

110 年度縣市學生學習能力檢測

數學六年級施測結果報告

國立臺中教育大學

測驗統計與適性學習研究中心

中華民國 111 年 02 月

目錄

壹、背景與目的	1
一、背景	1
二、目的	1
貳、參與縣市與檢測規模	2
參、檢測對象與檢測工具	3
一、檢測對象	3
二、檢測工具	4
肆、試題分析與教學建議	7
伍、整體學力表現分析	76
一、不同背景變項學生整體學力表現分析	76
二、國民小學六年級學生於不同能力指標之答對率	79
陸、整體教學建議	82
一、學生整體表現	82
二、對學習待加強學生的觀察	83
柒、附錄	99

壹、背景與目的

一、背景

測驗與評量是教育歷程中十分重要的一環，透過學力檢測可協助師生瞭解學生之學習成效與升學進路，及早發現待加強學生並啟動積極性教學介入，教育當局亦能評估施行的相關政策，透過調節教育資源來強化發展教學成效。107 年開始，桃園市等五縣市以委託形式，由國立臺中教育大學測驗統計與適性學習研究中心協助辦理縣市學生學習能力檢測試題研發暨資料分析工作，108 年起，改以中心自辦學力檢測研發，各縣市依需求參與形式運作，110 年度有基隆市、新北市、桃園市、新竹縣、新竹市、雲林縣、嘉義縣、嘉義市、臺南市、屏東縣、花蓮縣、澎湖縣以及金門縣等十三縣市共同參與，檢測對象為國民中小學一年級至八年級學生，檢測科目包含國語文、數學、英語文和自然。此份報告係根據檢測分析結果撰寫，現場教師可據以瞭解學生於各評量向度之表現情形，進而對學生進行適性適才之教學；教育決策者亦可更精準的將相關資源挹注於需求性相對較高的教育現場，讓教育和教學有效的朝「把每一個孩子帶上來」的方向前進。

二、目的

- (一) 測驗專責單位統一研發試題，降低各縣市命題壓力和研發成本。
- (二) 國民小學及國民中學學生學習能力檢測分析結果，協助教師瞭解學生學習概況以及科目內有待加強之內容向度。
- (三) 不同背景變項國民小學及國民中學學生學習能力表現之差異分析，可做為學校輔導或教育政策研擬之參考。

貳、參與縣市與檢測規模

本年度縣市學生學習能力檢測於 110 年 9 月 14 日進行，數學六年級施測人數為 34,322 人。各縣市在數學六年級之詳細參與情形如下表 2-1 所示：

表 2-1 110 年度國民小學學生學習能力檢測數學六年級縣市參與情形

參與縣市	報名學生人數	到考人數
桃園市	20,078	19,811
臺南市	11,626	11,445
花蓮縣	2,566	2,447
金門縣	628	619
總計	34,898	34,322

參、檢測對象與檢測工具

一、檢測對象

110 年參與國立臺中教育大學所承辦「國民小學數學六年級學習能力檢測」者為桃園市、臺南市、花蓮縣及金門縣等四縣市之國民小學六年級學生（未排除資源班及特殊生），應考名冊羅列 34,898 人、實際施測人數 34,322 人，其中男生 17,672 人、女生 16,625 人、未填寫性別 25 人，整體缺考率約為 1.6%。

根據教育部統計處資料顯示，109 學年我國國民小學畢業生人數為 191,419 人，參與本次學力檢測計 34,322 人，約佔全國國民小學畢業生人數之 17.9%(註)。參照傅仰止、蘇國賢、吳齊殷、廖培珊、謝淑惠(2018)對臺灣鄉鎮市區類型研究之分類，由於該計畫未包含金門縣和連江縣，本中心參考傅仰止等人(2018)研究的因子及縣市地區的人口結構，將金門縣鄉鎮市區類型分類。本次參與數學六年級學生學力檢測共 34,322 人，排除資料缺漏者 371 人，總計背景變項分析有效樣本為 33,951 人，其中隸屬都會核心者(人口密度、專科以上教育、青壯年人口及服務業百分比最高)2,156 人、工商市區(僅次於都會核心之商業高度發展地區)9,469 人、新興市鎮(同時具有活絡的工業生產活動以及商業服務和相關工作能力)14,471 人、傳統產業市鎮(就業人口供給較低、老年居民較多，僅能固守既有的傳統產業)2,474 人、低度發展鄉鎮(就業人口及教育程度低，老年人口偏多，無明顯工商業活動與發展)3,411 人、高齡化鄉鎮(工商服務相關屬性最低，較低人口密度與教育程度)964 人、偏遠鄉鎮(低度工商業發展，存有最低層教育程度及人數稀少的居民)1,006 人。

註：因本年度學力檢測受疫情影響延後一學期施測，六年級畢業生有學校轉換之情況，為呈現更準確的資訊，不同鄉鎮市區類型分布從原本的學校數量改以人數呈現。

二、檢測工具

「國民小學數學六年級學習能力檢測」(以下簡稱學力檢測)是由國立臺南大學教育系教授邀集臺南市現職國民小學教師組成命題團隊,一同編製、檢視而成。本次學力檢測試題包括「評量指標-知識向度」與「評量指標-認知向度」等兩個向度。其中,評量指標-知識向度包含數與計算、量與實測、幾何以及代數等四個向度;評量指標-認知向度包含概念理解、程序執行與解題思考等三個向度。學力檢測施測之正式題本總題數為 25 題,試題評量架構與試題各面向之題數分布如下表 3-1 所示。

表 3-1 數學領域六年級正式題本評量指標架構與試題之題數分布

知識向度 \ 認知向度	概念理解	程序執行	解題思考
數與計算	5	6	5
量與實測	2	0	1
幾何	2	1	1
代數	0	1	1

(一) 評量架構

命題團隊為顧及試題分布之均衡性，依概念理解、程序執行與解題思考等三個評量指標-認知向度；數與計算、量與實測、幾何以及代數等四個評量指標-知識向度，二個面向進行測驗試題之設計。「**數與計算**」包括質數與合數概念及運用短除法做質因數分解求最大公因數與最小公倍數、最簡分數、生活中的分數除法計算問題、在具體情境中取整數及小數的概數，並做四則運算估算、生活情境中比與比值及正比問題；「**量與實測**」包括速度、圓面積與圓周長公式、扇形面積、直柱體體積；「**幾何**」包括利用幾何形體性質解決簡單幾何問題、平面圖形放大縮小與比例尺、正方體與長方體面與面及線與面的平行與垂直關係；「**代數**」包括將具體情境問題列成含有未知數符號的分數算式並求解及驗算、利用數量關係列算式與解題，並檢驗解的合理性。詳細試題內容於各評量指標之分布題數如下表 3-2 所示：

表 3-2 數學領域六年級施測正式題本於評量指標之題數分析

向度		能力指標	題數	題號
數與計算	概念理解	6-n-01、6-n-02、6-n-03、 6-n-11	5	2、3、5、9、16
	程序執行	6-n-04、6-n-06、6-n-07、 10、6-n-12	6	4、11、15、18、 23、24
	解題思考	6-n-03、6-n-05、6-n-09、 6-n-12	5	6、14、17、21、 22
量與實測	概念理解	6-n-14、6-n-15	2	7、12
	解題思考	6-n-08	1	8
幾何	概念理解	6-s-02、6-s-04	2	1、20
	程序執行	6-s-03	1	10
	解題思考	6-s-02	1	25
代數	程序執行	6-a-01	1	19
	解題思考	6-a-04	1	13

