

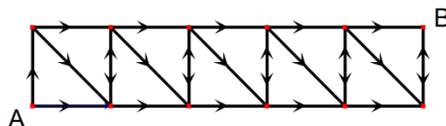
臺南市 2015 年公私立國民中學暨完全中學數學競賽決賽試題

注意事項：

- 1、本試卷試題總計兩大類；第一類為填充題，共 6 題，每題 8 分，共 48 分；第二類為計算及證明題，共 4 大題，共 52 分。
- 2、請將答案依題號填入答案卷中；填充題只須填入最終答案，計算證明題則須詳列計算或證明過程。
- 3、試題所提供圖形僅供參考；如有根式請化為最簡根式，如有分數請化為最簡分數，否則不予計分。
- 4、請以藍筆或黑筆作答，鉛筆作答不予計分。
- 5、試題及答案卷的背面可當計算紙使用。

一、填充題

1. 若已知方程式 $2x^3 - 4x^2 + kx + 4 = 0$ 的三個根中有兩個互為相反數，試求 k 的值。
2. 設 a, b, c 為等差數列，公差為 d 且 $a, b, d \neq 0$. 已知 $\frac{c}{b} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$. 求 $\frac{b}{d}$.
3. 令 $A = 9^9$. 已知 9^{40} 被 100 除的餘數為 1, 則 9^A 被 100 除的餘數為何?
4. 已知一直角三角形的三邊長皆為整數，若斜邊與其中一股的長度僅相差 1 且斜邊長小於 2015, 則這樣的直角三角形有多少個?
5. 已知一個等腰梯形的對角線長為 15, 當它的面積達到最大時，可能周長的最小值為何?
6. 下圖是由五個正方格所組成的網絡，路徑中有些只能沿箭頭所指示方向行走，其它則可雙向行走。從最左下角的點 A 走到最右上角的點 B , 路徑不能重覆，那麼所有可能路徑的總數是多少?



二、計算證明題

1. (12分) 已知 a, b, c, d ($a \neq d$) 都是正數且 $n = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. 試證：

$$n = \frac{(ac+bd)(ac-bd)}{(a+d)(a-d)}$$
2. (12分) 已知 m, n, k 為正整數且 m, n 皆大於 1. 試證：

$$(3^{m+1} - 1)(5^{n+1} - 1)(7^{k+1} - 1) > 98 \cdot 3^m \cdot 5^n \cdot 7^k$$
3. (14分) 已知 n 是大於 11 的正整數，試證： n 必可寫成兩個合成數的和，即 $n = a + b$, 其中 a, b 為合成數。
4. (14分) 如下圖， $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 為直角，斜邊 $\overline{BC} = \sqrt{6}$ 且 $\angle B \geq \angle C > 15^\circ$, 設 D 為 \overline{AB} 上一點且滿足 $\angle BCD = 15^\circ$.
 試證： $\overline{AD} \leq 1$ 且等號只當直角 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時才成立。

