摘要

一、探討絕對值方程式與二次函數之關聯。

二、探討絕對值方程式的形狀與方程式中所含絕對值的個數是否有關。

三、探討絕對值各數增加時，其最低點的變化。

四、研究絕對值加入 x、y 兩個未知數的圖形。

五、畫出有趣絕對值圖形，並找出其對應的絕對值方程式。

壹、研究動機

一年級的數學課本內有稍微接觸到絕對值也大略了解絕對值的概念，也練習了一些題目，從題目中，我們越算越起勁，但卻都只是代數的計算，所以想畫畫看絕對值圖形，並與長相相似二次函數圖形做結合。另外，在網路上我們看到一個笛卡爾的愛情公式 r=a（1－sinθ）讓我們想到：絕對值的方程式是否也可以畫出如此有趣的圖形？

貳、研究目的

一、$y=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\cdots\cdots+|x-a_n|$ 絕對值與二次項係數為正的二次函數都是開口向上，尋找兩者間的關連性。

二、推論出絕對值個數不斷增加時，圖形的變化情形和絕對值是奇數個數或偶數個數時，分別有何特性。

三、研究每個絕對值，其最低點和是否有規律性。

四、若在絕對值方程式內增加新的未知數，其圖形的形狀。

五、利用多個方程式的結合，畫出有趣的圖形。

參、研究設備器材

一、紙。

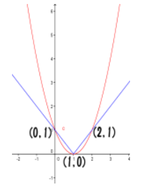
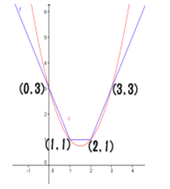
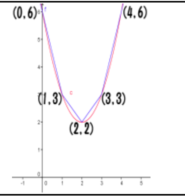
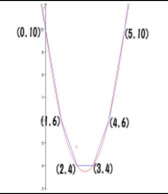
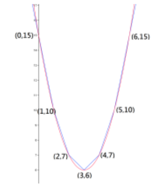
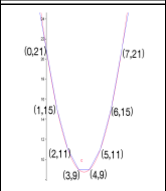
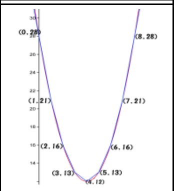
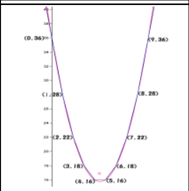
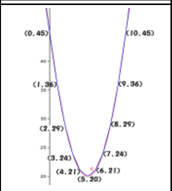
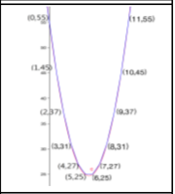
二、筆。

三、繪圖軟體 GGB。

肆、研究過程或方法

一、$y=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\cdots\cdots+|x-a_n|$ 絕對值圖形與其對應的二次函數圖形之關聯：

（一）先繪出 $y=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\cdots\cdots+|x-a_n|$ 的圖形，若有一個最低點，以其座標為最低點及圖上任一點座標找出二次函數；若有兩個最低點，取兩x座標之平均值及圖上任一點座標代入 $y=a(x-b)^2+c$，求出二次函數。