(二) 預試

國民小學數學六年級學習能力檢測於 110 年 3 月 2 日至 110 年 3 月 19 日間進行預試，預試樣本為雲林縣、屏東縣及金門縣之國民中學七年級學生共 1,376 人。預試資料回收後先進行初步資料整理，後進行選答率、鑑別度以及通過率分析。分析後召開試題修審會議，符合(1)正確選項之選答率低於錯誤選項之選答率；(2)鑑別度低於 0.15；(3)錯誤選項之選答率過低三標準任一項的試題，由命審題委員提出討論並視需要進行修正。

肆、試題分析與教學建議

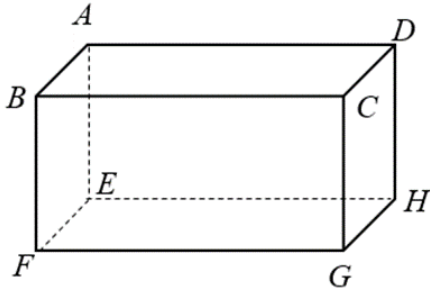
本報告先分析「110年國民小學數學六年級學生學習能力檢測」結果，再針對各試題提供相關建議。

整份試卷未作答、連續五題或五題以上未作答和答對率低於0.25，且作答反應中有疑似亂答者為無效樣本，予以刪除，最終納入分析之有效樣本數為34,196人，其中各科試題分析結果呈現時所涉及的名詞分別定義如下表4-1：

表 4-1 試題分析名詞解釋

高分組	參與測驗有效樣本總分排名前 27%之學生。
低分組	參與測驗有效樣本總分排名後 27%之學生。
選答率	參與測驗有效樣本於此試題選答各選項之比率。
通過率	參與測驗有效樣本之試題答對率。
鑑別度	高分組試題答對率與與低分組試題答對率之差。

試題代碼：本次學力檢測試題分析報告中，每道數學題幹均配有一組試題代碼「110-Mn₁-□n₂-n₃」。其中，M表示「數學科」；n₁表示「n₁年級」；□表示「知識向度」（A：數與計算；B：量與實測；C：幾何；D：代數）；n₂表示「認知向度」（1：概念理解；2：程序執行；3：解題思考）；n₃表示「題號」（01表示第1題）。

題號	試題代碼					答案	
1	110-M6-C1-01					2	
評量指標	6-s-04 能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。						
知識向度	幾何		認知向度		概念理解		
題目	<p>下圖為一個長方體，請問下列哪個邊沒有和面 EFGH 垂直？</p>  <p>① \overline{AE}</p> <p>② \overline{BC}</p> <p>③ \overline{CG}</p> <p>④ \overline{DH}</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：91%
	全 體	0.04	0.91	0.03	0.02	0.00	
	高分組	0.00	0.99	0.01	0.00	0.00	鑑別度：0.25
	低分組	0.11	0.74	0.09	0.06	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定長方體的透視圖和一個面，要求學生選出沒有和該面垂直的邊，評量學生正確描述長方體中線與面垂直關係的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.25，正確答案為選項②，通過率為 91%，顯示超過九成的學生已經認識長方體中線與面的垂直關係。
2. 有 4% 的學生選擇選項①(低分組有 11%)，3% 的學生選擇選項③(低分組有 9%)，2% 的學生選擇選項④(低分組有 6%)，這些學生可能不具備正確描述長方體中線與面垂直關係的能力；也可能誤解題意，選擇符合線與面垂直關係的選項。

二、對應能力指標（97 課綱分年細目）

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。	6-s-04 能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。	9-s-13 能認識線與平面、平面與平面的垂直關係與平行關係。

三、教學建議

（一）錯誤類型的可能原因

1. 因為學生較能掌握面與面的平行或垂直關係，較不容易掌握面與線的垂直關係，因此 108 課綱將面與線垂直關係的教材移至國中。
2. 學生可能混淆線與線的垂直關係和面與面的垂直關係。
3. 學生可能不理解透視圖所代表的意義。

（二）核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師多舉一些日常生活中面與面互相平行的例子，例如天花板和地板、桌面的隔板等；以及面與面互相垂直的例子，例如牆壁和地板、桌面和側面板等，幫助學生認識面和面的垂直及平行的現象。
2. 面會向四面八方無限的延伸，而長方體的面是封閉的多邊形區域。在檢驗長方體底面和側面是否互相垂直時，常將長方體底面平放在桌面上來檢驗，當底面在桌面上時，無法檢驗底面和側面是否互相垂直，只能檢驗桌面和側面是否互相垂直，許多學生無法掌握長方體的底面與桌面之間的包含關係，不知道長方體的側面和桌面互相垂直時，長方體的側面也和底面互相垂直。
建議教師製作上底和下底是空的，而側面都存在的長方體燈籠骨架模型，將下底平放在桌面上，幫助學生察覺：燈籠骨架模型的底面都在桌面上，底面和桌面都是同一個平面，底面和桌面重合。
3. 針對本題建議教學步驟如下：
步驟一：建議教師先製作上底和下底是空的，而側面都存在的長方體燈籠骨架模型，將下底平放在桌面上，幫助學生察覺：燈籠骨架模型的底面都在桌面上，底面和桌面都是同一個平面，底面和桌面重合；燈籠骨架模型側面的邊和桌面互相垂直時，側面的邊和底面也會互相垂直。
步驟二：接著透過上底是空的長方體，從外部和內部觀察線與面的垂直關係。
步驟三：承(步驟二)依序就三組不同的面分別進行探討，幫助學生察覺每個長方體的面分別有 4 條邊與其垂直。
步驟四：最後，除了實物之外，建議教師還要再幫學生建立立體透視圖與實體長方體之間的連結，以利學生能透過平面的立體透視圖來理解長方體中線與面的垂直關係。

題號	試題代碼				答案		
2	110-M6-A1-02				3		
評量指標	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	姐姐與妹妹到文具店選購了相同的原子筆若干枝，姐姐付了 48 元，妹妹付了 84 元。請問下列何者 <u>不可能</u> 是一枝原子筆的售價？ ① 4 元 ② 6 元 ③ 8 元 ④ 12 元						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：80%
	全 體	0.09	0.04	0.80	0.07	0.00	
	高分組	0.00	0.01	0.98	0.01	0.00	鑑別度：0.46
	低分組	0.23	0.10	0.51	0.15	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題是公因數情境的文字題，要求學生選出不是公因數的答案，評量學生利用求兩數公因數解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.46，正確答案為選項③，通過率為 80%，顯示八成的學生已具備利用求兩數公因數解題的能力。
2. 有 9% 的學生選擇選項①(低分組有 23%)、7% 的學生選擇選項④(低分組有 15%)、4% 的學生選擇選項②(低分組有 10%)，這些學生可能不具備利用求兩數公因數解題的能力；也可能誤解題意，誤選是兩數公因數的答案。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-04 能理解因數和倍數。 5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。	7-n-02 能理解因數、質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生面對情境問題時，無法判斷該利用公因數或利用公倍數的關係來解題。
2. 學生沒有透過判斷選項的答案是否合理的策略解題的習慣。
3. 學生可能誤解題意，忽略了本題是要求何者「不可能」，選出可能是一枝原子筆

售價的答案。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 學生面對利用最大公因數或最小公倍數性質解題的文字題時，常不知道該用哪一種性質來解題。教師不宜要求學生記憶題型，看到題目就直接作答，應幫助學生養成利用嘗試錯誤解題的能力。

