

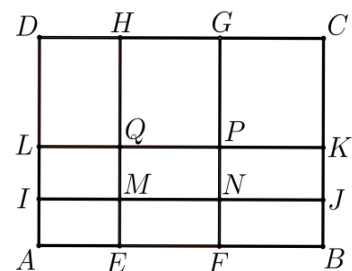
臺南市 2020 年公私立國民中學暨完全中學數學競賽決賽試題

注意事項：

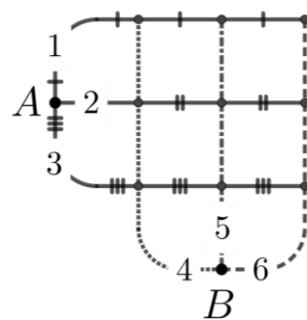
- 1、本試卷試題總計兩大類；第一類為填充題，共8題，每題7分，共56分；第二類為計算及證明題，共4大題，共44分。
- 2、請將答案依題號填入答案卷中；填充題只須填入最終答案，計算證明題則須詳列計算或證明過程。
- 3、試題所提供圖形僅供參考；如有根式請化為最簡根式，如有分數請化為最簡分數，否則不予計分。
- 4、請以藍筆或黑筆作答，鉛筆作答不予計分。
- 5、試題及答案卷的背面可當計算紙使用。

一、填充題

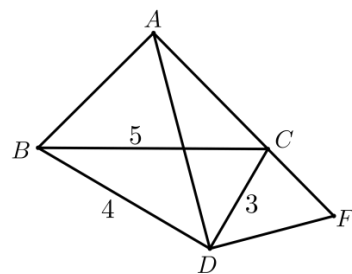
1. 右圖中的四邊形皆是長方形，且四邊形 $LQHD$ 與 $EFPQ$ 的面積相等，四邊形 $IMHD$ 與 $EBJM$ 的面積相等，若 $\overline{AF}:\overline{AB}=3:5$ ，求 $\overline{QM}:\overline{ME}$ 。
2. 設 m, n 為正整數滿足 $m \leq 2020$ 且 $k = 3 - \frac{m}{n} > 0$ 。則有一組 m, n 使得 k 是最接近 0，這一組 m, n 的和是多少？



3. 右圖是某城的捷運路線圖，六條捷運線是以 1 至 6 的數字編號，而其路線則以不同形式及裝飾的線標示。兩條捷運線的交會點是轉運站，可從一線轉乘至另一線。大明從 A 站乘車至 B 站，其間每一條捷運線最多搭乘一次，不會回到 A 站，到達 B 站就出站。求所有可能的搭乘方法的總數。
4. 兩個等差數列，一個的首項是 13、公差是 6，另一個的首項是 7、公差是 10。將所有在這兩個數列裏的整數，不重複由小到大重新排列得一個新的數列 7, 13, 17, 19, 25, 27, 31, 37, 43, 47, 49, ... 求這個數列的第 2020 項。



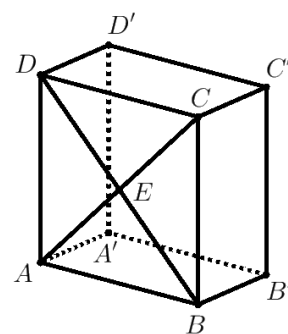
5. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BC} = 5$ ，在 \overline{BC} 邊的外側作 $\triangle BCD$ 使得 $\overline{CD} = 3$ ， $\overline{BD} = 4$ 。過 D 且與 \overline{AD} 垂直的垂線交 \overline{AC} 於 F 。求 \overline{AF} 的值。



6. 若 (x, y) 為坐標平面上的一個點，且 x, y 均為整數，則我們稱 (x, y) 為一個格子點。將坐標平面上第一象限的所有格子點，依如下順序排列
 $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (1,5), (2,4), \dots$
 求第 2020 個點的坐標。

7. 設 n 為正整數， $n \leq 1000$ ，滿足 $100^n + 101^n + 102^n + 103^n$ 除以 7 餘 5 的 n 共有幾個？

8. 如右圖，長方體 $ABCD-A'B'C'D'$ 中， E 為 \overline{AC} 與 \overline{BD} 的交點， $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$ ， $\overline{AA'} = \sqrt{3} - 1$ 。一隻螞蟻從 E 點出發，在長方體上行走，若此螞蟻最多只能走到距離 E 點 2 單位長的位置，求螞蟻可能到達的區域面積。



二、計算證明題

1. (10分) 從 120 至 129 這十個整數中不重複選取六個數字，證明所選取的六個整數中必有兩個數互質。
2. (10分) 如右圖， X, Y, Z 分別是正方形 $ABCD, BEFG, GHJC$ 的中心。證明 $\overline{BZ} \perp \overline{XY}$ 。
3. (12分) 設 n 是正整數且 $2n^2 + 3n - 44 = 3p^2$ ，其中 p 是質數。求所有可能的 n 的值。
4. (12分) 設 a 是正數且滿足方程 $||2x+a|+x-a|=5$ 恰有三個解，求 a 的值。

