

臺南市 109 年公私立國民中學數學競賽複賽試題

試題說明：

本試題共 22 題，分為兩部分。第一部分：第 1 到第 10 題，每題 4 分，共 40 分；

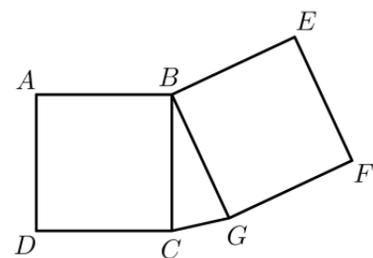
第二部分：第 11 到第 22 題，每題 5 分，共 60 分；總分 100 分。

請從每題的四個選項中選出最合乎題意的答案。

第一部分（第 1 到第 10 題，每題 4 分，共 40 分）

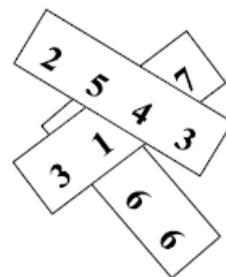
1. 有一堆形狀如右的地磚，其中四邊形 $ABCD$ 與 $BEFG$ 均為正方形，三角形 BCG 中， $\angle CBG = 15^\circ$ 。利用這些地磚，以 AD 及 EF 為銜接邊，拼出一個環狀，內部可圍出一個封閉的正 n 邊形，求 n 。

(A) 48 (B) 24 (C) 12 (D) 6



2. 右圖中的三張字條上各寫上一個四位數，這三個四位數的和是四位數 $ab56$ ，且能被 11 整除，有多少個可能的數對 (a, b) ？

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1



3. 在一個長 400cm 的環形管道內，蝸牛甲、乙、丙分別以等速每小時 3, 5, 7cm 移動，甲以逆時鐘方向走，而乙、丙是以順時鐘方向走。開始時甲、丙是在同一個位置上，而乙是在甲的順時鐘方向 80cm 處。幾小時後三隻蝸牛會第二次相遇？

(A) 40 (B) 200 (C) 240 (D) 360

4. 陽明國中 105 學年度新生的男女生比例為 8:7。106 學年度因少子化，男新生減少 34 人，女新生減少 36 人，此時新生的男女生比例變為 7:6，則陽明國中 106 學年度共有多少新生？

(A) 580 (B) 650 (C) 720 (D) 790

5. 已知 a, b 為整數，若 $|a+1| + 2(b-1)^2 = 3$ ，則數對 (a, b) 共有幾種可能？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

6. 已知方程式 $x^2 - 540x - 455629 = 0$ 與 $x^2 - 536x - 459617 = 0$ 有共同的一個解，求此共同解。

(A) 983 (B) 991 (C) 997 (D) 1009

7. 已知 x, y 均為正整數， $x + y = 1000$ 且 $x - y$ 為完全平方數，滿足此條件的數對 (x, y) 共有幾組？

(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18

8. 有多少個三位數，它是它的各位數和的 55 倍？

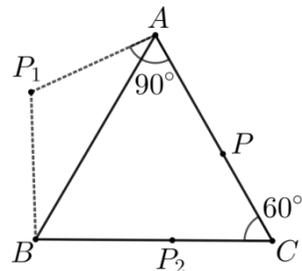
(A) 9 (B) 12 (C) 13 (D) 14

9. 一個演講廳座位共有 10 排，每排有 10 張椅子，在一場演講中，共有 68 個聽眾入座，每個人不是單獨坐，就是只有另一人與他比鄰而坐。在各種可能的情况下，一排中連續的空座位數最多有多少個？
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
10. 已知坐標平面上四個點 $A(0,1), B(1,4), C(2,5), D(5,2)$ ，求四邊形 $ABCD$ 的面積。
 (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16

第二部分（第 11 到第 22 題，每題 5 分，共 60 分）

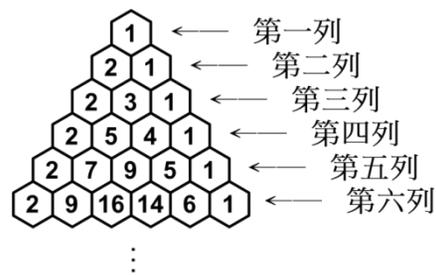
11. 從 1,2,3,4,5,6,7,8,9 中任取四個相異數，利用此四個數組成的四位數中，最大的減掉最小的，可得另一數，記做 x 。例如：若取到的四個數為 1,2,3,9，則 $x=9321-1239=8082$ 。求 x 的可能值的個數。
 (A) 5 (B) 8 (C) 21 (D) 64
12. 設正整數 n 滿足 3^n 整除 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 108 \times 109$ 。則 n 的最大可能值為何？
 (A) 53 (B) 36 (C) 17 (D) 5