例如解「長方形紙長 96 公分，寬 54 公分，哥哥要裁成一樣的正方形，此正方形最大的邊長是幾公分？」時，先假設正方形的邊長是 1 公分，發現滿足題意，再假設正方形的邊長是 2 公分，發現也滿足題意，就知道必須利用最大公因數的性質來解題。

例如解「弟弟想用長 4 公分、寬 6 公分的長方形色紙，排成正方形，最少需要幾張色紙？」時，先假設正方形的邊長都是 1 公分，發現不滿足題意，再假設正方形的邊長都是 24 公分，發現滿足題意，就知道必須利用最小公倍數的性質來解題。

2. 教師也可以提醒學生，1 是兩數的最小公因數，如果 1 滿足題意，就是求公因數的問題，如果 1 不滿足題意，就是求公倍數的問題。

3. 以「找出 18 和 24 的最大公因數」為例，說明如何利用質因數分解法求兩數的最大公因數。

步驟一：先將 18 及 24 進行質因數分解： $18=2\times 3\times 3$ ； $24=2\times 2\times 2\times 3$

步驟二：教師提供 18 和 24 的所有因數(以質因數分解算式呈現)。

18 的因數：1、2、3、 2×3 、 3×3 、 $2\times 3\times 3$

24 的因數：1、2、3、 2×2 、 2×3 、 $2\times 2\times 2$ 、 $2\times 2\times 3$ 、 $2\times 2\times 2\times 3$

步驟三：幫助學生找出公因數 1、2、3、 2×3 ，以及最大公因數 2×3 。

步驟四：要求學生觀察最大公因數 2×3 ，和 18 及 24 質因數分解的算式：

$$18= \boxed{2\times 3}\times 3$$

$$24=2\times 2\times \boxed{2\times 3}$$

幫助學生理解最大公因數 2×3 是 18 和 24 共同質因數的乘積。

步驟五：給定 18 及 24 質因數分解的算式，要求學生直接找出 18 及 24 的最大公因數。

4. 以「找出 18 和 24 的最大公因數」為例，說明如何利用短除法求兩數的最大公因數。

步驟一：複習質因數分解法求兩數的最大公因數，18 和 24 的最大公因數 2×3 是共同質因數的乘積。

步驟二：
$$\begin{array}{r} 2 \overline{)18 \quad 24} \\ \underline{9 \quad 12} \end{array}$$

2 是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 2，

得到 $18=2\times 9$ ， $24=2\times 12$ 。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline 3 & 9 & 12 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

步驟三：

3 也是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 3，
 得到 $18=(2\times 3)\times 3$ ， $24=(2\times 3)\times 4$ 。


步驟四：3 和 4 互質，沒有共同的質因數。

步驟五：共同質因數的乘積是 2×3 ， 2×3 是 18 和 24 的最大公因數。

5. 教師亦應幫助學生理解公因數是最大公因數的因數，公倍數是最小公倍數的倍數。

利用短除法解題時，只能求出最大公因數，無法求出所有的公因數。

利用短除法解題時，只能求出最小公倍數，無法求出其它的公倍數。

題號	試題代碼			答案			
3	110-M6-A1-03			4			
評量指標	6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。						
知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
題目	<p>「50 公里/小時」的記法表示「每 1 小時走 50 公里」。</p> <p>小淇在超市看到一盒雞腿肉的標籤上寫著「90 元/100g」。</p> <p>下列關於「90 元/100g」的說法何者正確？</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>① 這盒雞腿肉定價 90 元 ② 這盒雞腿肉重 100g ③ 這盒雞腿肉每 1 公克賣 90 元，整盒共重 100g ④ 這盒雞腿肉每 100 公克賣 90 元</p>						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：88%
	全 體	0.03	0.03	0.06	0.88	0.00	
	高分組	0.00	0.01	0.01	0.98	0.00	鑑別度：0.28
	低分組	0.08	0.08	0.15	0.70	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題先說明速率導出量單位記法的意義，再給定印有導出量單位的標籤，要求學生選出正確描述標籤意義的敘述，評量學生是否理解導出量單位記法的意義。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.28，正確答案為選項④，通過率為 88%，顯示近九成的學生已理解導出量單位記法的意義。
2. 有 3% 的學生選擇選項①(低分組有 8%)，3% 的學生選擇選項②(低分組有 8%)，6% 的學生選擇選項③(低分組有 15%)，這些學生可能不理解導出量單位記法的意義。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。	6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因


- 1.低分組有 8%的學生選擇選項①；低分組有 8%的學生選擇選項②，高分組有 1%的學生選擇選項②，這些學生可能習慣於日常生活中單一單位的標示，也認為標籤上所標示的即是最後的總重或是總金額而非兩量之間關係的描述。
- 2.低分組有 15%的學生選擇選項③，高分組有 1%的學生選擇選項③，這些學生則是習慣於兩量的描述僅止於每 1 單位量的表述方式，所以認為 90 元/100g 是每 1 公克 90 元，整盒重 100g。
- 3.本題的通過率是 88%(高分組有 98%，低分組有 70%)，顯示多數學生理解生活中常用導出單位記法的意義，建議教師在進行不同單位比或比值的教學(例如交換問題或密度問題)時，應幫助學生使用導出單位的記法來記錄。

例如：3 個蘋果賣 50 元可以記成 50 元/3 個

5 公尺長的鐵絲重 17 公斤可以記成 17 公斤/5 公尺或 5 公尺/17 公斤

(二) 核心概念與本題的教學重點

- 1.不同單位比的問題包含交換問題和密度問題：
交換問題 \Rightarrow 60 元可以買 3 個水蜜桃，幾元可以買 1 個水蜜桃？
教師可以幫助學生將 60 元可以買 3 個水蜜桃記成 60 元/3 個，
將 20 元可以買 1 個水蜜桃記成 20 元/個。
密度問題 \Rightarrow 10 公尺長的鐵絲重 5 公斤，1 公尺長的鐵絲重幾公斤？
1 公斤重的鐵絲長幾公尺？
教師可以幫助學生將 10 公尺長的鐵絲重 5 公斤記成 10 公尺/5 公斤，
將 5 公斤重的鐵絲長 10 公尺記成 5 公斤/10 公尺，
將 1 公尺長的鐵絲重 0.5 公斤記成 0.5 公斤/公尺，
將 1 公斤重的鐵絲長 2 公尺記成。
- 2.回到原問題，幫助學生理解 90 元/100g 代表的是每 100 公克賣 90 元，也可以說 200 公克賣 180 元...等。
- 3.建議教師可以連結速率的記法，幫助學生更進一步理解導出單位是一種比值，也是兩量之間關係的一種描述方式。

題號	試題代碼				答案		
4	110-M6-A2-04				2		
評量指標	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。						
知識向度	數與計算	認知向度		程序執行			
題目	<p>如圖，大賣場內有三種廠牌的洗衣精，各廠牌的容量和價格如下所示，請問哪一種廠牌每公升的售價最便宜？</p>  <p>甲廠牌：1.8公升賣432元 乙廠牌：0.9公升賣180元 丙廠牌：0.8公升賣216元</p> <p>① 甲 ② 乙 ③ 丙 ④ 一樣便宜</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：83%
	全 體	0.07	0.83	0.06	0.04	0.00	
	高分組	0.02	0.96	0.02	0.00	0.00	鑑別度：0.32
	低分組	0.15	0.64	0.11	0.10	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定三種不同公升容量的價格，要求學生選出每公升最低的售價，評量學生利用小數除法直式計算解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.32，正確答案為選項②，通過率為 83%，顯示超過八成的學生已具備利用小數除法直式計算解題的能力。

