



# 因數與倍數

台南大學謝堅教授指導  
台南市數學輔導團

# 課前問卷調查

台南市國教輔導團數學領域





## ❖ 高年級

❖ 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

❖ N-6-1：20以內的質數和質因數分解：小於20的質數與合數。2、3、5的質因數判別法。以短除法做質因數的分解

## ❖ N-6-2

❖ 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。



# 目錄

台南市國教輔導團數學領域

- ❖ (1) 因數與倍數教學概念
- ❖ (2) 因數-長方形數(實作)
- ❖ (3) 因數大老二(實作)
- ❖ (4) 系統性的因數分解(實作)
- ❖ (5) 稅收遊戲(實作)
- ❖ (6) 數戰棋(實作)
- ❖ (7) 倍數-數字拉密(實作)
- ❖ (8) 學力測驗題目

# 數的『關係』

台南市國教輔導團數學領域

- ❖ 正名：兩個數之間，存在什麼關係時，衍生出來的名稱？
- ❖ 因數：
- ❖ 倍數：

如果“甲數”能被“乙數”整除，

則“乙數”稱為“甲數”的因數

$$10 \div 2 = 5 \dots 0$$

↑    ↑  
甲   乙

# 想想這樣對嗎？

台南市國教輔導團數學領域

2是0.1的倍數嗎？ 2是0.1的20倍嗎？

4是2的2倍  $\Rightarrow$  4是2的倍數。

2是4的0.5倍  $\Rightarrow$  2是4的倍數嗎？

4是2的倍數  $\leftrightarrow$  2也是4的倍數

我是你老爸  $\leftrightarrow$  你也是我老爸

因數與倍數數量範圍的限制？



# 倍數有兩種意義

台南市國教輔導團數學領域

① 基準量和比較量的倍數：

2是0.1的20倍  $\Rightarrow$  基準量0.1是1  
比較量2是20

$2 \div 0.1 = 20 \cdots 0$   $\Rightarrow$  2不可以整除0.1  
因為0.1不是整數。

② 整數的因數與倍數：

2不是0.1的倍數  $\Rightarrow$  0.1不是整數

$6 \div 2 = 3 \cdots 0$   $\Rightarrow$  6可以整除2，  
因為6、2、3都是整數。

# 以符號表示因倍數的定義

台南市國教輔導團數學領域

因、倍數的定義：↵

$a$  是  $b$  的因數( $b$  是  $a$  的倍數)↵

↔ ①  $a$  ,  $b$  都是整數。↵

②  $a \neq 0$ 。↵

③ 存在一個整數  $q$  , 使得  $b = a \times q$ 。↵

存在一個整數  $q$  , 使得  $b \div a = q$ ↵



0是不是偶數？

0.2是不是偶數？

2.0是不是偶數？



數學上為何要引入奇數及偶數？

奇數及偶數會用在什麼地方？

# 整數的分類

①  $2k : 0、2、4、6、8、10、12 \leftarrow$

$2k+1 : 1、3、5、7、9、11、13 \leftarrow$

②  $3k : 0、3、6、9、12、15 \mid \leftarrow$

$3k+1 : 1、4、7、10、13、16 \leftarrow$

$3k+2 : 2、5、8、11、14、17 \leftarrow$

③ 1、質數、合數  $\leftarrow$

整數的分類基本上是為了證明，把數分成2類或3類，若都成立，則對所有的數都成立。

# 證明題

❖ 例如：連續三個整數的乘積，一定是6的倍數

把數分成 $3k$ ， $3k+1$ ， $3k+2$

其中一定有一個是3的倍數、和至少一個偶數，  
所以乘積一定是6的倍數

# 0是不是偶數？

台南市國教輔導團數學領域

國小三年級：←

一堆花片：2個一數可以數完，花片是偶數個←

2個一數不可以數完，剩下1個，←

花片是奇數個。←

←

0個花片不必數，因此在國小中低年級，←

不討論0是否為偶數。←



# 因數與倍數

# 教學重點提示

台南市國教輔導團數學領域

- ❖ 國小五年級、六年級，國中一年級
- ❖ 都有因數與倍數的教材
- ❖ 教學重點或範圍有何不同？

哪種表示法最容易找出 360 所有的因數？

① 360

②  $3 \times 8 \times 15$   $\Rightarrow$  因數分解

③  $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$   $\Rightarrow$  質因數分解

國中寫成指數

五年級：由 360 透過嘗試錯誤找出因數

六年級：由質因數分解算式找出因數

七年級：引入指數的記法，數字範圍變大

# 注意!!!教學重點提示

台南市國教輔導團數學領域

國小階段：分別引入因數與倍數，  
再發現兩者的關係。

①  $6 \Rightarrow 2$  是 6 的因數

②  $2 \Rightarrow 6$  是 2 的倍數

③ 2 是 6 的因數  $\iff$  6 是 2 的倍數

國小階段先引入因數或倍數？

高中階段：因數與倍數互逆

a 是 b 的因數  $\iff$  b 是 a 的倍數

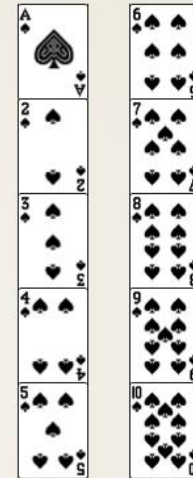
五年級

利用嘗試錯誤找出一數所有的因數，或找出兩數的公因數或最大公因數，學生必須進行很多次的乘除計算，要花很多的時間，而且到六年級時，會引入比較有效率的解題策略，例如質因數分解法或短除法。建議教師只要讓學生有一些解題的經驗即可，不必要求學生熟練，也不宜過度評量。



