

臺南市 2011 年公私立國民中學暨完全中學數學競賽

決賽試題

第一部分填充(每題 10 分，共 60 分)

1. 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， M 為 \overline{BC} 上一點，已知 $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{CM} = 5$ ，且

$$\overline{BA} + \overline{BM} = \overline{AC} + \overline{CM}，則 \overline{BM} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

2. 若 $\frac{3}{a} = \frac{2}{b-3c} = \frac{7}{c+2a}$ ，則 $\frac{a^2 + 2b^2 - 3c^2}{ab - 2bc} = \underline{\hspace{2cm}}。$

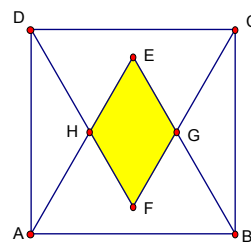
3. 若 a, b 為相異兩數，且滿足 $(a+2)^2 = 5 - 5(a+2)$ 和 $5(b+2) = 5 - (b+2)^2$ ，則

$$a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

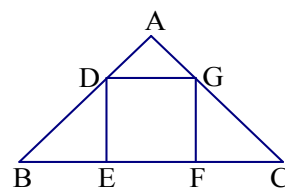
4. 設 x, y 為實數，滿足 $(x - \sqrt{x^2 - 2011})(y - \sqrt{y^2 - 2011}) = 2011$ ，則

$$2012x^2 - 2010y^2 + 2011x - 2011y - 2011 \text{ 之值為 } \underline{\hspace{2cm}}。$$

5. 如圖，邊長為 1 的正方形 $ABCD$ 中，三角形 ABE 與三角形 CDF 都是正三角形， \overline{AE} 與 \overline{DF} 交於 H 點， \overline{BE} 與 \overline{CF} 交於 G 點，則四邊形 $EHFG$ 的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}。$



6. 如圖， $\triangle ABC$ 中，點 D, G 分別在邊 \overline{AB} 與 \overline{AC} 上，且點 E, F 在邊 \overline{BC} 上，使得四邊形 $DEFG$ 是正方形。如果 $\triangle ADG$ ， $\triangle BED$ 及 $\triangle CGF$ 的面積分別為 2、3、5，則正方形 $DEFG$ 的邊長為 $\underline{\hspace{2cm}}。$



第二部分計算(每題 10 分，共 40 分)

1. 已知一直角三角形的周長為 $4 + \sqrt{26}$ ，且斜邊上的中線為 2，試求此直角三角形斜邊上的高。
2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 2\angle ACB$ ，試證： (1) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ (2) $\overline{AB} + \overline{BC} < 2\overline{AC}$
3. 試求滿足 $m^2 - 4n$ 及 $n^2 - 4m$ 皆為完全平方數（即為某一整數的平方）的正整數解 (m, n) 。
4. 設 $m < 2011$ 為四位正整數，且正整數 $n < m$ ，如果 $m - n$ 最多有三個正因數且 mn 為完全平方數（即為某一整數的平方），試求 m 值。

臺南市 2011 年公私立國民中學暨完全中學數學競賽

決賽試題解答

第一階段填充：

1. $\frac{15}{13}$ 2. $\frac{56}{5}$ 3. -21 4. 2011 5. $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ 6. $2\sqrt{2}$

第二階段計算：

1. 【參考解答】 $\frac{5}{4}$

2. 【參考解答】 略

3. 【參考解答】 $(m, n) = (4, 4), (5, 6), (6, 5)$

4. 【參考解答】 $m = 1900$ 或 1377