2. 有 7% 的學生選擇選項①(低分組有 15%)、6% 的學生選擇選項③(低分組有 11%)、4% 的學生選擇選項④(低分組有 10%)，這些學生可能尚未具備利用小數除法直式計算解題的能力；也可能在計算時發生錯誤。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。	6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

學生可能不理解「哪一個廠牌每公升的售價最便宜？」的意義。

教師應先問「哪一個廠牌 1 公升的售價最便宜？」，再問「哪一個廠牌每公升的

售價最便宜？」。

前者是特例的問法，後者是集合的問法，學生不易理解集合的問法。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 小數除以小數的除法，是透過將被除數和除數同時換單位的策略解題，但難度較高，建議先從整數換單位的除法解題策略切入，待學童熟練後再解決小數除以小數的除法問題。

2. 以整數情境為例，說明「被除數和除數同時換單位」解題策略的意義。

(1) 14 張 1000 元鈔票，每人分 3 張 1000 元鈔票，最多可以分給幾人，剩下幾張 1000 元鈔票？也就是剩下多少元？」。

教師幫助學生透過 $14(\text{張}) \div 3(\text{張}) = 4(\text{人}) \dots 2(\text{張})$ ，得到最多可以分給 4 個人，剩下 2 張 1000 元鈔票，也就是剩下 2000 元的答案。

(2) 「14000 元，每人分 3000 元，最多可以分給幾人，剩下幾元？」。

教師幫助學生將被除數 14000 元及除數 3000 元，同時以 1000 元為單位來換單位，14000 元換成 14 張千元鈔票，3000 元換成 3 張千元鈔票，再透過 $14(\text{張}) \div 3(\text{張}) = 4(\text{人}) \dots 2(\text{張})$

得到最多可以分給 4 個人，剩下 2 張 1000 元鈔票，也就是剩下 2000 元的答案。

3. 以小數除以小數，商數是整數且有餘數的包含除問題「36.2 公升果汁，1.4 公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」為例，說明如何透過「被除數和除數同時以 0.1 公升換單位」的策略幫助學生解題。

教師幫助學生將被除數 36.2 公升及除數 1.4 公升，同時以 0.1 公升為單位來換單位，36.2 公升轉換成 362 個 0.1 公升，1.4 公升換成 14 個 0.1 公升，再透過 $362 \div 14 = 25 \dots 12$ ，得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 12 個 0.1 公升，也就是剩下 1.2 公升的答案。

如果學生無法掌握以 0.1 公升為單位的意義，教師可以透過命名 0.1 公升為 1 罐的方式，將被除數 36.2 公升及除數 1.4 公升，轉換成 362 罐和 14 罐，再透過 $362 \div 14 = 25 \dots 12$ ，得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 12 罐，也就是剩下 1.2 公升的答案。

4. 當商數較小時，例如商數是一位數字時，教師也可以幫助學生利用先乘後減的策略解題。

例如：41.57 公升果汁，11.4 公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？

利用先乘後減「 $11.4 \times 3 = 34.2$ ， $41.57 - 34.2 = 7.37$ ，答：最多裝滿 3 瓶，剩下 7.37 公升」來解題，不但學生較易理解其意義，而且也有效率。

題號	試題代碼					答案	
5	110-M6-A1-05					4	
評量指標	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	<p>下圖是小恩將兩數用短除法求最大公因數的計算過程，最大公因數是$A \times C$。請問哪個選項的兩數互質？</p> $ \begin{array}{r} A \overline{) 42 \quad B} \\ \underline{C \overline{) D \quad 15}} \\ \quad 7 \quad E \end{array} $ <p>① 42 和 B ② C 和 15 ③ D 和 15 ④ 7 和 E</p>						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：62%
	全 體	0.14	0.11	0.12	0.62	0.00	
	高分組	0.04	0.03	0.03	0.90	0.00	鑑別度：0.57
	低分組	0.23	0.18	0.25	0.33	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定用短除法求兩數最大公因數，其中含有未知數符號的計算過程，要求學生選出互質的兩個數，評量學生是否理解短除法求兩數的最大公因數及兩數互質的意義。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.57，正確答案為選項④，通過率為 62%，顯示超過六成的學生已理解短除法求兩數的最大公因數及兩數互質的意義。
2. 有 14% 的學生選擇選項①(低分組有 23%)，這些學生可能不理解短除法求兩數的最大公因數的意義；也可能混淆兩數最大公因數和兩數互質的意義。
3. 有 11% 的學生選擇選項②(低分組有 18%)，這些學生可能不理解短除法求兩數的最大公因數和兩數互質的意義；也可能不知道 C 是 15 的因數，誤認為 C 和 15 互質。
4. 有 12% 的學生選擇選項③(低分組有 25%)，這些學生可能不理解短除法求兩數的最大公因數和兩數互質的意義；也可能誤認為 42 和 B 提出公因數 A 後，得到的兩數 D 和 15 一定互質。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	<p>5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。</p> <p>6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解。(質數<20，質因數<20，被分解數<100)。</p>	<p>6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。</p>	<p>N-7-2 質因數分解的標準分解式；質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。</p>

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生只是程序性的利用短除法求兩數的最大公因數，但是不知道短除法運算的意義。不知道利用短除法求兩數最大公因數或最小公倍數時，兩數互質，也就是兩數沒有共同的質因數，是判斷短除法運算停止的條件。
2. 學生混淆兩數最大公因數和兩數互質的意義。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師以已知的兩數進行質因數分解求兩數最大公因數，以及短除法求最大公因數，再連結短除法的各個步驟與質因數分解求最大公因數的意義，以幫助學生探討並釐清短除法各步驟所代表的意涵。
2. 學生必須先知道「最大公因數是這兩數共同質因數的乘積；最小公倍數是這兩數質因數分解算式的乘積，但共同質因數只乘一次」，以及理解「兩數互質」的意義，才能開始學習利用短除法求兩數的最大公因數及最小公倍數。
3. 建議教師先幫助學生從 $36=2\times 2\times 3\times 3$ 和 $48=2\times 2\times 2\times 2\times 3$ 兩數的質因數分解中，找出最大公因數，再連結短除法的格式，幫助學生發現短除法計算過程中提出共同質因數的意義，並發現兩數互質時，最大公因數「 $2\times 2\times 3$ 」就是共同質因數的乘積。提醒教師要幫助學生發現「兩數互質」是判斷短除法運算結果的依據。

$$2 \begin{array}{l} \underline{36 \quad 48} \\ \end{array} \Rightarrow 2 \text{ 是共同的質因數}$$

$$2 \begin{array}{l} \underline{18 \quad 24} \\ \end{array} \Rightarrow 2 \text{ 是共同的質因數}$$

$$3 \begin{array}{l} \underline{9 \quad 12} \\ \end{array} \Rightarrow 3 \text{ 是共同的質因數}$$