## 抽稅遊戲

因數倍數





# 抽稅遊戲說明

台南市國教輔導團數學領域

1.把收入，打包成以1為起點的連續整數錢包例：55萬元，打包成1,2,3,4,5,6,7,8,9,10，共10包。

2.選一包留在家中，但屬於這錢包的所有因數錢包將被抽走給皇帝。例：選7留在家中，則1要繳給皇帝。

家中 7

皇帝 1

3.重覆上一個步驟，一直到沒有錢包可留在家中為止。

例：假設選擇如下。

家中 7 10 9 8

皇帝 1 2,5 3 4

4.如果留下的錢包都沒有因數，則全部都要繳給皇帝。

例：6已經沒有因數，因此須要繳給皇帝。

家中 7 10 9 8

皇帝 1 2,5 3 4 6

# 抽稅遊戲練習題

台南市國教輔導團數學領域

	第一步	第二步	第三步	第四步	第五步	總和
留家中	7	4	10	9		30
繳政府	1	2	5	3	6、8	25

試著尋求留在家中的米最大數

增加數字為1-15

增加數字為1-20

# 探究示例

台南市國教輔導團數學領域

	第一步	第二步	第三步	第四步	第五步	總和
人民	7	9	6	8	10	40
政府	1	3	2	4	5	15

1~10最佳解

	第一步	第二步	第三步	第四步	第五步	第六步	第七步	總和
人民	13	9	15	10	14	8	12	81
政府	1	3	5	2	7	4	6	28

1~15最佳解

	第一步	第二步	第三步	第四步	第五步	第六步	第七步	第八步	總和
人民	19	15	10	14	20	12	16	18	124
政府	1	3、5	2	7	4	6	8	9	86

1~20最佳解

# 因數大老二遊戲說明

台南市國教輔導團數學領域

## 實際遊戲：(每組2-4人)

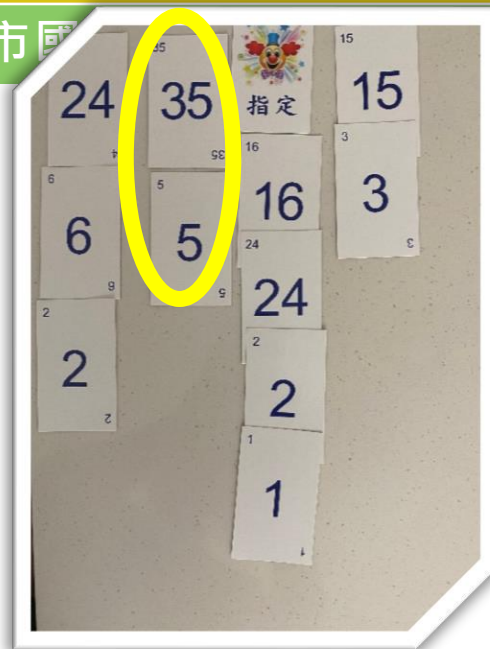
1. 每人發12張牌。
2. 由拿數字牌13的玩家先開始，因數打出來，但數字不可重覆。(如：玩家可打出單張13或13和1兩張牌)。
3. 下一位玩家打出的牌數須不少於上一位玩家的牌數(只比張數，不比較牌面數字大小)，且打出的牌上數字不能重複
4. 若此時沒有牌組可出時，則換下一位玩家。
5. 當某玩家打出的牌數，其餘玩家都不能達到規則3的規定時，稱為該回合結束，並由此位玩家重新打出牌組。
6. 直到有玩家將手中牌數全都打出即為獲勝；或者每位玩家皆無法一次打出兩張牌時，則遊戲結束，此時則手中牌面數字總合最小的獲勝。

# 因數大老二遊戲說明

台南市國



1. 有13的先出，可以單出13或1、13
2. 第二家出2張或2張以上
3. 第三家出的張數要 $\geq$  第二家出的張數
4. 第四家出的張數要 $\geq$  第三家出的張數
5. 無法出牌則pass，由下一家出



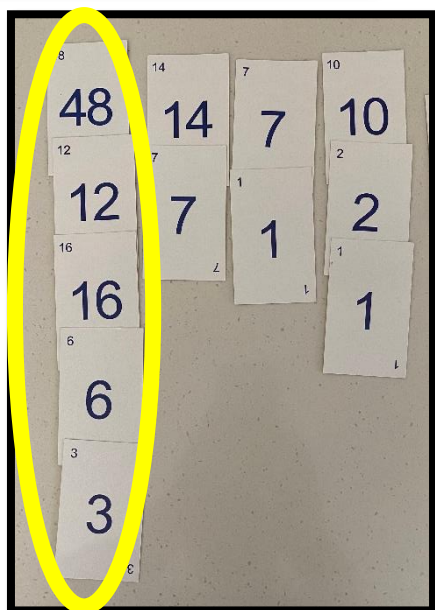
6. Pass到原出牌最多者，可以選擇重啟新回合，至少丟出兩張牌
7. 依序輪流，直到有玩家將手中**所有牌數全都打完即獲勝**；或者每位玩家皆**無法一次至少打出兩張牌時**，則遊戲結束，此時比較手中**牌面數字總和最小的獲勝**。



8. 只能單出，禁止某一人出牌



9. 可指定1-50任意數字，與其他牌一起出



# 因數大老二遊戲說明

台南市國教輔導團數學領域

## 因數大老二

### 遊戲規則說明

**遊戲器材：**因數牌44張、字牌4張

1. **因數牌：**數量搭配

因數	1	2	3	5	6	7	10	12	13
數量	5	6	4	4	4	4	2	2	1
因數	14	15	16	24	30	35	42	48	合計
數量	2	2	2	2	1	1	1	1	44

2. **字牌：**2張指定牌，可當做50以內的任何一個數使用；2張禁止牌，可禁止某位玩家出牌一次。

**遊戲規則：**（2~4人玩）

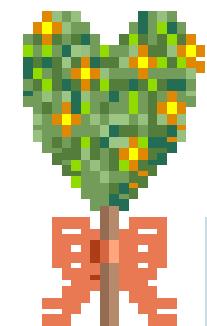
1. 玩家先猜拳決定輪流順序，每人發12張牌。
2. 由拿數字13牌的玩家先開始，將手中13或13的因數全部打出來，但數字不可重覆。（例如：玩家可打出單張13或13和1兩張牌）。
3. 輪到下一位玩家，打出的牌數須大於或等於上一位玩家打出的因數牌不能重覆（如：玩家手上有 1、2、2、3、3、4、6 共7張牌，則他可能選擇打出6、1、2、3 或6、1 或6、2、3）。

