

2013 臺南市國民中學暨完全中學數學競賽第二階段試題

作答說明：1. 本試卷題目共三頁總計 25 題，每題皆為單選題，每題均為 4 分，共 100 分。
 2. 試題所提供圖形僅供參考。
 3. 請將答案填寫在答案卷(卡)中。

1. 已知四個不同的數 a 、 b 、 c 、 d 分別代表 2、4、6、8 四個數字且都不重複出現，則 $ab+bc+bd+ac$ 出現的最大可能值是多少？

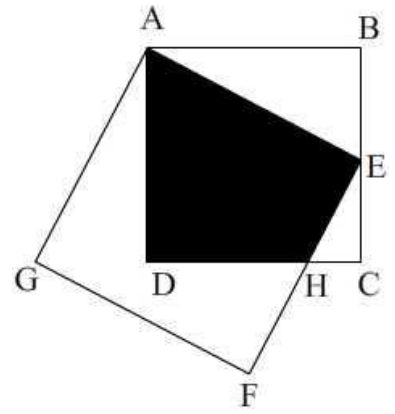
(A) 144 (B) 120 (C) 116 (D) 108

2. 已知 a, b, c 均為正整數 (其中 $c > 3$)， a 除以 c 餘 1， b 除以 c 餘 2，則 a 乘以 b 之後再除以 c 的餘數是多少？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $AEFG$ 均為正方形，且 E 是 \overline{BC} 的中點，又 $\overline{AB} = 4$ ，

則圖中黑色部分 (四邊形 $ADHE$) 面積為何？



4. 若 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$ ， $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$ ， $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ ，則下列何者正確？

(A) $b > c > a$ (B) $b > a > c$ (C) $a > b > c$ (D) $c > b > a$

5. 已知 a, b 為兩個整數，如果 $(3a - 2b + 4)^2$ 與 $|2a + b - 9|$ 為相反數，那麼 $|a - b|^{2013}$ 的個位數字是多少？

(A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9

6. 試問 x 的一元一次方程式 $\frac{x}{1 \times 2} + \frac{x}{2 \times 3} + \frac{x}{3 \times 4} + \dots + \frac{x}{99 \times 100} = 99$ 的解是多少？

(A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{1}{99}$ (C) 99 (D) 100

7. 將 $3^2 \times 4^{16} \times 5^{25}$ 乘開後是幾位數？

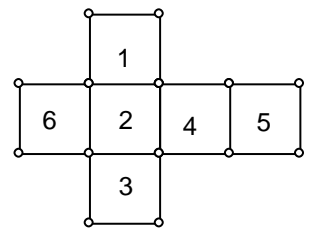
(A) 27 (B) 28 (C) 29 (D) 30

8. 有一個大掛鐘矗立在公園中，上午 9 點被校正為正確時間，但此掛鐘每走一分鐘，它會較正確時間慢 10 秒鐘，若當天下午此掛鐘的鐘面指針是兩點整，則此時正確的時間應是幾點幾分？

(A) 2 點 40 分 (B) 2 點 50 分 (C) 3 點整 (D) 3 點 10 分

9. 右圖是一個正方體的展開圖，每個面分別只能填入 1、2、3、4、5、6 任一個數字且不重複使用，如圖所示；試問相交於同一頂點的三個面上數字之和最大是多少？

(A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 15



10. 設 m, n 為互質的正整數，且 $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < 1$ ，如果將此分數 $\frac{m}{n}$ 的分子加上一個正整數 k ，且

分母乘以 k 後所得之新的分數，其值仍等於 $\frac{m}{n}$ ，那麼滿足這樣條件的分數 $\frac{m}{n}$ 共有幾個？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

11. 設 n 為正整數，如果將 n 與它的所有位數的數字相加後得到和為 313，則滿足這樣條件的 n 共有多少個？

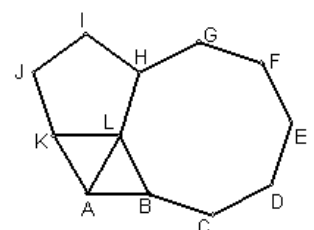
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 已知 $a \neq b$ 且滿足 $a^2 - 4a + 1 = 0$ ， $b^2 - 4b + 1 = 0$ ，則 $\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right)^2 = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

13. 如圖， $\triangle AKL$ 為正三角形， $HIJKL$ 為正五邊形，且 $BCDEFGHL$ 為正八邊形，且 L 為此三圖形之公共頂點，則 $\angle ABL$ 的度數為多少度？

(A) 55 (B) 57 (C) 61.5 (D) 62.5



14. 有 10 個數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ ，其中 $a_1 = 5$ ，且當 $k > 1$ 時， $a_k = \frac{k}{a_{k-1}}$ ， $k = 2, 3, 4, \dots, 10$ 。

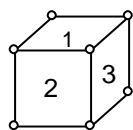
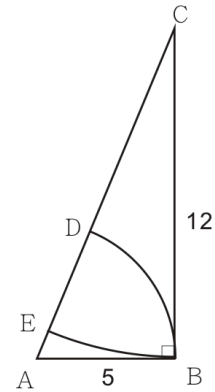
試問這 10 個數之乘積 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{10}$ 為下列何者？