$$3 \quad 4 \Rightarrow (3, 4)=1, \text{ 互質表示沒有其它共同的質因數}$$

$$(36, 48)=\underline{2\times 2\times 3}(\text{共同質因數的乘積})$$

回到原題目，幫助學生連結含未知數的短除法計算過程，發現運算的最後結果是要進行到兩數已經沒有共同質因數可以提出才能停止。

題號	試題代碼				答案		
6	110-M6-A3-06				4		
評量指標	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。						
知識向度	數與計算		認知向度		解題思考		
題目	<p>將鹽滷加入豆漿後可製作出美味的豆花，而且以「豆漿：鹽滷=100:1」的比例做出來的豆花軟硬度最剛好。</p> <p>小英想按照這個比例製作豆花，第一次製作時，在 600 ml 的豆漿中加入了 3 ml 的鹽滷，結果製作出來的豆花太稀，如果多加一些鹽滷，會讓製作出來的豆花變硬。</p> <p>小英希望能夠成功製作出軟硬度剛好的豆花，下列哪個建議是正確的？</p> <p>① 第一次加的鹽滷太多了，應該加入 1 ml 的鹽滷就好</p> <p>② 第一次用的豆漿太多了，應該用 100 ml 的豆漿就好</p> <p>③ 用 600 ml 的豆漿製作豆花應加入 1 ml 的鹽滷</p> <p>④ 用 300 ml 的豆漿製作豆花應加入 3 ml 的鹽滷</p>						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：78%
	全 體	0.05	0.09	0.08	0.78	0.00	
	高分組	0.00	0.01	0.00	0.98	0.00	鑑別度：0.53
	低分組	0.13	0.21	0.20	0.46	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題提供描述鹽滷加入豆漿製作豆花的文字描述，要求學生選出能正確製作出軟硬度剛好豆花的敘述，評量學生利用比或比值解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.53，正確答案為選項④，通過率為 78%，顯示近八成的學生已具備利用比或比值解題的能力。
2. 有 9% 的學生選擇選項②(低分組有 21%)、8% 的學生選擇選項③(低分組有 20%)、5% 的學生選擇選項①(低分組有 13%)，這些學生可能尚未具備利用比或比值解題的能力；也可能不理解題意；也可能因為題目太長，不願意閱讀而隨意猜測。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。	6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

最簡單整數比是集合的概念，學生將最簡單整數比解讀為特例。

集合的意義：「豆漿：鹽滷=100:1」是最簡單整數比，指的是豆漿 100 份時，鹽滷有 1 份，其中的 1 份可以是任意的量。

特例的意義：「豆漿：鹽滷=100:1」是特例，指的是豆漿有 100 毫升，鹽滷有 1 毫升。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 以「3 枝鉛筆賣 5 元，9 枝鉛筆賣幾元？」為例，提出四種解題策略，教師可以提供學生這四種解題策略的經驗，但不宜限制學生使用某種解題策略來解題。

(1) 單價法：先利用除法「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」算出 1 枝鉛筆的單價是 $\frac{5}{3}$ 元，再利用乘法

$$\left[\frac{5}{3} \times 9 = \frac{45}{3} = 15 \right] \text{ 算出 9 枝鉛筆賣 15 元的答案。}$$

(2) 倍數法：先用除法「 $9 \div 3 = 3$ 」算出 9 枝鉛筆是 3 枝鉛筆的 3 倍，再用乘法「 $5 \times 3 = 15$ 」算出 5 元的 3 倍是 15 元，也就是 9 枝鉛筆賣 15 元的答案。

(3) 比的加法：

$$\begin{array}{r} 3 \text{ 枝} : 5 \text{ 元} \\ 3 \text{ 枝} : 5 \text{ 元} \\ \hline 3 \text{ 枝} : 5 \text{ 元} \end{array}$$

合起來：9 枝：15 元

(4) 關係式：教師也可以先用比的算式「 $3 : 5 = 9 : \square$ 」記錄問題，再將比的算式由左右併置的記法，改記成上下併置的關係式記法，關係式的記法較容易說明單價法或倍數法解題的意義。

$$\text{單價法：} (5 \div 3) = \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \times 9 = 15$$

$$\begin{array}{ccc} 3 \text{ 枝} & \longleftrightarrow & 5 \text{ 元} \\ \div 3 \quad \downarrow & & \downarrow \quad \div 3 \\ 1 \text{ 枝} & \longleftrightarrow & ? \text{ 元} \\ \times 9 \quad \downarrow & & \downarrow \quad \times 9 \\ 9 \text{ 枝} & \longleftrightarrow & \square \text{ 元} \end{array}$$

$$\text{倍數法：} 3 \times 3 = 9 (\text{或 } 9 \div 3 = 3), 5 \times 3 = 15$$

$$\begin{array}{ccc} 3 \text{ 枝} & \longleftrightarrow & 5 \text{ 元} \\ \times 3 \quad \downarrow & & \downarrow \quad \times 3 \\ 9 \text{ 枝} & \longleftrightarrow & \square \text{ 元} \end{array}$$

(5)外項乘以外項等於內項乘以內項(內項乘以內項等於外項乘以外項)：

先用算式「 $3:5=9:y$ 」記錄問題，透過『外項乘以外項會等於內項乘以內項』得到算式『 $3\times y=5\times 9$ 』後，再利用乘除互逆「 $3\times y=45$ ，則 $y=45\div 3=15$ 」或等量公理「 $3\times y=45$ ， $y=45\div 3=15$ 」算出 9 枝鉛筆賣 15 元的答案。

2.以「 $3:5=\square:15$ 」為例，說明為什麼外項乘以外項會等於內項乘以內項。

$$3:5=\square:15$$

$$\Rightarrow (3\times 15):(5\times 15) = (\square\times 5):(15\times 5)$$

$$\Rightarrow (3\times 15) = (\square\times 5)$$

看著原問題「 $3:5=\square:15$ 」和結果「 $3\times 15=\square\times 5$ 」，

幫助學生發現「 3×15 」是「 $3:5=\square:15$ 」兩外項的乘積，「 $\square\times 5$ 」是「 $3:5=\square:15$ 」兩內項的乘積，可以透過「外項乘以外項會等於內項乘以內項」的關係，由「 $3:5=\square:15$ 」直接得到 $(3\times 15) = (\square\times 5)$ 。

題號	試題代碼				答案		
7	110-M6-B1-07				4		
評量指標	6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-s-05)						
知識向度	量與實測	認知向度		概念理解			
題目	四角柱甲、三角柱乙、圓柱丙，它們的底面積和體積都相等。 請問哪一個柱體的高最長？ ① 四角柱甲 ② 三角柱乙 ③ 圓柱丙 ④ 一樣長						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：65%
	全 體	0.08	0.11	0.16	0.65	0.00	
	高分組	0.03	0.12	0.09	0.76	0.00	鑑別度：0.26
	低分組	0.14	0.12	0.23	0.50	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定底面積和體積都相等的三種柱體，要求學生選出柱高最長的柱體，評量學生利用柱體體積公式「柱體的體積為底面積與高的乘積」解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.26，正確答案為選項④，通過率為 65%，顯示六成五的學生已具備利用「簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積」公式解題的能力。
2. 有 8%的學生選擇選項①(低分組有 14%)，11%的學生選擇選項②(低分組有 12%)，這些學生可能不具備利用「簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積」公式解題的能力；也可能認為求四角柱底面四邊形的面積公式是「底×高」，而求三角柱底面三角形的面積公式是「底×高÷2」，所以選擇四角柱或三角柱的柱高最長。
3. 有 16%的學生選擇選項③(低分組有 23%)，這些學生可能不具備利用「簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積」公式解題的能力；也可能受平面圖形中相同周長下圓形面積最大的概念影響，認為圓柱的柱高會最長。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-s-06 能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。	6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-n-15)	S-9-13 表面積與體積：直角柱、直圓錐、正角錐的展開圖；直角柱、直圓錐、正角錐的表面積；直角柱的體積。