因數牌44張  
字牌4張

# 想一想

台南市國教輔導團數學領域

- ❖ 自然數分類：1、質數、合數
- ❖ 數學上為何要引入質數？
- ❖ 數學上為何定義1不是質數？



# 為何定義1不是質數？

台南市國教輔導團數學領域

❖ 認知發展的說法：

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 1 \times 1 \times 1$$

質數是整數乘法性結構的基本元素

可以有效率的找出360所有的因數

1對找出360的因數沒有幫助

❖ 數學學科知識的說法：

算術基本定理：

每個大於1的自然數均可寫  
為質因數乘積

而且質因數乘積的表示法  
唯一。

1是質數會讓算術基本定理  
不成立



## 五年級因數與倍數教學重點：

12個蘋果想要分裝成幾袋，讓每袋的蘋果一樣多，有那些分法？

- ① 可以分裝成多少袋？
- ② 一袋可以有多少個蘋果？
- ③ 有幾種分裝蘋果的方法？

何者是因數教學的正確問法？



# 學習脈絡

台南市國教輔導團數學領域

- 透過生活情境引入因數的意義，
- 不宜直接在數的情境下引入

- 以12個蘋果想要分裝成幾袋，讓每袋的蘋果一樣多，有哪些分法？
  - 教學的重點不是可以分裝成多少袋？
  - 也不是有幾種分裝蘋果的方法

- 教學的重點是一袋可以有多少個蘋果？
  - 針對12個蘋果，12的因數指的是幾個蘋果可以整數倍合成為12個蘋果。
  - 2個蘋果裝一袋，12個蘋果可以裝滿6袋，
  - 2個蘋果可以整數倍的合成為12個蘋果，
  - 所以2個蘋果是12個蘋果的因數
  - 6袋不是12個蘋果的因數



# 12個蘋果

因數：幾個蘋果可以整數倍合成12個蘋果

倍數：12個蘋果可以整數倍合成幾個蘋果

🤔 為何0不是12的因數

而0是12的倍數

因為0不可能整數倍成任何數  
但是12的0倍是0



# 哪種引入因數的方法比較恰當？

台南市國教輔導團數學領域

①  $12 \div 2 = 6 \cdots 0$ ，12、2、6 都是整數，

我們說：2 是 12 的因數。

②  $2 \times 6 = 12$ ，12、2、6 都是整數，

我們說：2 是 12 的因數。

兩種方法都可以，但必須引入除法的定義。

234 是否為 16528 的因數

# 找因數的方法

台南市國教輔導團數學領域

$$12(\text{蘋果}) \div 1(\text{蘋果}) = 12(\text{袋}) \leftarrow$$

$$12(\text{蘋果}) \div 2(\text{蘋果}) = 6(\text{袋}) \leftarrow$$

$$12(\text{蘋果}) \div 3(\text{蘋果}) = 4(\text{袋}) \leftarrow$$

$$12(\text{蘋果}) \div 4(\text{蘋果}) = 3(\text{袋}) \leftarrow$$

$$12(\text{蘋果}) \div 6(\text{蘋果}) = 2(\text{袋}) \leftarrow$$

$$12(\text{蘋果}) \div 12(\text{蘋果}) = 1(\text{袋}) \leftarrow$$

12 的因數

不是 12 的因數

左邊和右邊框框內的數字相同

$$12(\text{蘋果}) \div 1(\text{蘋果}) = 12(\text{袋}) \leftarrow$$

$$12(\text{蘋果}) \div 2(\text{蘋果}) = 6(\text{袋}) \leftarrow$$

$$12(\text{蘋果}) \div 3(\text{蘋果}) = 4(\text{袋}) \leftarrow$$

$$12(\text{蘋果}) \div 4(\text{蘋果}) = 3(\text{袋}) \leftarrow$$

$$12(\text{蘋果}) \div 6(\text{蘋果}) = 2(\text{袋}) \leftarrow$$

$$12(\text{蘋果}) \div 12(\text{蘋果}) = 1(\text{袋}) \leftarrow$$

只要找出一半的算式即可  $\Rightarrow$  脫離情境

# 因數——如何判斷已找出一半的算式

台南市國教輔導團數學領域

$$12 \div 1 = 12 \leftarrow$$

$$12 \div 2 = 6 \leftarrow$$

$$12 \div 3 = 4 \leftarrow$$

$$12 \div 4 = 3 \leftarrow$$

$$12 \div 6 = 2 \leftarrow$$

$$12 \div 12 = 1 \leftarrow$$

$$16 \div 1 = 16 \leftarrow$$

$$16 \div 2 = 8$$

$$16 \div 4 = 4$$

$$16 \div 8 = 2 \leftarrow$$

$$16 \div 16 = 1 \leftarrow$$

# 公因數---五年級

台南市國教輔導團數學領域

方法一：分別列出 18 和 24 所有的因數

18 的因數：1、2、3、6、9、12

24 的因數：1、2、3、4、6、8、12、24

↓

18 和 24 的公因數：1、2、3、6

18 和 24 的最大公因數：6

方法二：只列出 18 的因數，

再判斷是不是 24 的因數

18 的因數：1、2、3、6、9、18



判斷是否為 24 的因數

18 和 24 的公因數：1、2、3、6

18 和 24 的最大公因數：6

透過觀察我們可以領略這個奇妙的世界。



從觀察所得的訊息引發我們的好奇心，對週圍的事物提出問題，引發思考，作出解釋與及作進一步的探究。

- 「36 位男生和 24 位女生全部混合分組，每組的男生和女生分別一樣多，最多可以分成幾組？」是五年級常出現的問題，多數學生可能不理解題意。建議教師先說明「每組的男生和女生分別一樣多」的意義，再幫助學生解題。

例如：平分成 2 組時，第一組有 18 位男生和 12 位女生，第二組也有 18 位男生和 12 位女生，所以每組的男生和女生分別一樣多。

例如：平分成 4 組時，每一組都有 9 位男生和 6 位女生，所以每組的男生和女生分別一樣多。



# 公因數---六年級

## 方法一：質因數分解法

求18和24的(最大)公因數

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

如何用質因數分解的算式  
列出18及24的因數

## 先分類，再窮盡

18的因數：1、2、3

$$2 \times 3、3 \times 3$$

$$2 \times 3 \times 3$$

教師提出  
1個數  
2個數乘積  
3個數乘積

24的因數：1、2、3

$$2 \times 2、2 \times 3$$

$$2 \times 2 \times 2、2 \times 2 \times 3$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 3$$

