臺南市 2017年公私立國民中學暨完全中學數學競賽決賽試題

注意事項：

1、 本試卷試題總計兩大類；第一類為填充題，共 **8**題，每題**7**分，共**56**分；第二類為計算及證明題，共 **4**大題，共 **44**分。

2、 請將答案依題號填入答案卷中；填充題只須填入最終答案，計算證明題則須詳列計算或證明過程。

3、 試題所提供圖形僅供參考；如有根式請化為最簡根式，如有分數請化為最簡分數，否則不予計分。

4、 請以藍筆或黑筆作答，鉛筆作答不予計分。

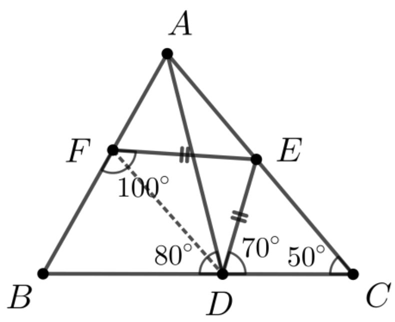
5、 試題及答案卷的背面可當計算紙使用。

一、填充題

1. 已知一三角形的三邊長分別為$11, 15, k$，且k為整數，試問：有多少個k使得此三角形為鈍角三角形？

2. 已知x, y, z三數滿足$x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$，試問：當$x^2+y^2+z^2$的值達到最小時，$x+y+z$的值為何？

3. 右圖中，D, E, F分別是ΔABC的邊$\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$上的點，已知$\overline{DE}=\overline{EF}$，且$\angle ACB=50°$, $\angle EDC=70°$, $\angle BFE=100°$, $\angle ADB=80°$.
試問：$\angle ADF$是多少度？

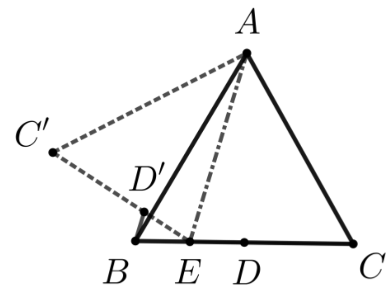


4. 已知a, b, c, k四數滿足$a^2+b-k=0$, $b^2+2c+k=0$, $c^2+3a+\frac{7}{2}=0$，求$a+b+c$的值。

5. 若一個數列中每一項皆取自$1, 2, 3, 4, 5, 6$這六個整數，例如：$2, 3, 1, 5$, 則稱它為一個「骰子點數列」。若數列的項數沒有限制且數字可被重複選取，則數列和為6的「骰子點數列」總共有多少個？（注意：數字的順序不同就視為不同的數列，例如：數列$2, 3$及$3, 2$須看成不同的數列）

6. 設a,b,c為正整數且滿足$a+b+c=11$. 求$abc+ab+bc+ca$的最大值。

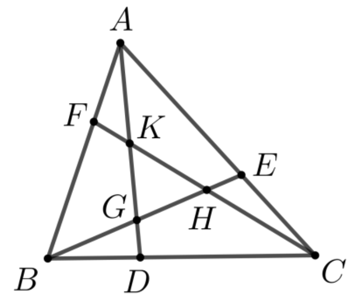
7. 如右圖，ΔABC是邊長為1的正三角形，點D為$\overline{BC}$的中點，點E為$\overline{BD}$的中點。沿AE對折後，點C, D分別移動至C', D'的位置上。求$\overline{BD'}$的長度.



8. 設正整數p,q,r為相異質數，且$106=p+qr$. 求$p+q+r$的最大值。

二、計算證明題

1. （10分）右圖中，D, E, F分別為ΔABC邊上的點，且$\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}$, $\overline{CE}=\frac{1}{3}\overline{CA}$, $\overline{AF}=\frac{1}{3}\overline{AB}$，而$\Delta GHK$是由$\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$所圍成，那麼$\Delta GHK$與$\Delta ABC$的面積比值為何？



2. （10分）證明不等式
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+2017}<2$$
成立。

3. （12分）試找出所有正整數p使得p是質數且$3p+1$是完全平方數。詳細說明你的理由！

4. （12分）已知一個等差數列的首項為12、第m項是2的某正整數次方，且第1項至第m項的總和是2^7. 求m的值。