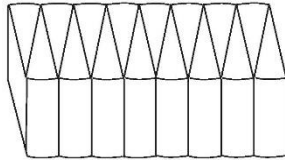
三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

- 1.本題是集合的情境，以題目中的四角柱為例，四角柱可以是長方體、平行四邊形柱或梯形柱，國小學生不易掌握所有四角柱意義。
- 2.教師必須提供很多特例的情境，學生發現所有的特例都成立時，才可能理解所有的圖形，也就是集合也都成立。

(二) 核心概念與本題的教學重點

- 1.建議教師由長方體體積公式「 $(長 \times 寬) \times 高$ 」，說明四角柱體積公式「 $底面積 \times 高$ 」，並推廣至簡單直柱體體積公式「 $底面積 \times 高$ 」。
- 2.再透過類比引入圓面積公式的方法，引導出切割直圓柱體的步驟，也就是將直圓柱切成兩個半圓柱，再將兩個半圓柱都切成很多個全等的扇形柱，將這兩個切成扇形柱的半圓柱上下交錯疊合起來，會變成一個接近直四角柱的立體(如下圖)，直四角柱的體積是「 $底面積 \times 高$ 」，所以直圓柱的體積也是「 $底面積 \times 高$ 」。



- 3.給定底面積相同數據，柱高相同數據的三角柱、四角柱和圓柱，幫助學生發現體積相同。舉兩三個例子之後再隱藏數據，幫助學生抽象理解底面積、柱高相同的直圓柱，其體積均相同的集合概念。接著再變化關係，幫助學生發現底面積、柱高、體積之間的關係，如原題底面積、體積相同的三角柱、四角柱和直圓柱，其柱高也相同。

題號	試題代碼			答案			
8	110-M6-B3-08			2			
評量指標	6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。						
知識向度	量與實測		認知向度		解題思考		
題目	<p>「底為 3.6 公分的三角形面積是 38.64 平方公分，請問三角形的高是多少公分？」</p> <p>下列哪個算式可以算出正確的答案？</p> <p>① $38.64 \times 2 \times 3.6$</p> <p>② $38.64 \times 2 \div 3.6$</p> <p>③ $38.64 \div 2 \times 3.6$</p> <p>④ $38.64 \div 2 \div 3.6$</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：62%
	全 體	0.05	0.62	0.16	0.17	0.00	
	高分組	0.01	0.90	0.02	0.07	0.00	鑑別度：0.58
	低分組	0.11	0.32	0.33	0.23	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題是小數乘除兩步驟文字題，要求學生選出能正確算出答案的算式，評量學生小數乘除兩步驟問題列式的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項②，通過率為 62%，顯示超過六成的學生已具備小數乘除兩步驟問題列式的能力。
2. 有 5% 的學生選擇選項①(低分組有 11%)，17% 的學生選擇選項④(低分組有 23%)、16% 的學生選擇選項③(低分組有 33%)，這些學生可能不具備小數乘除兩步驟問題列式的能力；也可能無法掌握小數情境乘除互逆的關係，在列式時出現錯誤；也可能不理解或誤解題意。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。	6-n-08 在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。	7-n-06 能理解負數的特性並熟練數(含小數、分數)的四則混合運算。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 三角形的面積公式是底 \times 高 \div 2，因此學生較容易列出算式 $3.6\times$ 高 \div 2 $=$ 38.64，如果學生無法掌握分數情境乘除互逆的關係，或不具備先列式再利用等量公理解題的能力，就無法成功的解題。
2. 如果學生無法列出 $3.6\times$ 高 \div 2 $=$ 38.64 的算式，只能在問題情境中利用乘除互逆的關係來解題，利用乘除互逆才能解題的乘除兩步驟問題，對低分組學生而言相當的困難。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 二步驟問題的教學包含三個重點，第一個重點是能夠解決問題，並用二個算式記錄解題過程；第二個重點是能夠用併式記錄解題過程；第三個重點是能夠列式，並用逐次減項的記法記錄解題過程。
2. 以小數兩步驟問題「媽媽買了 1.5 公升的果汁 6 瓶，全部分裝到 0.5 公升的杯子裡，相當於裝滿幾杯？」為例，如果學生無法解題，建議教師先將原問題修改為整數情境的問題，例如修改為「媽媽買了 15 公升的果汁 6 瓶，全部分裝到 5 公升的瓶子裡，相當於裝滿幾瓶？」待學生解題成功後，再回到原小數情境的問題，希望學生能類比整數情境的問題來解決相同情境小數的問題。
3. 下面以「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」為例，說明整數兩步驟問題的教學流程。

教師可以仿下面的教學流程，進行小數兩步驟問題的教學。

(1) 用兩個算式記錄解題活動

$15+25=40$ ， $40\div 5=8$ ，答：可以買 8 枝。

(2) 將兩個算式改記成併式的記法

將「 $15+25=40$ ， $40\div 5=8$ 」改記成「 $(15+25)\div 5=8$ 」

(3) 用併式記錄解題活動

$(15+25)\div 5=8$ ，答：可以買 8 枝。

(4) 用算式填充題來列式

$(15+25)\div 5=(\quad)$

(5) 先列式，再用逐次減項記錄解題活動

$(15+25)\div 5=(\quad)$

$(15+25)\div 5$

$=40\div 5$

$=8$ ，答：可以買 8 枝。

4. 以逐次減項的記法「 $5\times(12+8)-10=5\times 20-10=100-10=90$ 」為例，它是以下解題過程的摘要記法：

$5\times(12+8)-10=5\times 20-10$ ， $5\times 20-10=100-10$ ， $100-10=90$

因為等號滿足遞移性($A=B$ ， $B=C$ ， $C=D$ ，所以 $A=C$)，

所以 $5\times(12+8)-10=90$

逐次減項記法中除了把重複出現的算式「 $5 \times 20 - 10$ 」和「 $100 - 10$ 」只記一次之外，還把解題過程最重要的部份「因為等號滿足遞移性，所以 $5 \times (12 + 8) - 10 = 90$ 」也省略了。

教師可以透過詢問為什麼「 $5 \times (12 + 8) - 10$ 」的答案是 90，檢查學生是否掌握利用等號遞移性記錄的意義。

5. 以「1 個塑膠矮凳重 1.5 公斤，1 個塑膠桌子重 2.7 公斤，學校各買了 5 個矮凳和桌子，共重多少公斤？」為例，說明如何幫助學生解題。

步驟一：透過分段布題，幫助學生解題

先布「1 個塑膠矮凳重 1.5 公斤，1 個塑膠桌子重 2.7 公斤，學校各買了 1 個矮凳和桌子，共重多少公斤？」，要求學生用算式 $1.5 + 2.7 = 4.2$ 把做法記下來。

步驟二：再布「學校各買了 5 個矮凳和桌子，共重多少公斤？」要求學生用算式 $4.2 \times 5 = 21$ 把做法記下來。

步驟三：回到原問題，要求學生先用兩個算式把作法記下來，再改用併式 $(1.5 + 2.7) \times 5 = 21$ 記錄。

步驟四：要求學生用一個併式 $(1.5 + 2.7) \times 5 = 21$ 把做法記下來。

步驟五：要求學生先列式 $(1.5 + 2.7) \times 5 = ()$ ，再用逐次減項的記法記錄解題活動。

$$\begin{aligned} &(1.5 + 2.7) \times 5 \\ &= 4.2 \times 5 \\ &= 21 \end{aligned}$$