教師提出

18和24的公因數：1、2、3、 $2 \times 3$

18和24的最大公因數： $2 \times 3$



幫助學生察覺：

最大公因數是質因數的乘積

公因數是最大公因數的因數



# 公因數

## 方法二：短除法

是質因數分解法的速算法

### 質因數分解法

先將18和24質因數分解  
才能找到最大公因數。

### 短除法

直接透過24和18  
求最大公因數

$$2) \begin{array}{r} 18 \\ 24 \end{array} \leftarrow$$

$$3) \begin{array}{r} 9 \\ 12 \end{array} \leftarrow$$

◎此時是引入互質的適當時機  $\Rightarrow 3 \quad 4 \Rightarrow (3, 4) = 1$

①3和4沒有共同的質因數，稱3和4互質

② $(3, 4) = 1$ ，稱3和4互質

# 觀察兩式的異同

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$
$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

↓

2	18	24	←							
3	)	9	12	←						
		3	4	⇒	4	=	2	×	2	←

短除法的功用是：快速地找出質因數

短除法是質因數分解法的速算法



# 短除法

一、18、24可以先提6嗎？



$$\begin{array}{r|l} 6 & 18 \quad 24 \\ & \hline & 3 \quad 4 \end{array}$$

6有兩種意義，請聽錄音

二、可以放7嗎？

$$\begin{array}{r|l} 7 & 21 \quad 20 \quad 30 \\ & \hline & 3 \quad 20 \quad 30 \end{array}$$



可以，但沒有效率

❖ NC-6-1-2

短除法做質因數的分解

(質數  $< 20$ ，質因數  $< 20$ ，被分解數  $< 100$ )。

# 基本學習表現

## 基本學習表現

NCP-6-1-1-1 能認識質數。

NCP-6-1-1-2 能認識合數。

NCP-6-1-1-3 知道 1 不是質數也不是合數。

NCP-6-1-1-4 知道偶數中只有 2 是質數，其它偶數皆不是質數。

NCP-6-1-2-1 能認識質因數。

NCP-6-1-2-2 能用樹狀圖做質因數的分解。

NCP-6-1-2-3 能用短除法做質因數的分解。

# 最簡分數

台南市國教輔導團數學領域

五年級時不要求最後的答案必須是最簡分數。

六年級在容許的因、倍數範圍中，應要求最後的答案必須是最簡分數。

## 透過比較活動引入最簡分數

最簡分數，例如列出一些分子和分母都比 $\frac{9}{15}$ 小的等值分數 $\frac{6}{10}$ 、 $\frac{3}{5}$ ，先說

明 $\frac{6}{10}$ 的分子和分母都比 $\frac{9}{15}$ 的分子和分母小，稱 $\frac{6}{10}$ 是比 $\frac{9}{15}$ 簡單的分數。

$\frac{3}{5}$ 也是比 $\frac{6}{10}$ 簡單的分數，5和3兩數互質，找不到比 $\frac{3}{5}$ 更簡單的分數，數

學上稱 $\frac{3}{5}$ 為這些等值分數中的最簡分數

# 質因數分解法

台南市國教輔導團數學領域

引起動機



小  
魔  
術



# 質因數分解的標準分解式

台南市國教輔導團數學領域

## ❖ 數學教育中心：影片名稱：系統性的因數分解

<https://www.youtube.com/watch?v=zVyKtRNzL6g>

1.器材：

計算機

撲克牌2有4張

3有4張

5有4張

2.任選四張相乘，  
告訴老師乘積是多少

3.老師展現神力，  
猜出這四張牌是多少

4.學生猜，老師是如何辦到的

# 質因數分解的標準分解式

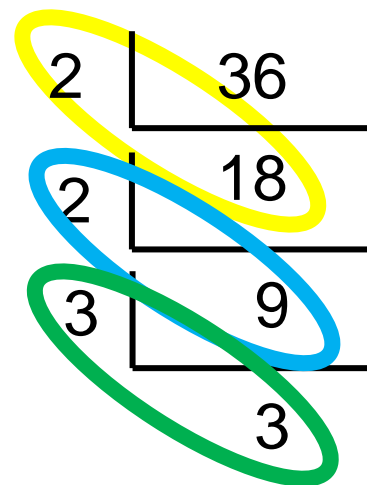
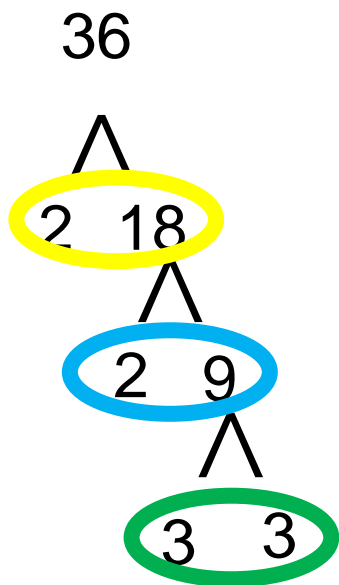
台南市國教輔導團數學領域

① 樹狀圖法

② 短除法

它們是二種不同的解題方法嗎？誰先引入？

◎ 將36分成兩個大於1整數的乘積



此時可以引入質數的定義

已知36可以分解成質因數的乘積，  
引入短除法，較快速求出質因數乘積

# 最小公倍數—質因數分解與短除法

台南市國教輔導團數學領域

質因數分解：

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

最小公倍數為： $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$



2)	18	24	←
3)	9	12	←
	3	4	⇒ 4 = 2 × 2 ←

(3 4)互質，代表沒有共同的質因數了

# 短除法-注意事項

台南市國教輔導團數學領域

## 一、是否一定要放質數

15、20、30求最小公倍數，可以先放10嗎？

如果不是放質數，學生要能知道那是質因數乘積的結果 $10=2 \times 5$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 15 \quad 20 \quad 30 \\ \hline 3 & 15 \quad 2 \quad 3 \\ \hline & 5 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{r|l} 10 & 15 \quad 20 \quad 30 \\ \hline 3 & 3 \quad 2 \quad 3 \\ \hline & 1 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