- (A) 384 (B) 1920 (C) 3840 (D) 7680
15. 設 a, b 為已知二數，如果一元二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 與 $x^2 + bx + a = 0$ 只能有一個公共的實數解，則 $(a+b)^3 = ?$
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 8
16. 已知正整數 n 滿足 $n^{200} < 5^{300}$ ，則滿足這樣條件的 n 之最大值為下列何者？
 (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11
17. 已知直角三角形 ABC 中， $\overline{AB} = 5$ 公分， $\overline{BC} = 12$ 公分，且 $\angle ABC = 90^\circ$ 。

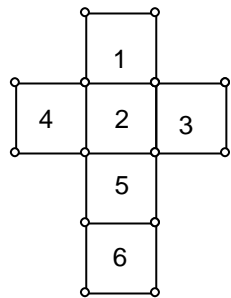
以 A 為圓心，5 公分長為半徑作弧，交 \overline{AC} 於 D 點；又以 C 為圓心，

12 公分長為半徑作弧，交 \overline{AC} 於 E 點如圖所示，那麼線段 \overline{DE} 的長為多少公分？

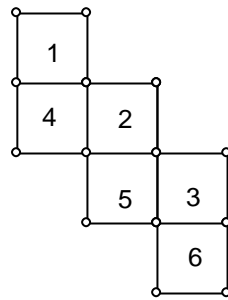
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
18. 將 1, 2, 3, 4, 5, 6 分別填入正方體的每一面中（每面恰只填一個數字），如圖(1)所示；將這個正立方體展開，共有 11 個不同的圖，圖(2) 及(3)是其中的兩個圖。又圖(4)是另一個展開圖，其相對應的數字如圖(4)所示；試問 $x+y$ 之值為何？
 (A) 3 (B) 7 (C) 8 (D) 11



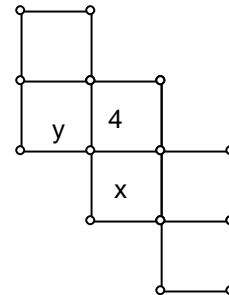
圖(1)



圖(2)



圖(3)



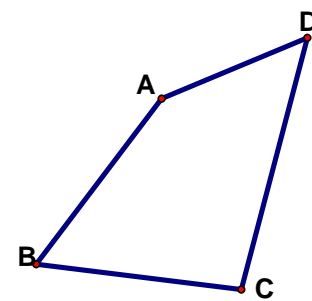
圖(4)

19. 小明開車從甲地開往乙地，每小時的車速維持固定。如果他把車速每小時提高 20%，可以比原來預定到達的時間提早 1 小時；如果他先以原來的速度行駛 120 公里後，再將車速每小時提高 25%，則可提前 40 分鐘到達，請問甲乙兩地相距多少公里？
 (A) 240 (B) 270 (C) 300 (D) 360
20. 有一個 n 位數 A ，具備以下兩個性質：
 (1) A 中每一位數的數字都是 1 或 2，
 (2) A 中至少有相鄰的二個數字都是 1，
 例如： $n = 3$ ， $A = 112$ 、 211 及 111 都滿足此二性質。
 又另一個 m 位數 B ，具備以下兩個性質：
 (3) B 中每一位數都是 0 或 1，
 (4) B 中至少有相鄰的二個數字都是 0，
 例如： $m = 3$ ， $B = 100$ 滿足此二性質。
 若 a_n 表示 n 位數 A 的個數， b_m 表示 m 位數 B 的個數，則 $a_4 + b_4$ 之值為多少？
 (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13
21. 設有兩相異數 a 和 b 滿足 $a^2 - 5 = 4a$ 和 $b^2 - 5 = 4b$ ，則 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 之值為何？
 (A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{6}{5}$ (C) $-\frac{8}{25}$ (D) $-\frac{26}{5}$
22. 設 $a+b=5$ ， $ab=3$ ， $c+d=4$ ， $cd=2$ ，令 $p=ac+bd$ 且 $q=ad+bc$ ，若以 p 和 q 為兩根的方程式為 $x^2 + mx + n = 0$ ，則 $6m + 2n = ?$
 (A) 28 (B) 32 (C) 36 (D) 40

23. 在四邊形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle BAD = 150^\circ$ ，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$ 。如果

四邊形的周長為 16，則 $\overline{AD} = ?$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5



24. 已知實數 a, b, c 滿足 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ ，則 $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$ 之值為多少？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

25. 某一學年度創創在學校總共考了 n 次數學測驗，已知他在該學年度最後第二次數學測驗考了 98 分，他算出到此次測驗為止，他的數學測驗平均分數就會比前面 $n-2$ 次的平均分數增加 1 分；又他在該學年度最後一次測驗考了 70 分，那麼他在該學年度全部數學測驗的平均分數就會比前面 $n-1$ 次測驗的平均分數減少 2 分；則 $n = ?$

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

< 試題到此全部結束 >