6. 本題為「已知三角形面積和其中一底，求高是多少」的乘除互逆情境題，學童需先依照題意(面積公式)列出算式填充題，再以乘除互逆的關係從而列出解題的二步驟列式。建議教師在教學時，指導學童先依題意列出算式填充題後再解題，比較能看出乘除互逆的關係。

題號	試題代碼		答案				
9	110-M6-A1-09		3				
評量指標	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解（質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100 ）。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	<p>「$2 \times 2 \times 3 \times a$」是某數質因數分解的算式。 請問下列哪個選項<u>不可能</u>是該數？</p> <p>① 36 ② 60 ③ 72 ④ 84</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：49%
	全 體	0.16	0.14	0.49	0.20	0.00	
	高分組	0.08	0.05	0.77	0.09	0.00	鑑別度：0.54
	低分組	0.22	0.24	0.23	0.30	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定某數含有未知數符號的質因數分解連乘積，要求選出不可能是該數的選項，評量學生利用質因數分解解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.54，正確答案為選項③，通過率為 49%，顯示近五成的學生已具備利用質因數分解解題的能力。
2. 有 16% 的學生選擇選項①(低分組有 22%)，14% 的學生選擇選項②(低分組有 24%)，有 20% 的學生選擇選項④(低分組有 30%)，這些學生可能不具備利用質因數分解解題的能力；也可能誤解題意，選出可能是該數的答案；也可能誤解或不理解題意。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解(質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100)。	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 低分組有 22% 的學生選擇選項①，高分組有 8% 的學生選擇選項①；低分組有 24% 的學生選擇選項②，高分組有 5% 的學生選擇選項②；低分組有 30% 的學生選擇選項④，高分組有 9% 的學生選擇選項④。
2. 學生沒有將選項的數字質因數分解，判斷是否滿足題意的解題習慣；也可能是將每個選項進行分解，無法善用共同質因數 $2 \times 2 \times 3$ 來幫助分解，因此，特別是 84，因為有 7 這個質因數，增添了分解上的困難，故答對率又更低。
3. 學生不理解質因數分解算式的限制，不知道 a 必須是質數。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師可以透過分類的活動，將正整數區分成因數只有 1 個、因數只有 2 個、以及因數有 3 個或比 3 個多的數等三類，幫助學生區分 1、質數與合數。

例如列出 1~12 各數的所有因數，幫助學生認識：

因數只有 1 個的數：1

因數只有 2 個的數：2、3、5、7、11

因數有 3 個或比 3 個多的數：4、6、8、9、10、12

(1) 2 的因數是 1 和 2；3 的因數是 1 和 3；5 的因數是 1 和 5，...

因數只有 2 個的數，它們的因數都是 1 和本身，數學上稱這些數為質數。

也可以說，除了 1 和自己之外，沒有其它因數的整數稱為質數。

(2) 4 的因數除了 1 和 4 之外還有 2；6 的因數除了 1 和 6 之外還有 2 和 3；

8 的因數除了 1 和 8 之外還有 2 和 4，...

因數有 3 個或比 3 個多的數，它們的因數除了 1 和本身以外，還有其他的數，數學上稱這些數為合數。

(3) 1 的因數只有 1 個，所以 1 不是質數也不是合數。

2. 教師可以透過「把 24 分解成幾個大於 1 整數相乘的算式」，依下列步驟，將 24 質因數分解。

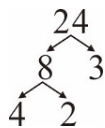
步驟一：透過樹狀圖，將 24 分解成 8 和 3 的乘積，並記成 $24 = 8 \times 3$ 。



步驟二：3 不可以分解成 2 個大於 1 整數相乘的算式。

此時，教師可以說明，不能分解成 2 個大於 1 整數相乘的數，它們的因數只有 1 和自己，所以不能分解成 2 個大於 1 整數相乘的數是質數。

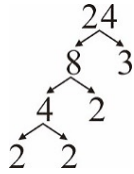
步驟三：透過樹狀圖，將 8 分解成 4 和 2 的乘積，並記成 $24 = 8 \times 3 = 4 \times 2 \times 3$



步驟四：2 不可以分解成 2 個大於 1 整數相乘的算式。

步驟五：透過樹狀圖將 4 分解成 2 和 2 乘積，並記成

$$24 = 8 \times 3 = 4 \times 2 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3。$$



步驟六：稱把 24 分解成 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 的過程為質因數分解。

2 和 3 都是質數，2 和 3 也是 24 的因數，稱 2 和 3 是 24 的質因數。

3. 學生有透過樹狀圖，將給定數分解成質因數乘積的經驗後，教師可以幫助學生利用短除法，逐一的提出質因數，幫助學生較有效率的進行質因數分解。

以「將 24 質因數分解」為例，說明如何幫助學生解題：

步驟一：先提出質因數 2，將 24 記成 $24 = 2 \times 12$ ，

步驟二：再提出質因數 2，將 24 記成 $24 = 2 \times 2 \times 6$ ，

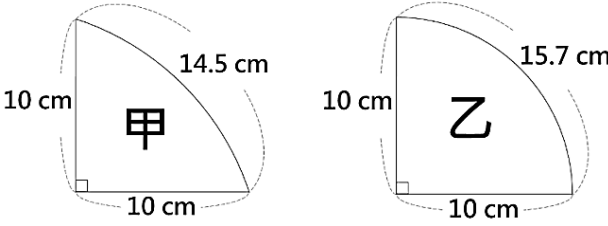
步驟三：再提出質因數 2，將 24 記成 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ，

步驟四：3 是質因數，可以得到 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 。

步驟五：直接透過短除法將 24 記成 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24} \\ \underline{2} \\ 2 \overline{) 12} \\ \underline{2} \\ 2 \overline{) 6} \\ \underline{2} \\ 3 \end{array}$$

4. 建議教師可以同時幫助學生建立雙向連結，也就是從某數進行質因數分解，再從質因數分解回推某數。例如： $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ ， $2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$ 。

題號	試題代碼		答案				
10	110-M6-C2-10		2				
評量指標	6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-n-14)						
知識向度	幾何	認知向度	程序執行				
題目	<p>甲、乙兩個圖形中，哪個圖形是扇形(圓周率=3.14)?</p>  <p>① 只有甲 ② 只有乙 ③ 兩個圖形都是扇形 ④ 兩個圖形都不是扇形</p>						
選答率	選項	1	2*	3	4	其他	通過率：36%
	全體	0.04	0.36	0.54	0.05	0.00	
	高分組	0.02	0.58	0.37	0.04	0.00	鑑別度：0.37
	低分組	0.08	0.21	0.62	0.08	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定兩個圖形，要求學生選出是扇形的圖形，評量學生利用求扇形弧長解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

- 1.本題鑑別度為 0.37，正確答案為選項②，通過率為 36%，顯示近四成的學生已具備利用求扇形弧長解題的能力。
- 2.有 54%的學生選擇選項③(低分組有 62%)，這些學生可能尚未具備利用求扇形弧長解題的能力；也可能不知道扇形的弧長必須是圓心角所對應的圓周長，這兩個圖形看起來都像扇子，就直觀的認定兩圖形皆為扇形。
- 3.有 4%的學生選擇選項①(低分組有 8%)，有 5%的學生選擇選項④(低分組有 8%)，這些學生可能尚未具備利用求扇形弧長解題的能力。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。	6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-n-14)	8-s-20 能理解與圓相關的概念(如半徑、弦、弧、弓形等)的意義。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