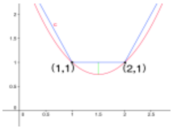
絕對值與二次函數圖形					
相對應的函數方程式	絕對值函數方程式 $y_1=\|x-1\|$ 二次函式方程式 $y_2=(x-1)^2$	絕對值函數方程式 $y_1=\|x-1\|+\|x-2\|$ 二次函式方程式 $y_2=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}$	絕對值函數方程式 $y_1=\|x-1\|+\|x-2\|+\|x-3\|$ 二次函式方程式 $y_2=(x-2)^2+2$	絕對值函數方程式 $y_1=\|x-1\|+\|x-2\|+\|x-3\|+\|x-4\|$ 二次函式方程式 $y_2=(x-\frac{5}{2})^2+\frac{15}{4}$	絕對值函數方程式 $y_1=\|x-1\|+\|x-2\|+\|x-3\|+\|x-4\|+\|x-5\|$ 二次函式方程式 $y_2=(x-3)^2+6$
絕對值與二次函數圖形					
相對應的函數方程式	絕對值函數方程式 $y_1=\|x-1\|+\|x-2\|+\|x-3\|+\|x-4\|+\|x-5\|+\|x-6\|$ 二次函式方程式 $y_2=(x-\frac{7}{2})^2+\frac{35}{4}$	絕對值函數方程式 $y_1=\|x-1\|+\|x-2\|+\|x-3\|+\|x-4\|+\|x-5\|+\|x-6\|+\|x-7\|$ 二次函式方程式 $y_2=(x-4)^2+12$	絕對值函數方程式 $y_1=\|x-1\|+\|x-2\|+\|x-3\|+\|x-4\|+\|x-5\|+\|x-6\|+\|x-7\|+\|x-8\|$ 二次函式方程式 $y_2=(x-\frac{9}{2})^2+\frac{63}{4}$	絕對值函數方程式 $y_1=\|x-1\|+\|x-2\|+\|x-3\|+\|x-4\|+\|x-5\|+\|x-6\|+\|x-7\|+\|x-8\|+\|x-9\|$ 二次函式方程式 $y_2=(x-5)^2+20$	絕對值函數方程式 $y_1=\|x-1\|+\|x-2\|+\|x-3\|+\|x-4\|+\|x-5\|+\|x-6\|+\|x-7\|+\|x-8\|+\|x-9\|+\|x-10\|$ 二次函式方程式 $y_2=(x-\frac{11}{2})^2+\frac{99}{4}$

（本報告內容中的圖形與相對應的方程式皆以相同顏色表示）

根據上面絕對值與二次函數圖形重疊，我們歸納出以下幾點特性：

1. 二次函數圖形和此處討論的絕對值圖形都是對稱圖形，對稱軸皆為通過二次函數最低點的鉛直線。
2. 有奇數個絕對值的方程式圖形，只有一個最低點。
3. 有偶數個絕對值的方程式圖形，有兩個最低點（y 座標相同，為一條水平線）。
4. 起初二次函數圖形和絕對值圖形相距甚大，當絕對值個數愈增加時，其圖形的開口會愈來愈小，與對應的二次函數圖形交點數增加，導致兩個圖型愈來愈接近。
5. 交點的 y 座標差:觀察交點座標，絕對值個數愈多，對稱軸同一側任意的連續兩交點 y 座標的差距愈大。
6. 上面與絕對值函數圖形相似的二次函數的方程式中，找出了一個通式： $y=\left[x-\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{k^2-1}{4}$，$k\in\mathbb{N}$。

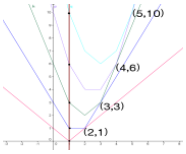
（二）探討絕對值圖形最低點與二次函數圖形的最低點之差：



例如 $y_1=|x-1|+|x-2|$ $y_2=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}$，絕對值方程式的最低點為（1,1）（2,1)也是兩方程式之交點，所以代進二次方程式的式子裡所得的 y_1 值也相同。二次函數圖形的最低點的 x 座標，帶入方程式中所得 $y_2 \Rightarrow y_1-y_2$ 為最低點的差:1/4（綠線部分）。

1. 有偶數個絕對值的絕對值圖形與其對應的二次函數圖形最低點的差皆為 1/4。

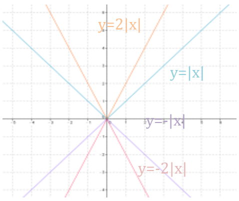
（三）$y=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\cdots\cdots+|x-a_n|$ 絕對值圖形的比較：