最小公倍數是300了

看得懂這記法嗎？

## 二、有三數互質嗎？

$$\begin{array}{r|l} 10 & 15 \quad 20 \quad 30 \\ \hline 3 & 15 \quad 2 \quad 3 \\ \hline & 5 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

求公倍數時，需檢測兩兩互質  
不需延伸有三數互質

$(15 \quad 2 \quad 3)=1$  是互質嗎？


# 區分「質數」和「互質」的差異

台南市國教輔導團數學領域

質數：質數討論的是一個數的性質，判斷該數是否滿足只有1和自己兩個因數的條件。

互質：互質討論的是 $a$ 、 $b$ 兩個數的關係，當 $(a, b) = 1$ ，數學上稱 $a$ 和 $b$ 互質。

例如：1不是質數，但是 $(1, 6) = 1$ ，所以1和6互質。

An illustration of approximately 18 diverse cartoon children of various ethnicities and hair colors (including orange, red, brown, and black) holding hands and forming a large circle. They are smiling and appear to be in a joyful, collaborative setting. The background is a light gray grid pattern.

# 倍數和公倍數

# 公倍數

## 五年級的方法

台南市國教輔導團數學領域

方法一：分別列出 18 和 24 部份的倍數↵

18 的倍數：18、36、54、72、90、...↵

24 的因數：24、48、72、96、120、...↵



18 和 24 的公倍數：72、144、216、...↵

18 和 24 的最小公因數：72↵

方法二：只列出 24 的倍數，↵

再判斷這些倍數是不是 24 的倍數↵

24 的倍數：24、48、72、96、120、144、...↵



判斷是否為 18 的倍數↵

18 和 24 的公倍數：72、144↵

18 和 24 的最小公倍數：72↵

幫助學生察覺：  
公倍數是最小公倍數的倍數

18 和 24 的公倍數：  
72、144、216、...

18 和 24 的最小公倍數：72

# 六年級的方法

台南市國教輔導團數學領域

## 方法一：質因數分解法

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

觀察看看：

18乘以多少就可以成為24的倍數  
24乘以多少就可以成為18的倍數

18：再乘上  $2 \times 2$  就是 24 的倍數

$$18 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

24：再乘上  $3$  就是 18 的倍數

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

18和24的最小公倍數： $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

你發現了什麼(代公式的想法)？

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$  是「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積



## 方法二：短除法

$$2) \begin{array}{r} 18 \\ 24 \end{array} \left| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \right. \leftarrow$$

$$3) \begin{array}{r} 9 \\ 12 \end{array} \left| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \right. \leftarrow$$

$$3 \quad 4 \Rightarrow (3, 4) = 1 \leftarrow$$

$$4 = 2 \times 2$$

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \left| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \right. \leftarrow$$

18和24的最小公倍數： $2 \times 3 \times 3 \times 4$



# 數學奠基遊戲

## 數戰棋



# 認識遊戲棋盤-百數表

台南市國教輔導團數學領域

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

# 可以利用百數表做什麼

南市國教輔導團數學領域

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

圈出2的倍數

發現個位數是  
0、2、4、6、8

圈出5的倍數

發現個位數是  
0、5

發現10是  
共同的倍數

圈出10的倍數

發現個位數是0

建議教師在百數表內討論完2、5和10倍數的判斷法後，還要舉一些比100大的整數例子，幫助學生延伸判斷法使用的範圍。



# 遊戲設置

台南市國教輔導團數學領域

❖ 雙方玩家各持10顆棋子。



❖ **白方**將棋子放在棋盤上**1~10**位置處，**黑方**在**91~100**。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 11
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

❖ 一次只能移動一顆棋，只能往前移動一排

❖ 任一顆棋只能移往前一排倍數的位置。

(不能後退或橫向移動)

