

# 2013 臺南市國民中學暨完全中學數學競賽第二階段試題

作答說明：1. 本試卷題目共三頁總計 25 題，每題皆為單選題，每題均為 4 分，共 100 分。  
 2. 試題所提供圖形僅供參考。  
 3. 請將答案填寫在答案卷(卡)中。

1. 已知四個不同的數  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  分別代表 2、4、6、8 四個數字且都不重複出現，則  $ab+bc+bd+ac$  出現的最大可能值是多少？

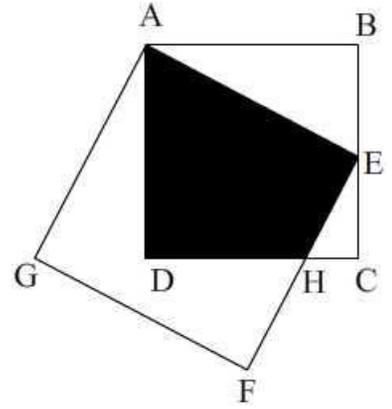
(A) 144 (B) 120 (C) 116 (D) 108

2. 已知  $a, b, c$  均為正整數 (其中  $c > 3$ )， $a$  除以  $c$  餘 1， $b$  除以  $c$  餘 2，則  $a$  乘以  $b$  之後再除以  $c$  的餘數是多少？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. 如右圖，四邊形  $ABCD$  與四邊形  $AEFG$  均為正方形，且  $E$  是  $\overline{BC}$  的中點，又  $\overline{AB} = 4$ ，

則圖中黑色部分 (四邊形  $ADHE$ ) 面積為何？



4. 若  $a = 2.6^{10} - 2.6^9$ ， $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$ ， $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ ，則下列何者正確？

(A)  $b > c > a$  (B)  $b > a > c$  (C)  $a > b > c$  (D)  $c > b > a$

5. 已知  $a, b$  為兩個整數，如果  $(3a - 2b + 4)^2$  與  $|2a + b - 9|$  為相反數，那麼  $|a - b|^{2013}$  的個位數字是多少？

(A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9

6. 試問  $x$  的一元一次方程式  $\frac{x}{1 \times 2} + \frac{x}{2 \times 3} + \frac{x}{3 \times 4} + \dots + \frac{x}{99 \times 100} = 99$  的解是多少？

(A)  $\frac{1}{100}$  (B)  $\frac{1}{99}$  (C) 99 (D) 100

7. 將  $3^2 \times 4^{16} \times 5^{25}$  乘開後是幾位數？

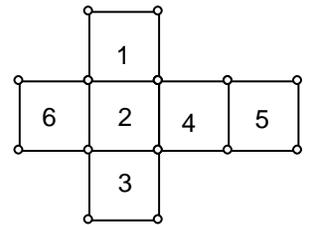
(A) 27 (B) 28 (C) 29 (D) 30

8. 有一個大掛鐘矗立在公園中，上午 9 點被校正為正確時間，但此掛鐘每走一分鐘，它會較正確時間慢 10 秒鐘，若當天下午此掛鐘的鐘面指針是兩點整，則此時正確的時間應是幾點幾分？

(A) 2 點 40 分 (B) 2 點 50 分 (C) 3 點整 (D) 3 點 10 分

9. 右圖是一個正方體的展開圖，每個面分別只能填入 1、2、3、4、5、6 任一個數字且不重複使用，如圖所示；試問相交於同一頂點的三個面上數字之和最大是多少？

(A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 15



10. 設  $m, n$  為互質的正整數，且  $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < 1$ ，如果將此分數  $\frac{m}{n}$  的分子加上一個正整數  $k$ ，且

分母乘以  $k$  後所得之新的分數，其值仍等於  $\frac{m}{n}$ ，那麼滿足這樣條件的分數  $\frac{m}{n}$  共有幾個？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

11. 設  $n$  為正整數，如果將  $n$  與它的所有位數的數字相加後得到和為 313，則滿足這樣條件的  $n$  共有多少個？

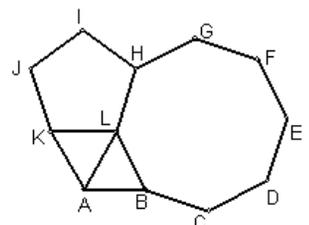
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 已知  $a \neq b$  且滿足  $a^2 - 4a + 1 = 0$ ， $b^2 - 4b + 1 = 0$ ，則  $\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right)^2 = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

13. 如圖， $\triangle AKL$  為正三角形， $HIJKL$  為正五邊形，且  $BCDEFGHL$  為正八邊形，且  $L$  為此三圖形之公共頂點，則  $\angle ABL$  的度數為多少度？

(A) 55 (B) 57 (C) 61.5 (D) 62.5



14. 有 10 個數  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ ，其中  $a_1 = 5$ ，且當  $k > 1$  時， $a_k = \frac{k}{a_{k-1}}$ ， $k = 2, 3, 4, \dots, 10$ 。

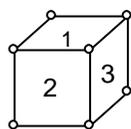
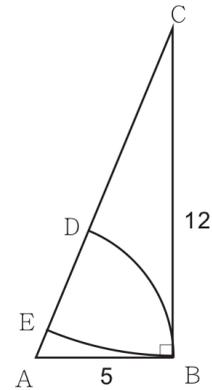
試問這 10 個數之乘積  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{10}$  為下列何者？