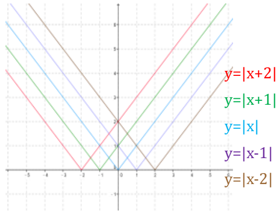
1. 每增加一個絕對值，整個圖形向右移平移 1/2 單位長，向上平移 1 單位長。
2. 直線 x=1 能通過每個絕對值圖形的其中一個折點。
3. 每一個絕對值圖形會與下一個絕對值圖形有相交於 1 點，交點會規律的往右移一格，往上則逐次增加。
4. 有幾個絕對值，就會有幾個折點。

（四）討論 y=a|x+b|+c 的圖形中，改變各種條件的圖形差異性：（本報告內容中的圖形與相對應的方程式皆以相同顏色表示）

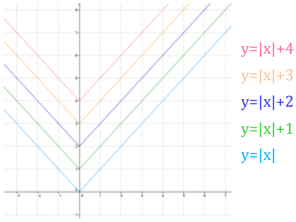
1. a 為正數時開口朝上，值越大開口越小；為負數時開口朝下，值越大開口越大。



2. b 值的大小控制圖形 x 座標的移動。



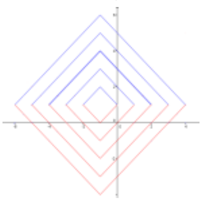
3. c 值的大小控制圖形 y 座標的移動。



4. 上述的改變與二次函數 $y=a(x-b)^2+c$ 中 a、b 、c 對二次函數影響相同。

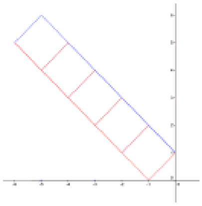
二、繪製不同絕對值方程式圖形：

（一）改變常數項比較：|x+1|+|y-1|=1，|x+1|+|y-1|=2，|x+3|+|y-3|=1， |x+4|+|y-4|=1，|x+5|+|y-5|=1



1. 當 y 也取絕對值時圖形為正方形。
2. 常數項的大小使正方形圖形的大小改變，|x+1|+|y-1|=C，此為圖形的通式。而 C 的大小則是決定正方形圖形的大小，C 愈大正方形則愈大；反之 C 愈小正方形也愈小。

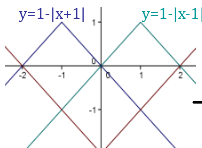
（二）改變絕對值|x+n|+|y-n|=c 中 n，來比較：|x+1|+|y-1|=1，|x+2|+|y-2|=1，|x+1|+|y-1|=3，|x+1|+|y-1|=4，|x+1|+|y-1|=5



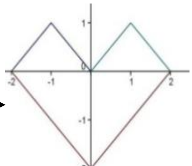
1. 若 C=1，此圖形的對稱中心點與四個頂點的距離為 1 單位長，2C 為正方形對角線長度。
2. 若改變絕對值內的數，會使對稱中心點改變。|x+1|+|y-1|=1，對稱中心點為(-1,1)；|x+2|+|y-2|=1，對稱中心點為(-2,2)。其通式為|x+n|+|y-n|=C，則對稱中心點就為(-n,n)。

三、利用多個方程式圖形畫出有趣的圖形：

（一）愛心



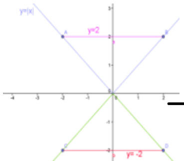
圖（一）



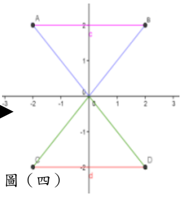
圖（二）

1. 圖（一）是由 y=1-|x+1|、y=1-|x-1|、y=|x|-2，三個絕對值方程式所組成 。
2. 圖（二）是由三個絕對值方程式所組成分別為：y=1-|x+1|（$-2 \le x \le 0$），y=1-|x-1|（$0 \le x \le 2$），y=|x|-2（$-2 \le x \le 2$）。