13. 右圖中的正三角形 ABC 的邊長為 2，點 P, P_2 分別是邊 \overline{AC} 與 \overline{BC} 上的點， P_1 為 $\triangle ABC$ 外一點。一動點開始時位於 P 點，先將它以 A 為中心順時針旋轉 90° 後到達點 P_1 的位置；再將此動點以 B 為中心順時針旋轉某一角度後，到達 P_2 的位置；最後將此動點以 C 為中心順時針旋轉 60° 後，回到原來的位置 P 點上。則此動點移動的路徑總長度是多少？



- (A) $\frac{2\pi}{3}(1+\sqrt{3})$ (B) $\frac{\pi}{3}(3+2\sqrt{3})$ (C) $\frac{2\pi}{3}(3+2\sqrt{3})$ (D) $\frac{2\pi}{9}(3+2\sqrt{3})$
14. 將 1 至 9 的整數分為三組，每組三個數，考慮各分組中的數字和，有多少種分組方式使得這三個分組的數字和形成一個公差是 3 的等差數列？
 (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16

15. 在右圖中的蜂巢中，第一列的數字只有 1，第二列的數字是 2, 1，第三列的數字是 2, 3, 1，而自第三列開始，一個巢格中的數字是其上一列與它相鄰的巢格的數字和。第二十列的數字和與下面那一個選項最接近。
 (A) 10^4 (B) 10^5 (C) 10^6 (D) 10^7

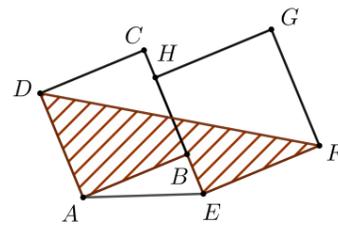


16. 正整數數列 a_1, a_2, \dots, a_n 滿足：對所有大於 1 的整數 k ，若 a_{k-1} 為偶數，則 $a_k = \frac{a_{k-1}}{2}$ ；若 a_{k-1} 為奇數，則

$$a_k = \frac{a_{k-1} + 1}{2}。若已知 $a_1 = 2^{50} \cdot 1137$ ，且 $a_m = 1$ ，求 m 的最小值。$$

- (A) 32 (B) 42 (C) 52 (D) 62
17. 求所有小於或等於 2020 且與 2020 互質的正整數的和。
 (A) 808000 (B) 808080 (C) 404040 (D) 404000
18. 對於任何正數 x ， $[x]$ 表小於或等於 x 的最大整數。例如： $[3.14] = 3$ ， $[2.71] = 2$ 。已知方程式 $[x[x]] = 109$ 的解是 $a \leq x < b$ ，則 $b - a$ 的值為何？
 (A) 0 (B) 0.1 (C) 0.5 (D) 1

19. 右圖中的正方形 $ABCD$, $EFGH$ 的邊長分別是 4, 5. 已知 $\overline{AE} = 5$. 則斜線區域的面積是多少?
 (A) 19.5 (B) 20 (C) 28 (D) 31.5



20. 整數數列 a_1, a_2, \dots, a_{10} 滿足 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10} \leq 5$. 將數列的第四項 a_4 、第七項 a_7 及此數列的平均數依序寫出，下列選項何者不可能是寫出的這三個數?
 (A) 3, 4, 3.8 (B) 2, 3, 3.2 (C) 2, 4, 3.5 (D) 2, 4, 3.6

21. 三個數 a, b, c 滿足 $ac > 0$, $bc < 0$, $a + b > 0$, $b^2 - c^2 > 0$, $a^2 - c^2 < 0$, 下列何者正確?
 (A) $-b < a < c$ (B) $-c < -a < b$ (C) $a < -b < c$ (D) $c < -a < b$

22. 數列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \dots$ 中的各項均形如 $\frac{y}{x}$, 其中 $x \geq 2y$, 求此數列的第 2020 項。
 (A) $\frac{31}{63}$ (B) $\frac{40}{90}$ (C) $\frac{251}{1010}$ (D) $\frac{1010}{2020}$