臺南市 2013 年公私立國民中學暨完全中學數學競賽決賽試題

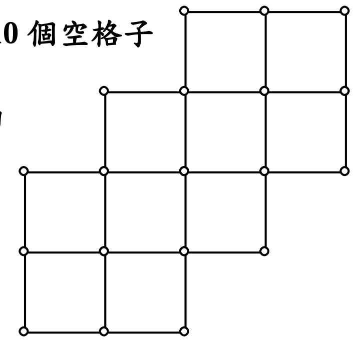
注意事項：
1、 本試卷試題共兩頁總計兩大題；第一大題為填充題共 10 題，每題 6 分；第二大題為計算及證明題共 4 題，每題 10 分。填充題只需依題號寫出最終答案，計算及證明題則須詳列計算或證明過程。
2、 試題所提供圖形僅供參考。
3、 請將答案填寫於答案本中。
4、 如有根式請化為最簡根式，如有分數請化為最簡分數，否則不予計分。
5、 請以藍筆或黑筆作答，鉛筆作答不予計分。

一、 填充題

1. 已知 p 和 q 都是質數且 $p>q$，如果 $p+q$ 和 $p-q$ 也都是質數，則 p^2-q 之值為__________。

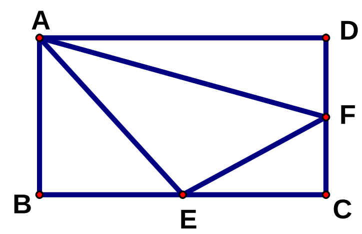
2. 已知 a,b 皆為整數，則共有___________組數對 (a,b) 滿足條件 $5(a^2+ab+b^2)=7a+14b$。

3. 將 2，3，4，5，6，7，8，9，10，11 這十個數不重覆的填入右圖中的 10 個空格子裡，每個格子只能填一個數。又此圖形中共有三個田字形，每個田字形都是由四個空格組成。如果每個田字形的四個空格內所填的數字之和都等於 A，則 A 的最大值為________。



4. 在所有三位數的正整數 n 中，能使 n^3 的末三位數字是 168 的最大三位數 n 為__________。

5. 長方形 $ABCD$ 中，E 為 $\overline{BC}$ 中點，F 為 $\overline{CD}$ 中點。如果 $\angle AEF$ 為直角，則 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$ 的值為_________。



6. 已知二數 a,b 滿足 $(2a+b)^2+(a+2b)^2+170=50a+58b$，則 $|a-b|=$_______。

7. 令 n 為正整數，在坐標平面上，直線 $y=-\dfrac{n}{n+1}x+\dfrac{1}{n+1}$，分別交 x 軸與 y 軸於 A, B 二點，O 為原點。若直角三角形 AOB 的面積為 S_n，則 $S_1+S_2+\ldots+S_{2013}=$_________。

8. 計算 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{9900}}=$________________。

9. 設某數列的第 n 項為 $\sqrt{1+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}}+\dfrac{(-1)^n}{n+3}$，其中 n 為正整數。若此數列的前 2013 項之和為 L，且 $\alpha<L<\alpha+1$，其中 α 是某正整數，則 α 的值為_________。

10. 已知 a,b 為正整數且 $a>b$，則滿足條件 $\sqrt{1683}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的 (a,b) 值為____________。

二、計算及證明題

1. 設 p 為質數，如果 p^2+11 的正因數之個數少於 **11** 個，試求滿足這樣條件的所有質數 p 。

2. 已知 a,b,c 為正整數，且 $1<a<b<c$ ，如果 $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ 能被 abc 整除，試求 a,b,c 之值。

3. 設 $n=24x^2-14x-5$，試求出所有可能的整數 x ，使得 n 是某個質數的平方，並求出所有合乎條件的 n 值。

4. 設 a,b,c 表示一個三角形之三邊長，試證：$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le a+b+c<2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}$ 。