（二）漏斗



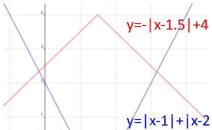
圖（三）



圖（四）

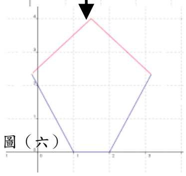
1. 圖（三）是由 y=|x|、y=-|x|、y=2、y=-2，兩個絕對值方程式和兩個一元一次方程式所組成。
2. 圖（四）是由 y=|x| $(-2 \le x \le 2)$，y=-|x| $(-2 \le x \le 2)$，y=2 $(-2 \le x \le 2)$，y=-2 $(-2 \le x \le 2)$，四個方程式所組成。

（三）五邊形



圖（五）

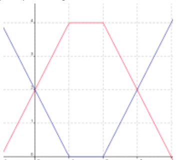
1. 圖（五）是由 y=-|x-1.5|+4、y=|x-1|+|x-2|-1 兩個絕對值方程式所組成。



圖（六）

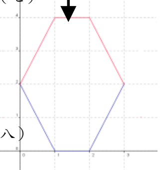
2. 圖（六）是由 y=-|x-1.5|+4 $(-\frac{1}{6} \le x \le \frac{17}{6})$ y=|x-1|+|x-2|-1 $(-\frac{1}{6} \le x \le \frac{17}{6})$。

（四）六邊形



圖（七）

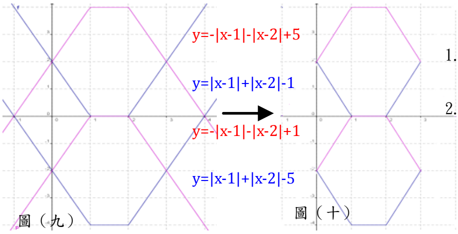
1. 圖（七）是由 y=-|x-1|-|x-2|+5、y=|x-1|+|x-2|-1 兩個絕對值方程式所組成。



圖（八）

2. 圖（八）是由 y=-|x-1|-|x-2|+5 $(0 \le x \le 3)$，y=|x-1|+|x-2|-1 $(0 \le x \le 3)$。

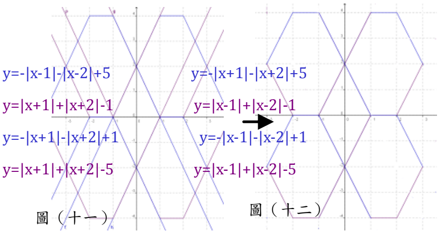
（五）兩個六邊形（以 x 軸為對稱軸）



圖（九）　圖（十）

1. 圖（九）是由 y=-|x-1|-|x-2|+5、y=|x-1|+|x-2|-1、y=-|x-1|-|x-2|+1、y=|x-1|+|x-2|-5 四個絕對值方程式所組成。
2. 圖（十）是由，y=-|x-1|-|x-2|+5 $(0\le x\le 4)$，y=|x-1|+|x-2|-1 $(0\le x\le 4)$，y=-|x-1|-|x-2|+1 $(0\le x\le 4)$，y=|x-1|+|x-2|-5 $(0\le x\le 4)$。

（六）四個六邊形（分別以 X 軸和 y 軸為對稱軸）



圖（十一）　圖（十二）

1. 圖（十一）是由，y=-|x-1|-|x-2|+5、y=|x-1|+|x-2|-1、y=-|x-1|-|x-2|+1、y=|x-1|+|x-2|-5、y=-|x+1|-|x+2|+5、y=|x+1|+|x+2|-1、y=-|x+1|-|x+2|+1、y=|x+1|+|x+2|-5。
2. 圖（十二）是由 y=-|x-1|-|x-2|+5 $(0\le x\le 3)$，八個絕對值所組成。y=|x-1|+|x-2|-1 $(0\le x\le 3)$，y=-|x-1|-|x-2|+1 $(0\le x\le 3)$，y=|x-1|+|x-2|-5 $(0\le x\le 3)$，y=-|x+1|-|x+2|+5 $(-3\le x\le 0)$，y=|x+1|+|x+2|-1 $(-3\le x\le 0)$，y=-|x+1|-|x+2|+1 $(-3\le x\le 0)$，y=|x+1|+|x+2|-5 $(-3\le x\le 0)$。

