
5. 正整數  $x, y$  滿足  $5 < x + y \leq 10$  的解  $(x, y)$  共有多少個？  
 (A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35
6. 如右圖，一個大長方形切割成 甲、乙、丙、丁四塊小長方形，若甲面積為  $r$ ，乙面積為  $s$ ，丁面積為  $t$ ，則丙面積為？  
 (A)  $\frac{st}{r}$  (B)  $\frac{tr}{s}$  (C)  $\frac{rs}{t}$  (D)  $rst$



7. 某次數學競賽有 1200 人參加，其中 40% 可得獎（含金、銀、銅牌獎）已知銅牌得獎人數是金牌人數的 3 倍，而銀牌得獎人數是金牌人數的 2 倍，則獲銀牌人數多少人？  
 (A) 120 (B) 144 (C) 160 (D) 180
8. 計算  $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$  為下列何者？  
 (A)  $\sqrt{30}$  (B)  $4\sqrt{6}$  (C) 24 (D) 76
9. 設  $a, b, c$  為正整數，如果  $a$  可被 15 整除， $b$  可被 12 整除， $c$  可被 21 所整除，則下列何者正確？  
 (A)  $(a+b+c)^2$  可被 9 所整除 (B)  $a+b+c$  可被 9 所整除 (C)  $a+b+c$  為偶數 (D)  $a^2 + b^2 + c^2$  可被 18 所整除。
10. 將  $31, 2 \times 31, 3 \times 31, \dots, 31 \times 31$  這些數相加所得的和，再除以 5 的餘數是多少？  
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
11. 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 這六個數字去組成四位數中，共有多少個數為 5 的倍數（這些數字可以重複出現）？  
 (A) 180 (B) 216 (C) 360 (D) 396
12. 已知正整數  $n$  減去 48 所得的差是一個整數的平方，當  $n$  加上 41 所得的和是另一個整數的平方，則  $n-48$  有幾個質因數？  
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
13. 如圖，在  $\triangle PQR$  中， $F$  為  $\overline{QR}$  上一點且  $\overline{PF} \perp \overline{QR}$ ，如果  $\overline{PR} = 13$ ， $\overline{RF} = 5$  且  $\overline{FQ} = 9$ ，則  $\triangle PQR$  周長為多少？  
 (A) 39 (B) 42 (C) 45 (D) 57



14. 已知  $p = 6 + a = 87 + b$ ，其中  $p$ 、 $a$ 、 $b$  都是質數，則  $p - a + b = ?$

- (A) 8 (B) 6 (C) 5 (D) 2

15. 若兩正數  $x$  和  $y$  滿足  $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ，則  $\frac{y}{x}$  之值為何？

- (A)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

16. 設  $\alpha$ 、 $\beta$  為二次方程式  $x^2 - 63x + k = 0$  的二根，若  $\alpha$ 、 $\beta$  均為質數，則  $|\alpha - \beta|$  之值為何？

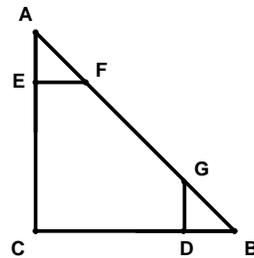
- (A) 59 (B) 47 (C) 41 (D) 37

17. 等腰直角三角形  $ABC$ ， $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $D$ 、 $E$  分別在  $\overline{BC}$  及  $\overline{AC}$  上，使得  $\overline{CD} = \frac{3}{4}a$ ，

$\overline{CE} = \frac{3}{4}a$ ，而  $G$ 、 $F$  在  $\overline{AB}$  上且  $\overline{EF} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{GD} \perp \overline{BC}$ 。若四邊形  $DEFG$  的面積為 10 平方公分，則