❖ 吃棋：前一排倍數位置，有對方的棋，可把它吃掉

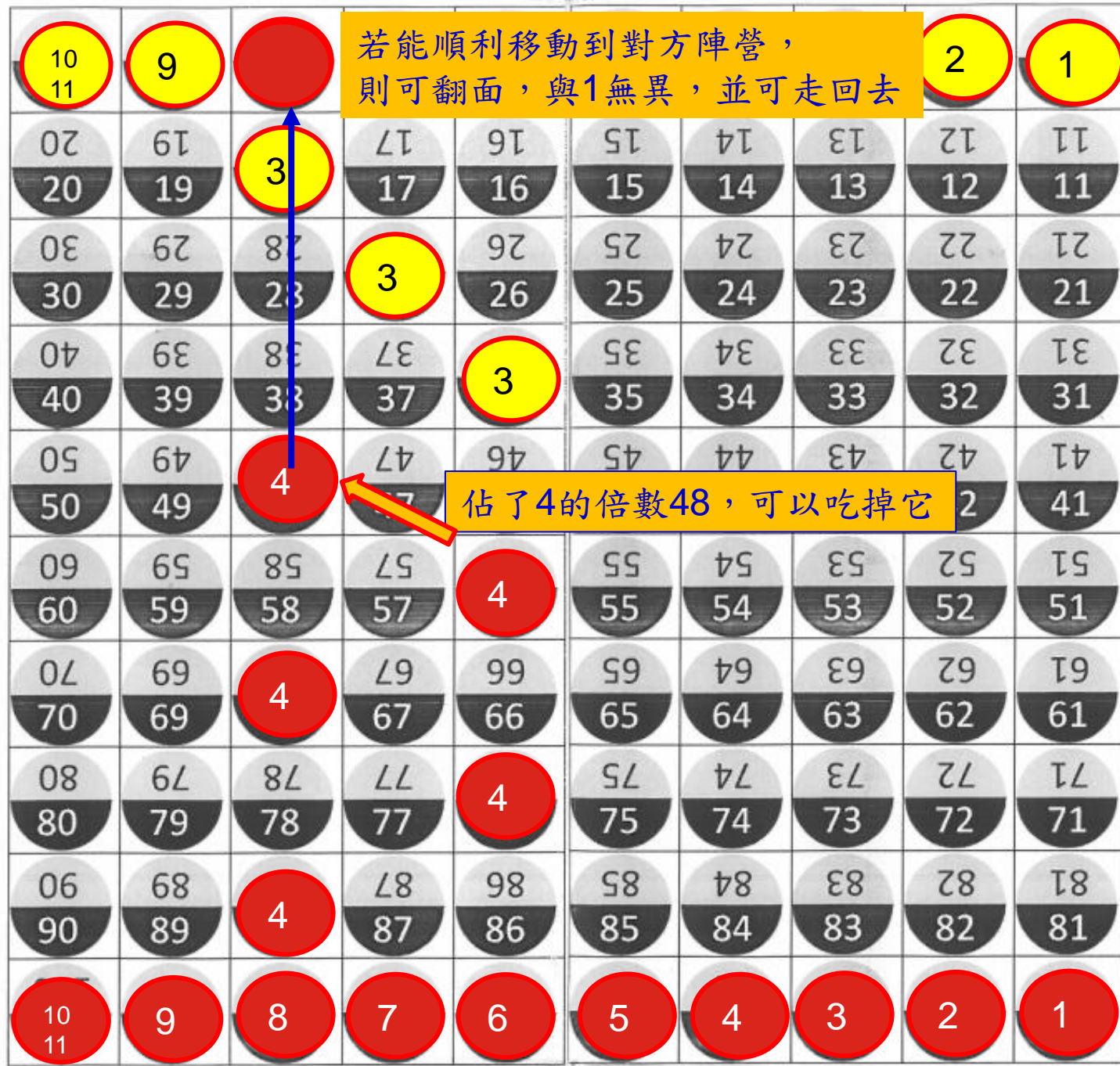
# 遊戲規則

台南市國教輔導團數學領域

- ❖ 玩家棋子到達**對方領地**後可「**升級**」，將棋子**翻面**，與1相同。

91	92	93	94	95	○	●7	98	99	100
●9	82	83	84	85	86	87	○8	89	90

- 任何一方先將對方棋子吃完即獲得勝利。



- ❖ 棋子被吃的數字，與兩棋子的關係是什麼？
- ❖ 棋子該如何走，最能趨凶避吉。
- ❖ 你覺得哪個棋子最有用？
- ❖ 你有贏的策略可以分享嗎？



# 3、9的倍數檢查技巧

❖ 為什麼數字和要相加？

❖ 以453為例：



❖ 最後剩下幾個1元？ $4+5+3$ 來除以3  
就知道餘數了



數學奠基遊戲-  
數字拉密

# 數字拉密遊戲介紹

台南市國教輔導團數學領域

● 遊戲分組：每組4人

● 遊戲器材介紹：

1. 倍數指令牌(每組20張)

2. 數字牌(每組50張)



2. 每人發「倍數指令牌」4張、「數字牌」6張。  
其餘「數字牌」放置中間作為共用牌。

3. 初次遊戲建議先拿走6、7、9、10倍數指令牌，先不玩。

4. 每人手中共有10張牌，率先將10張牌全部打出者勝利。

# 「數字拉密」遊戲開始

台南市國教輔導團數學領域

1. 破冰行動：1張+3張以上，且數字牌總和要大於30



2. 每位玩家皆要完成破冰行動（破冰行動只需一次）。無法破冰，就抽一張數字牌，當次拿的數字牌必需等到下一輪才能出。
3. 破冰後，就可出牌遊戲。只要符合組合規則，當次出牌張數不限，如果沒牌可出，就抽一張數字牌，換下一位玩家。
4. 同一列，數字牌可以重複出現，但倍數指令牌不得重複。
5. 數字牌可更換組合（挪到其他組合），倍數指令牌不能更換組合。

# 數字拉密遊戲規則

台南市國教輔導團數學領域

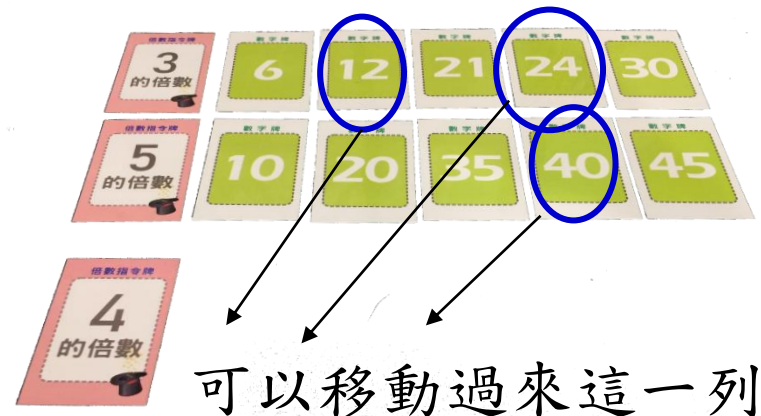
每列至少3張數字牌



指令牌不能重複  
也不能移動到別列

數字牌可重複  
也可以換列，  
但至少維持3張

「3的倍數不一定是2的倍數」  
所以不符合組合規則。



可以移動過來這一系列

破冰後，每次出牌張數不限，最快出完手上的牌就獲勝

# 課程與回饋


台南市國教輔導團數學領域



# 數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域





因數與倍數的應用  
TASA縣市學力檢測

S

C

H

O

O

L



# (五年級)

快樂國小有一面長為56公尺、寬40公尺的圍牆，想用藝術磁磚美化圍牆，請問最少需要多少片一樣大的正方形藝術磁磚才能貼滿這片圍牆？

	1	<u>2</u>	3	4 ←
選項率	.14	11	.12	.59 ←
高分組	.25	19	.09	.45 ←
低分組	.07	10	.15	.63 ←

學生最感困難的是：  
不能確定是要求的是公倍數或公因數

堅計：  
用1試試看，是不是符合題意要求，  
就可以知道要求什麼。

# TASA縣市學力檢測(五年級)

台南市國教輔導團數學領域

把一張長48公分、寬36公分的壁報紙，全部剪成若干個大小相同且面積大於1平方公分的正方形，這些正方形的面積不可能是多少平方公分？

① 4      ② 9      ③ 16      ④ 25

	1	2	3	<u>4</u> ←
選項率	.20	.13	.11	.54 ←
高分組	.04	.05	.03	.88 ←
低分組	.33	.19	.21	.25 ←