伍、研究結果

一、二次函數圖形和絕對值圖形關聯為：

（一）當絕對值個數愈增加時，其圖形的開口會愈小，而對應的二次函數圖形的開口亦會逐漸變小，使兩圖形的距離愈來愈近。

（二）絕對值個數每增一個時，兩者的交點就多一個。

（三）絕對值圖形與其最相似的二次函數圖形相比較，發現若絕對值各數為偶數時，其最低點與二次函數圖形的最低點相距 1/4 單位長。

二、當絕對值的個數為奇數時，圖形只有 1 個最低點；當絕對值的個數為偶數時，圖形有 2 個最低點，且 y 座標相同，在同一條水平線上。

三、每增加一個絕對值，圖形的最低點向右移平移 1/2 單位長，向上平移 1 單位長；之間的交點規律為向右平移 1 單位長，向上逐次增加 1 單位長。

四、|x+n| + |y-n| = C 繪製出來的圖形恆為正方形，C 愈大圖形正方形則愈大；反之 C 愈小圖形正方形也愈小，而 n 決定對稱軸交點的位置（-n, n）。2C 則為正方形對角線的長度。

五、找有趣圖形的方法：

（一）以已知絕對值圖形為基本元件，再利用各種條件的差異性，調整出期望的位置，組合出有趣的圖形。

（二）藉由圖形間差異，改變方程式的常數。

（三）推敲出正確的圖形方程式。

（四）利用圖形中絕對值方程式的交點，找出其範圍。

陸、討論

一、如果絕對值的個數是 n 個：y= |x-1| +|x-2| +……+|x-n|，對應的二次函數圖形的切線斜率絕對值是否趨向無限大。

二、y= |x-1| +|x-2| +……+|x-n|與其對應的二次函數圖形的交點 x 座標是否不為負數？

三、是否能利用絕對值方程式繪製其他正多邊形，並找出其通式?

四、y= |x-1| +|x-2| +……+|x-n|若係數不為 1，則其圖形與對應的二次函數圖形的關聯，是否和我們討論過的關係一樣?

柒、結論

一、絕對值圖形變化較大，二次函數圖形變化較小，導致兩個圖形會愈來愈靠近。絕對值個數愈多，兩者之間的交點就愈多。

二、絕對值個數增加，其圖形的交點有規律性：向右平移 1 單位長，向上逐次增加 1 單位長。

三、當絕對值的個數為奇數時，圖形只有 1 個最低點；當絕對值的個數為偶數時，圖形有 2 個最低點，且 y 座標相同，故在同一條水平線上。

四、y=a|x+b|+c 的圖形中 a 為正數時開口朝上，a 值越大開口越小； b 值的大小控制圖形 x 座標的移動；c 值的大小控制圖形 y 座標的移動，二次函數 $y=a(x-b)^2+c$ 亦同。

五、|x+1| + |y-1| = C 繪製出來的圖形恆為正方形，C 愈大正方形則愈大；反之 C 愈小正方形也愈小，且 2C 為正方形對角線的長度。|x+n| + |y-n| = C，(-n, n) 決定對稱中心點的位置。

六、從相似的方程式圖形，藉改變方程式的常數，找出與其相對應的圖形。

捌、參考資料及其他

一、南一文教事業　國中數學課本　第一冊　第一章　國立編譯館准予修訂　（100 年 9 月）。

二、南一文教事業　國中數學課本　第二冊　第一章　國立編譯館准予修訂　（101 年 3 月）。

三、南一文教事業　國中數學課本　第六冊　第一章　國立編譯館准予修訂　（102 年 2 月）。

四、洪鈞一、梁嘉玲。絕對值圖形。蘆洲市三民高中三年三班。

取自：http：//www.shs.edu.tw/works/essay/2008/10/2008103122260583.pdf

五、安安教學網。簡易二次函數的圖形。

取自：http：//anan1.webnow.biz/subject/math/math_book_b4c1.htm