

臺南市 2014 年公私立國民中學暨完全中學數學競賽決賽試題

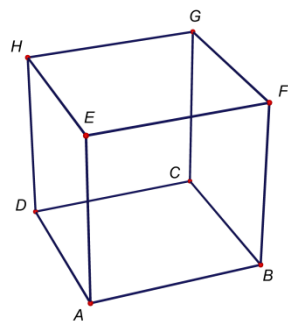
注意事項：

- 1、本試卷試題總計兩大類；第一類為填充題，共6題，每題8分，共48分；第二類為計算及證明題，共4大題，共52分。
- 2、請將答案依題號填入答案卷中；填充題只須填入最終答案，計算證明題則須詳列計算或證明過程。
- 3、試題所提供圖形僅供參考；如有根式請化為最簡根式，如有分數請化為最簡分數，否則不予計分。
- 4、請以藍筆或黑筆作答，鉛筆作答不予計分。
- 5、試題及答案卷的背面可當計算紙使用。

一、填充題

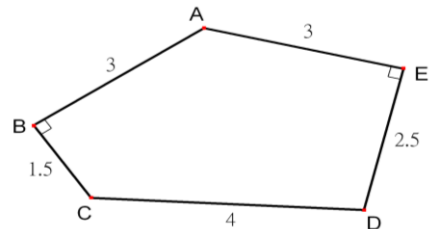
1. 若八位數 $273x49y5$ 是 495 的倍數，求 $x+y$ 的值。

2. 已知正立方體 $ABCD-EFGH$ (如右圖)，有一隻螞蟻從 A 點出發，沿著正立方體的邊界爬行，到達 G 點後立即停止。已知除了八個頂點之外，其餘邊界上的點都至多被螞蟻爬行過一次，試問：從 A 爬行至 G 點共有多少條路徑可供螞蟻選擇？



3. 若一個三位數 abc (a 為百位數， b 為十位數， c 為個位數) 為質數，且 bca, cab 亦為質數，則稱 abc 為「奇妙數」，那麼最大的奇妙數與最小的奇妙數的和為多少？

4. 如右圖，凸五邊形 $ABCDE$ 中， $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{AE} = 3$ ， $\overline{BC} = 1.5$ ， $\overline{CD} = 4$ ， $\overline{DE} = 2.5$ ，求 $ABCDE$ 的面積。(答案需化簡且不能有根號)



5. 數列 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, \dots$ 產生的規則如下：若已知數列中的某一項為 a ，且小於或等於 a 的正整數中，共有 t 個整數是立方數(某整數的三次方)，則 a 的下一項是 $a+t$ 。求這數列第 104 項的值。

6. 如右圖，由 1 開始逆時針在格子填上數字，數字 1 寫一次，數字 2 二次，數字 3 三次，餘此類推。而有斜線經過的格子，表示填到此格時，剛好填滿一個正方形，且它的邊有偶數個格子。現在，從斜線上的數字 3 出發，沿著斜線往左下方的數列依序為 3, 6, 8, 11, ..., 試求此(斜線)數列的第 50 項的值。

11	11	10	10	10	10	10	10
11	8	8	8	7	7	7	10
11	8	5	5	5	4	7	10
11	8	5	2	2	4	7	10
11	8	5	3	1	4	7	10
11	8	6	3	3	4	7	9
11	8	6	6	6	6	6	9
11	9	9	9	9	9	9	9
11	11	12	12	12	...		

二、計算證明題

1. 令 $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}$ 且 $B = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014}$ 。試判斷 A 和 B 的大小關係為何？詳細說明你的理由。(12分)

2. 已知 c 為實數，且 x 的方程式 $x^2 + c = |x^2 + 2x|$ 恰有 3 個相異的(實數)根，試求 c 的範圍。(12分)

3. 若 p 和 $p^2 + 8$ 都是質數，試證： $p^3 + 4$ 也是質數。(12分)

4. 三角形 ABC 是邊長為 1 單位的正三角形，在 BC 邊上取兩點 D, E ，使得 AD, AE 為 $\angle A$ 的三等分角線，即 $\angle BAE = \angle EAD = \angle DAC = 20^\circ$ (如右圖)。

試證：(1) $\triangle ADE$ 的面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4} \overline{CD} \cdot \overline{AD}$ (2) $\overline{CD} \cdot \overline{AD} = \overline{DE}$ 。(16分)