# TASA縣市學力檢測(五年級)

台南市國教輔導團數學領域

五年級學生全部有234人，要進行分組，  
每組人數相同且剛好全部分完，  
五年級的學生不可能是幾個人一組？

- ①13人      ②26人      ③38人      ④78人

	1	2	3	4
選項率	.18	.08	<b>.64</b>	.10
高分組	.06	.02	<b>.91</b>	.01
低分組	.29	.14	<b>.33</b>	.23

長 24 公分，寬 18 公分的長方形色紙。

- (1)全部剪成大小一樣的正方形，正方形邊長是整數，邊長可以是幾公分？
- (2)用長方形色紙拼成一個正方形，正方形邊長是 200 以內整數，邊長可以是幾公分



學生只要有嘗試錯誤的解題習慣，就能判斷問題該用公因數或公倍數的想法來解題！

1 是兩數的最小公因數←

如果 1 滿足題意，就是求公因數的問題←

如果 1 不滿足題意，就是求公倍數的問題←

長24公分，寬18公分的長方形色紙

(1)全部剪成大小一樣的正方形，正方形邊長是整數，邊長可以是幾公分？

(2)用長方形色紙拼成一個正方形，正方形邊長是200以內整數，邊長可以是幾公分

學生不易判斷該用公因數或公倍數解題

1 是兩數的最小公因數←

如果 1 滿足題意，就是求公因數的問題←

如果 1 不滿足題意，就是求公倍數的問題←

下列敘述何者正確？

- ① 2 和 4 的最小公倍數是 8
- ② 2 和 4 的最小公因數是 2
- ③ 4 和 8 的最大公倍數是 32
- ④ 4 和 8 的最大公因數是 4

	1	2	3	<u>4</u>
選項率	.19	.35	.18	<u>.28</u> ←
高分組	.11	.25	.06	<u>.58</u> ←
低分組	.24	.29	.28	<u>.09</u> ←

最大、最小、  
1、自己

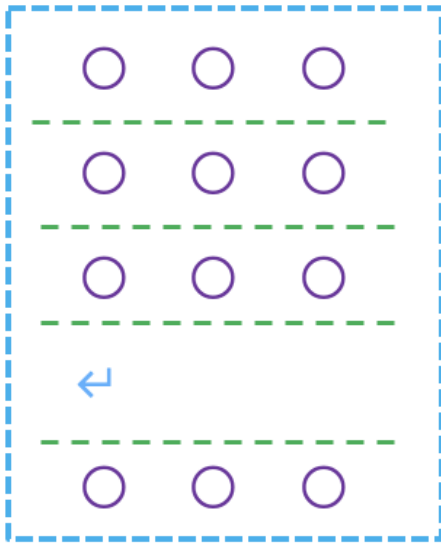


# 為何這兩題都可以利用公倍數算出答案？

台南市國教輔導團數學領域

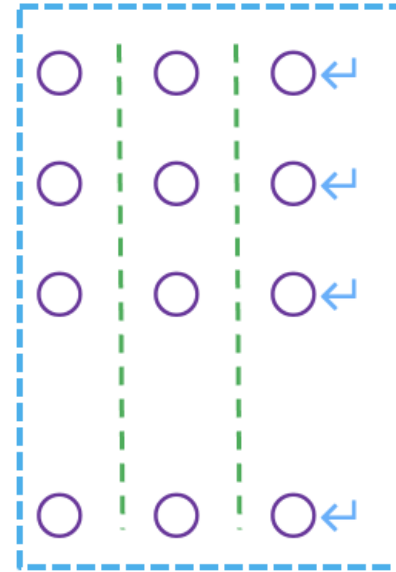
有一些蘋果：

① 3個一數、5個一數，剛好數完。



3個一數，剛好數完

② 平分成3堆，平分成5堆，剛好分完



平分成3組，剛好分完



36 位男生和 24 位女生混合分組，  
 每組男生和女生分別一樣多，  
 最多可以分成幾組？

36 位男生和 24 位女生分別分組，  
 每組男生和女生都一樣多，  
 最少可以分成幾組？

哪一題比較簡單？  
 哪一題的通過率比較高？

$$\begin{array}{r} 2)36 \quad 24 \\ \hline 2)18 \quad 12 \\ \hline 3)9 \quad 6 \\ \hline 3 \quad 2 \end{array}$$


左邊問題：12組(2×2×3)

右邊問題：5組(2+3)



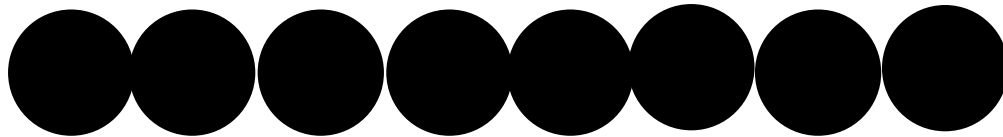
## 尋找因數的入門 數學奠基遊戲 長方形數

# 遊戲器材準備

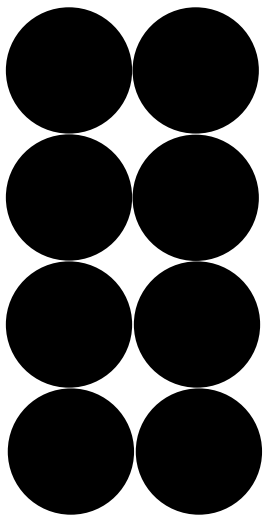
- 
1. 每組2-3人
  2. 圍棋30-50顆（花片也可以）
  3. 數字學習單一張
  4. 紅筆、黑筆或藍筆
  5. 適用時機：**教因數倍數前**