- (A) 384 (B) 1920 (C) 3840 (D) 7680
15. 設  $a, b$  為已知二數，如果一元二次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  與  $x^2 + bx + a = 0$  只能有一個公共的實數解，則  $(a+b)^3 = ?$
- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 8
16. 已知正整數  $n$  滿足  $n^{200} < 5^{300}$ ，則滿足這樣條件的  $n$  之最大值為下列何者？
- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11
17. 已知直角三角形  $ABC$  中， $\overline{AB} = 5$  公分， $\overline{BC} = 12$  公分，且  $\angle ABC = 90^\circ$ 。

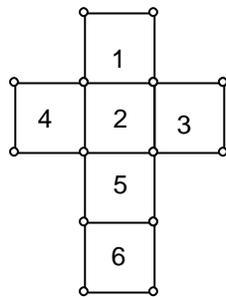
以  $A$  為圓心，5 公分長為半徑作弧，交  $\overline{AC}$  於  $D$  點；又以  $C$  為圓心，

12 公分長為半徑作弧，交  $\overline{AC}$  於  $E$  點如圖所示，那麼線段  $\overline{DE}$  的長為多少公分？

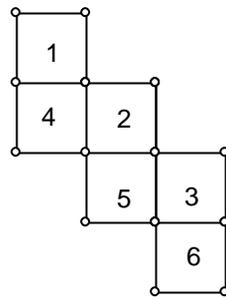
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
18. 將 1, 2, 3, 4, 5, 6 分別填入正方體的每一面中（每面恰只填一個數字），如圖(1)所示；將這個正立方體展開，共有 11 個不同的圖，圖(2) 及(3)是其中的兩個圖。又圖(4)是另一個展開圖，其相對應的數字如圖(4)所示；試問  $x+y$  之值為何？
- (A) 3 (B) 7 (C) 8 (D) 11



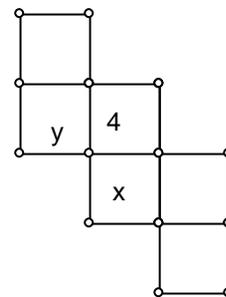
圖(1)



圖(2)



圖(3)



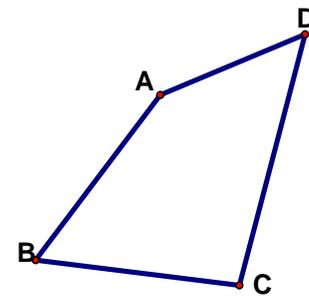
圖(4)

19. 小明開車從甲地開往乙地，每小時的車速維持固定。如果他把車速每小時提高 20%，可以比原來預定到達的時間提早 1 小時；如果他先以原來的速度行駛 120 公里後，再將車速每小時提高 25%，則可提前 40 分鐘到達，請問甲乙兩地相距多少公里？
- (A) 240 (B) 270 (C) 300 (D) 360
20. 有一個  $n$  位數  $A$ ，具備以下兩個性質：
- (1)  $A$  中每一位數的數字都是 1 或 2，
  - (2)  $A$  中至少有相鄰的二個數字都是 1，
- 例如： $n = 3$ ， $A = 112$ 、 $211$  及  $111$  都滿足此二性質。
- 又另一個  $m$  位數  $B$ ，具備以下兩個性質：
- (3)  $B$  中每一位數都是 0 或 1，
  - (4)  $B$  中至少有相鄰的二個數字都是 0，
- 例如： $m = 3$ ， $B = 100$  滿足此二性質。
- 若  $a_n$  表示  $n$  位數  $A$  的個數， $b_m$  表示  $m$  位數  $B$  的個數，則  $a_4 + b_4$  之值為多少？
- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13
21. 設有兩相異數  $a$  和  $b$  滿足  $a^2 - 5 = 4a$  和  $b^2 - 5 = 4b$ ，則  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$  之值為何？
- (A)  $\frac{8}{5}$  (B)  $\frac{6}{5}$  (C)  $-\frac{8}{25}$  (D)  $-\frac{26}{5}$
22. 設  $a+b=5$ ， $ab=3$ ， $c+d=4$ ， $cd=2$ ，令  $p=ac+bd$  且  $q=ad+bc$ ，若以  $p$  和  $q$  為兩根的方程式為  $x^2 + mx + n = 0$ ，則  $6m+2n=?$
- (A) 28 (B) 32 (C) 36 (D) 40

23. 在四邊形  $ABCD$  中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle BAD = 150^\circ$ ，且  $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$ 。如果

四邊形的周長為 16，則  $\overline{AD} = ?$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5



24. 已知實數  $a, b, c$  滿足  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ ，則  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$  之值為多少？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

25. 某一學年度創創在學校總共考了  $n$  次數學測驗，已知他在該學年度最後第二次數學測驗考了 98 分，他算出到此次測驗為止，他的數學測驗平均分數就會比前面  $n-2$  次的平均分數增加 1 分；又他在該學年度最後一次測驗考了 70 分，那麼他在該學年度全部數學測驗的平均分數就會比前面  $n-1$  次測驗的平均分數減少 2 分；則  $n = ?$

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

< 試題到此全部結束 >