

# 臺南市 105 年公私立國民中學數學競賽複賽試題

試題說明：

本試題共 22 題，分為兩部分。第一部分：第 1 到第 10 題，每題 4 分，共 40 分；

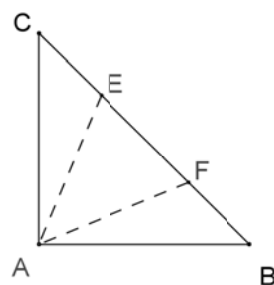
第二部分：第 11 到第 22 題，每題 5 分，共 60 分；總分 100 分。

請從每題的四個選項中選出最合乎題意的答案。

第一部分（第 1 到第 10 題，每題 4 分，共 40 分）

1. 已知  $x, y, z$  均為實數， $\frac{y}{x}:\frac{z}{y}=3:2$  且  $\frac{y}{z}:\frac{z}{x}=9:4$ 。求  $\frac{z}{y}$  的值。  
(A)  $\frac{27}{8}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{4}{9}$  (D)  $\frac{4}{19}$
2. 已知  $f(x) = 28x - 2016 + |28x - 2016|$ 。求  $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100)$  的值。  
(A) 22728 (B) 22736 (C) 22744 (D) 22752
3. 下列何者為方程式  $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$  的最大解？  
(A)  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  (B)  $3 + \sqrt{2}$  (C)  $2 + \sqrt{3}$  (D)  $1 + \sqrt{2}$
4. 在滿足「125 整除  $n^2 + n - 90$ 」的所有正整數  $n$  中，令最小的兩個分別為  $a$  和  $b$ ，則  $a + b$  的值為何？  
(A) 118 (B) 120 (C) 122 (D) 124
5. 已知  $u, v, w$  三數滿足  $u + v + w = 17$  及  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 29$ 。求  $\frac{u}{v} + \frac{v}{w} + \frac{w}{u} + \frac{u}{w} + \frac{w}{v} + \frac{v}{u}$  的值。  
(A) 288 (B) 320 (C) 490 (D) 493
6. 下列何者可以寫成 100 個連續整數的總和？  
(A) 8825 (B) 8800 (C) 8775 (D) 8750
7. 正整數  $3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + 3^{96} - 3^{95}$  含有幾個相異質因數？  
(A) 4 個 (B) 5 個 (C) 6 個 (D) 7 個
8. 已知  $f(x) = ax + 9$ ， $g(x) = x + 1$  為兩線型函數，其中  $a$  為一給定的數，且  $f(4) < g(4)$ 、 $f(3) > g(3)$ 。若  $b$  滿足  $3f(b) = g(b)$ ，則  $b$  的範圍為何？  
(A)  $-\frac{13}{2} < b < -\frac{13}{3}$  (B)  $-\frac{5}{3} < b < -1$  (C)  $1 < b < \frac{5}{3}$  (D)  $\frac{13}{3} < b < \frac{13}{2}$
9. 數列 2, 1, 3, 4, 7, 11, ... 的首二項分別為 2, 1，其後每一項是前面兩項的和。那麼第 1 項至第 2016 項中共有多少項除以 3 的餘數是 2？  
(A) 576 (B) 672 (C) 756 (D) 896

10. 如右圖，將等腰直角三角形  $ABC$  的兩腰  $\overline{AB}$  與  $\overline{AC}$  分別沿著  $\overline{AF}$  及  $\overline{AE}$  往內摺，使得  $\overline{AB}$  及  $\overline{AC}$  重合，且  $B, C$  兩點摺至平面上同一點  $A'$ 。已知  $\overline{AB} = 1$ 。求四邊形  $AEA'F$  的面積。



- (A)  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\sqrt{2} - 1$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

**第二部分（第 11 到第 22 題，每題 5 分，共 60 分）**

11. 已知  $7^{12} - 1$  恰有一個質因數介於 30 與 50 之間。求出此質因數。  
(A) 31 (B) 37 (C) 41 (D) 43

12. 求  $9\left(\frac{2 - \sqrt{2016}}{3}\right)^3 - 2028\left(\frac{2 - \sqrt{2016}}{3}\right) - 2683$  的值。

- (A)  $-\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $-\frac{1}{9}$  (D)  $\frac{1}{9}$

13. 已知  $a, b$  兩數滿足  $ab \neq 1$ ,  $17a^2 + 29a + 1 = 0$ ,  $b^2 + 29b + 17 = 0$ 。求  $\frac{ab - 5a + 1}{b}$  的值。

- (A) -1 (B) -2 (C) -5 (D) -2 或 -5

14. 考慮「11 個連續 3 的倍數且每項均為二位數」的數列，其中「剛好有兩項為 5 的倍數」的這種數列共有多少個？

- (A) 16 (B) 17 (C) 18 (D) 21

15. 某項競賽中，每一題的分數會隨著該題的答對人數而變動，規則如下：若所有參加者都答對，則這題分數是 1 分；答對人數每少 1 人，則此題的分數就多加 1 分。例如：若全體參加人數為 5 人，則給分的規則如下表：

答對人數	5	4	3	2	1
分數	1	2	3	4	5

已知該競賽閱卷結束後，發現其中一題，有某一人「答對」，但卻被登錄為「答錯」，經修正後，所有參加者這題分數的總和增加 26 分，且這一題答對的人數是參加人數的  $\frac{1}{5}$ ，請問這題所有參加者分數總和是多少？