# 得分規則

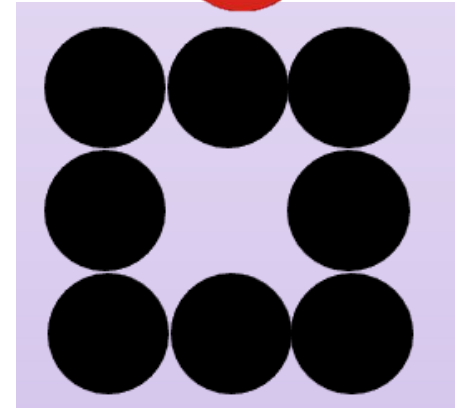
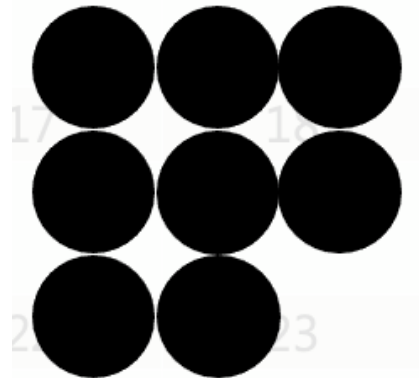
排8顆棋子，每排要一樣多個，可以怎麼排？



1x8或8x1相同排法、方向不同  
只算1分、2種排法（1排及8排）



2x4或4x2  
相同排法  
方向不同  
只算1分、  
2種排法



## 排出長方形或正方形挑戰賽

- 1.出題後，對方先排，排出實心的正方形或長方形，記錄下來就可以得一分。
- 2.對方排出來或放棄後，換人排，排出另一種也可以得一分，雙方輪流到都排不出來為止，結束這回合。
- 3.下一回合，換人出題。

# 遊戲是兩人對戰的

輪流選數字，  
你得一分後，  
輪到我排排看，  
能排出第二種，  
我也能得一分

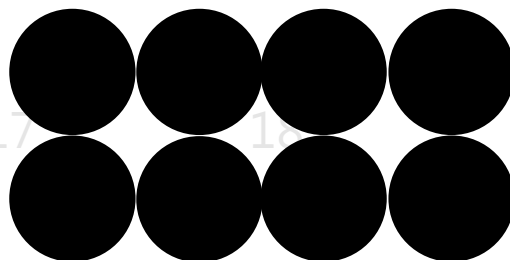
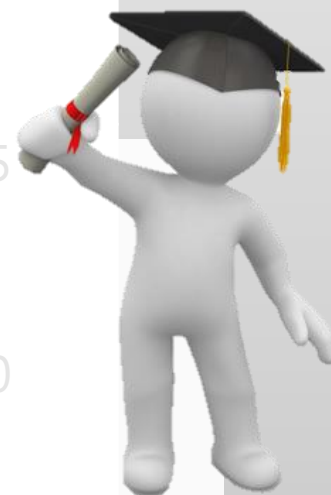
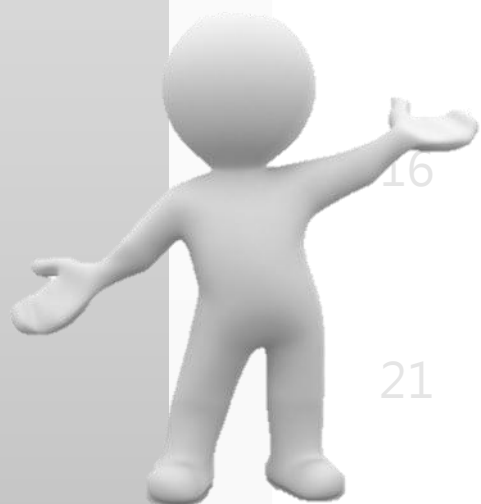
3

8

2x4

1x8

你加油



排出正方形或長方形，記錄下來就可以得分

# 長方形數記錄紙

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標記處	1x1	1x2	1x3	1x4 2x2	1x5	1x6 2x3	1x7	1x8 2x4	1x9 3x3	1x10 2x5
得分劃記(正字)	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2
有幾種排法	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
數字	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
標記處	1x11	1x12 2x6 3x4	1x13	1x14 2x7	1x15 3x5	1x16 2x8 4x4	1x17	1x18 2x9 3x6	1x19	1x20 2x10 4x5
得分劃記(正字)	1	3	1	2	2	3	1	3	1	3
有幾種排法	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
數字	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
標記處	1x21 3x7	1x22 2x11	1x23	1x24 2x12 3x8 4x6	1x25 5x5	1x26 2x13	1x27 3x9	1x28 2x14 4x7	1x29	1x30 2x15 3x10 5x6
得分劃記(正字)	2	2	1	4	2	2	2	3	1	4
有幾種排法	4	4	2	8	3	4	4	6	2	8

1. 由因數的個數（有幾種排法）可以發現.....？

2. 由因數的奇偶數（排法的奇偶數）可以發現完全平方數

## 結論:認識1、質數、合數

因數只有1個的數：1

因數只有2個的數：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29

因數有3個或比3個多的數：4、6、8、9、10、12、14、15、16、18、20、21、22、24、25、26、27、28、30

(1) 2的因數是1和2；3的因數是1和3；5的因數是1和5，....。

因數只有2個的數，因數都是1和本身，稱這些數為質數。  
也可以說，除了1和自己之外，沒有其它因數的整數稱為質數。

(2) 4的因數除了1和4之外還有2；

6的因數除了1和6之外還有2和3；

8的因數除了1和8之外還有2和4，....。

因數有3個或比3個多的數，它們的因數除了1和本身以外，還有其他的數，數學上稱這些數為合數。

(3) 1的因數只有1個，所以1不是質數也不是合數。

# 質數

台南市國教輔導團數學領域

1. 意義：一個數字如果除了 1 和自己之外，沒有其他正因數時，稱為質數。

2. 特性：質數除了 2 之外，必為奇數。（換句話說，2 是最小的質數，也是唯一的偶數）「1」不算是質數。「算術基本定理」：比 1 大的任何整數，必可分解為質因數的乘積，且表法唯一

3. 質數的個數與求法：

歐幾里德證明了「質數必有無限個

如果  $p$  不能被一個小於或等於  $\sqrt{p}$  的質數整除，那麼  $p$  就是質數。

$$131 \div 2 = 65 \dots 1, \quad 131 \div 3 = 43 \dots 2, \quad 131 \div 5 = 26 \dots 1, \quad 131 \div 7 = 18 \dots 5,$$

$$131 \div 11 = 11 \dots 10,$$

當我們看到  $131 \div 11 = 11 \dots 10$  時，很自然的會停，然後判斷「131 是質數」

因為商數已經和除數相等了。