$a$  的值為多少公分？

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 16



18. 設  $a \geq 0$ ，如果方程式  $x^2 + ax + a + 1 = 0$  至少有一個實數解，那麼  $a$  的最小值為多少？

- (A)  $2\sqrt{2} - 2$  (B)  $3\sqrt{2} - 3$  (C)  $2\sqrt{2} + 2$  (D)  $2\sqrt{2} + 3$

19. 已知有 13 個相異的數  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{13}$ ，其中至少有 3 個正數，正好有  $n$  個負數。今將這 13 個數中任二個數的相乘，共有 91 個乘積；如果其中正好有 22 個數是負數，則  $n = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

20. 已知  $\triangle ABC$  的三邊長  $a, b, c$  滿足  $b + c = 8$ ，且  $bc = a^2 - 12a + 52$ ，則  $\triangle ABC$  的周長為多少？

- (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16

## 第二部分(第 21 題到第 30 題每題 4 分，共 40 分)

21. 在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{CA} = 7$ ，自頂點  $A$  作  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  交  $\overline{BC}$  於  $D$  點，則  $\overline{AD}$  的平方為多少？

- (A) 1 (B) 24 (C) 35 (D) 48

22. 設  $n$  為正整數，如果將  $n$  接著寫在任意一個正整數的右邊，所得到的新數恰好都能被  $n$  所整除，我們稱這樣的正整數  $n$  為「好數」；則比 130 小的所有好數的個數共有多少個？

- (A) 2 (B) 4 (C) 9 (D) 10

23. 設  $n$  為正整數，且  $10 \leq n \leq 90$ ，如果將  $n$  的數字乘積與  $n$  的數字和相加後，得到一個新的數  $S(n)$ ，則共有多少個  $n$  值滿足  $S(n) = n$ ？

- (A) 1 (B) 8 (C) 9 (D) 10

24. 已知  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  是  $-1, 0, 1$  中的數，則  $a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + 3^3a_3 + 3^4a_4$  的所有可能值是正整數共有多少個？

- (A) 81 (B) 121 (C) 242 (D) 363

25. 設  $a, b$  為二實數，如果  $|a| + a + b = 10$  且  $a + |b| - b = 12$ ，則  $a + b = ?$

- (A) -2 (B) 2 (C)  $\frac{18}{5}$  (D)  $\frac{22}{3}$

26. 設  $n, p$  為正整數，如果一元二次方程式  $(n-1)x^2 - px + n = 0$  有二個正整數解，則  $p^n - n^n$  的值為多少？

- (A) -23 (B) -21 (C) 21 (D) 23

27. 設  $x$ 、 $y$  均為正整數且滿足  $y = \sqrt{x-21} + \sqrt{x+35}$ ，則  $y$  的最大值是多少？

- (A) 14 (B) 28 (C) 42 (D) 56

28. 已知整數  $a, b, c$  滿足方程組  $\begin{cases} ab+5=c \\ bc+1=a \\ ca+1=b \end{cases}$ ，則  $a+b=?$

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

29. 如果分數  $a$  滿足下列條件：那麼滿足這樣條件的所有可能分數共有多少個？

(1)  $a$  大於  $\frac{1}{6}$ ，但小於  $\frac{1}{5}$ ；(2) 分子與分母都是質數；(3) 分母是二位數

- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16

30. 已知正數  $a, b, c$  滿足  $a+b+c=1$ ，則下列何種條件使得  $a, b, c$  為某三角形之三邊恆成立

(A)  $0 < |b-a| < \frac{1}{2}$ ,  $0 < |c-b| < \frac{1}{2}$ ,  $0 < |c-a| < \frac{1}{2}$

(B)  $a < \frac{1}{2}$ ,  $b < \frac{1}{2}$ ,  $c < \frac{1}{2}$

(C)  $a+b < \frac{1}{2}$ ,  $b+c < \frac{1}{2}$ ,  $c+a < \frac{1}{2}$

(D)  $a \leq \frac{1}{2}$ ,  $b \leq \frac{1}{3}$ ,  $c \leq \frac{1}{4}$