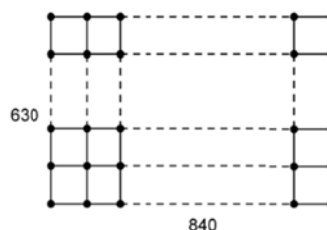
- (A) 264 (B) 265 (C) 266 (D) 267

16. 設三位數  $abc$  為 9 的倍數，且  $a, b, c$  均不為 3，則滿足以上條件的三位數  $abc$  共有幾個？

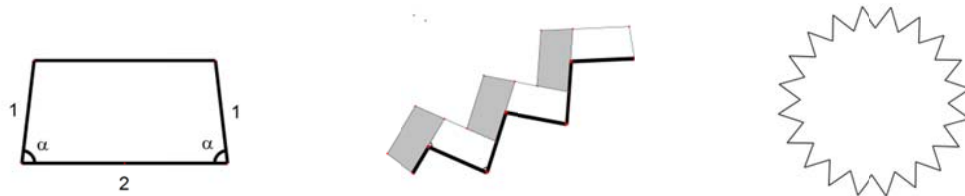
- (A) 81 (B) 72 (C) 64 (D) 56

17. 如圖，在長 840 公尺，寬 630 公尺的長方形土地上，橫直每隔 1 公尺種上樹木(圖中黑點)。試問：此長方形土地的(其中一條)對角線上有多少棵樹？

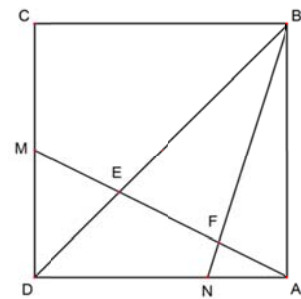
- (A) 209 (B) 210 (C) 211 (D) 212



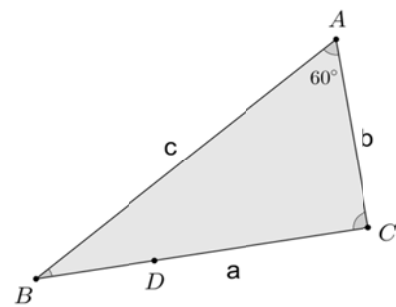
18. 下圖(左)為一等腰梯形，其兩底角的大小為  $\alpha = 83\frac{1}{3}$  度，下底及腰的長度分別為 2 與 1。今想以這種等腰梯形依下圖(中)的方式依序拼貼，使其外圍(圖(中)的粗線)圍成一正星形多邊形(如圖(右)這類圖形)。那麼共需要多少個這種梯形？  
 (A) 108 (B) 54 (C) 48 (D) 27



19. 已知  $ABCD$  為正方形， $M$  為  $\overline{CD}$  的中點， $\overline{AM}$  與  $\overline{BD}$  交於點  $E$ ， $F$  為線段  $\overline{AE}$  上一點使得  $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AM}$ ，且直線  $\overline{BF}$  交  $\overline{AD}$  於  $N$ 。求  $\overline{AN}:\overline{ND}$ 。  
 (A) 1:4 (B) 4:17 (C) 2:9 (D) 4:19



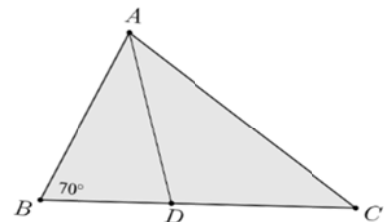
20. 如圖， $\triangle ABC$  中，三邊長分別記為  $a, b, c$ ， $\angle A = 60^\circ$ ； $D$  為  $BC$  上一點使得  $\overline{BD}:\overline{DC} = 1:3$  且  $AD$  平分  $\triangle ABC$  的周長，即  $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CD}$ 。下面那一個選項是錯誤的？  
 (A)  $a + 2b = 2c$  (B)  $\angle C > 60^\circ$  (C)  $\angle C - \angle B < 60^\circ$  (D)  $\angle B < 30^\circ$



21. 如右圖， $\triangle ABC$  中  $\angle B = 70^\circ$ ， $\overline{AB} = 1$ ， $\angle A$  的分角線交線段  $BC$  於  $D$ 。若令  $x = \overline{AC} - \overline{AB} > 0$ ，則

$$\overline{BD} = \sqrt{\frac{x}{1+x}}. \text{ 求 } \angle C.$$

- (A)  $20^\circ$  (B)  $30^\circ$  (C)  $40^\circ$  (D)  $50^\circ$



22. 如右圖一圓柱， $A, B$  分別為上下兩底圓上的點， $\overline{AB}$  垂直底面。有甲乙兩隻螞

蟻分別從  $A, B$  兩點出發，甲以保持與水平面夾  $45^\circ$  的方向，繞著圓柱表面往下底圓前進；而乙則以保持與水平面夾  $30^\circ$  的方向，繞著圓柱表面往上底圓前進。已知  $\overline{AB}$  上有一點  $C$ ，且甲恰繞圓柱兩圈後可抵達  $C$  點，而乙須恰繞圓柱三圈後才可抵達  $C$  點。求乙到達上底圓時，共繞了圓柱約幾圈？

- (A) 比 5 圈多，比 6 圈少 (B) 比 6 圈多，比 7 圈少  
 (C) 比 7 圈多，比 8 圈少 (D) 比 8 圈多，比 9 圈少