學生不知道扇形的弧長必須是圓心角所對應的圓周長，這兩個圖形看起來都像扇子，就直觀的認定兩圖形皆為扇形。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 扇形和圓有密切關係，圓上的一段圓弧，以及該圓弧兩端點和圓心連成的兩條半徑，它們所合成的圖形稱為扇形。很多學生不理解數學上扇形的意義，誤認為像扇子形狀的圖形就是扇形，下圖都是由共端點兩條長度是 r 的線段夾一段圓弧所合成像扇子的圖形，如果該圓弧是半徑 r 的圓弧，該圖形是扇形，如果該圓弧不是半徑 r 的圓弧，該圖形不是扇形。



2. 在掌握扇形的意義後，學生亦應認識圓的圓心角是周角，周角的角度是 360 度，也知道扇形的圓心角是周角的部份。透過「圓心角 \div 周角」，可以計算給定圓心角及半徑的扇形面積或周長，或計算給定面積或弧長的扇形之圓心角角度。
3. 下面以「直徑是 200 公分、圓心角為 90° 扇形的周長是多少公分？(圓周率 = 3.14)」為例，說明如何幫助學生解題。

建議教師透過下列步驟幫助學生解題：

步驟一：透過扇形的圓心角，算出扇形是幾分之幾圓。

圓的圓心角是周角，周角的角度是 360 度，扇形的圓心角是周角的部份，透過周角 $\times\frac{1}{2}$ ，可以得到半圓的圓心角是 180 度，相同的方式，可以求得 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{6}$ 圓的圓心角是多少度。

反之，可以透過扇形的圓心角角度 90 度 \div 周角 360 度，算出扇形是 $\frac{1}{4}$

$$\text{圓} \cdot 90 \div 360 = \frac{1}{4}$$

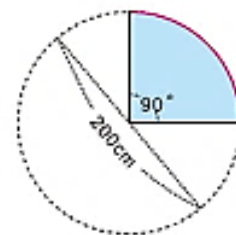
步驟二：利用圓周長公式，算出給定扇形的弧長。

$$\text{圓周長} = \text{直徑} \times 3.14$$

$$\frac{1}{4} \text{ 圓的弧長} = \text{圓周長的} \frac{1}{4}$$

$$= (\text{直徑} \times 3.14) \times \frac{1}{4}$$

$$= (200 \times 3.14) \times \frac{1}{4} = 157$$



題號	試題代碼				答案																																																																
11	110-M6-A2-11				3																																																																
評量指標	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。																																																																				
知識向度	數與計算		認知向度		程序執行																																																																
題目	<p>BMI 是目前國際上通用的胖瘦判斷的參考方式，利用體重和身高代入公式所得出的數值來客觀評判一個人的體型是否理想或太胖、太瘦。<u>王太太</u>身高 160 cm，體重 62 kg，請利用下方計算 BMI 值的公式及相關的判定標準，幫<u>王太太</u>評估一下，她是屬於哪一類？</p> <p>BMI 值計算公式：$\frac{\text{體重}(kg)}{\text{身高}(m) \times \text{身高}(m)}$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="9">身體質量指數 BMI 值判定</th> </tr> <tr> <th rowspan="2">年齡</th> <th colspan="4">男生</th> <th colspan="4">女生</th> </tr> <tr> <th>過輕 (BMI <)</th> <th>正常範圍 (BMI 介於)</th> <th>過重 (BMI >)</th> <th>肥胖 (BMI ≥)</th> <th>過輕 (BMI <)</th> <th>正常範圍 (BMI 介於)</th> <th>過重 (BMI >)</th> <th>肥胖 (BMI ≥)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>16</td> <td>18.6</td> <td>18.6~23.4</td> <td>23.4</td> <td>25.6</td> <td>18.0</td> <td>18.0~22.7</td> <td>22.7</td> <td>25.3</td> </tr> <tr> <td>17</td> <td>19.0</td> <td>19.0~23.6</td> <td>23.6</td> <td>25.6</td> <td>18.3</td> <td>18.3~22.7</td> <td>22.7</td> <td>25.3</td> </tr> <tr> <td>18</td> <td>19.2</td> <td>19.2~23.7</td> <td>23.7</td> <td>25.6</td> <td>18.3</td> <td>18.3~22.7</td> <td>22.7</td> <td>25.3</td> </tr> <tr> <td>成人</td> <td>18.5</td> <td>18.5~24.0</td> <td>24</td> <td>27</td> <td>18.5</td> <td>18.5~24.0</td> <td>24.0</td> <td>27.0</td> </tr> </tbody> </table> <p>① 過輕 ② 正常範圍 ③ 過重 ④ 肥胖</p>							身體質量指數 BMI 值判定									年齡	男生				女生				過輕 (BMI <)	正常範圍 (BMI 介於)	過重 (BMI >)	肥胖 (BMI ≥)	過輕 (BMI <)	正常範圍 (BMI 介於)	過重 (BMI >)	肥胖 (BMI ≥)	16	18.6	18.6~23.4	23.4	25.6	18.0	18.0~22.7	22.7	25.3	17	19.0	19.0~23.6	23.6	25.6	18.3	18.3~22.7	22.7	25.3	18	19.2	19.2~23.7	23.7	25.6	18.3	18.3~22.7	22.7	25.3	成人	18.5	18.5~24.0	24	27	18.5	18.5~24.0	24.0	27.0
身體質量指數 BMI 值判定																																																																					
年齡	男生				女生																																																																
	過輕 (BMI <)	正常範圍 (BMI 介於)	過重 (BMI >)	肥胖 (BMI ≥)	過輕 (BMI <)	正常範圍 (BMI 介於)	過重 (BMI >)	肥胖 (BMI ≥)																																																													
16	18.6	18.6~23.4	23.4	25.6	18.0	18.0~22.7	22.7	25.3																																																													
17	19.0	19.0~23.6	23.6	25.6	18.3	18.3~22.7	22.7	25.3																																																													
18	19.2	19.2~23.7	23.7	25.6	18.3	18.3~22.7	22.7	25.3																																																													
成人	18.5	18.5~24.0	24	27	18.5	18.5~24.0	24.0	27.0																																																													
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：46%																																																														
	全 體	0.06	0.30	0.46	0.18	0.00	鑑別度：0.43																																																														
	高分組	0.02	0.17	0.68	0.12	0.00																																																															
	低分組	0.10	0.42	0.26	0.21	0.01																																																															

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定計算 BMI 值的公式及相關的判定標準，要求學生判斷給定身高和體重女性體型的標準，評量學生利用小數除法直式計算解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.43，正確答案為選項③，通過率為 46%，顯示近五成的學生已具備利用小數除法直式計算解題的能力。
2. 有 6%的學生選擇選項①(低分組有 10%)，18%的學生選擇選項④(低分組有 21%)，這些學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力；也可能在計算 BMI 值時發生錯誤；也可能無法正確解讀 BMI 值判定表格，因而誤判。
3. 有 30%的學生選擇選項②(低分組有 42%)，這些學生可能不具備利用小數除法

直式計算解題的能力；也可能已具備利用小數除法直式計算解題的能力，但是不理解題意，先利用四捨五入法取概數至整數部份算出 BMI 值是 24，在判斷是否超重時不理解 24.0 的意義，女生部份要 24.0 才過重，他們可能認為 24 比 24.0 小，因此選擇正常範圍為答案。

二、對應能力指標（97 課綱分年細目）

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。	6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

三、教學建議

（一）錯誤類型的可能原因

1. 學生不理解題意，不知道求 BMI 值時要利用四捨五入法取概數至小數點後第一位後再判斷。
2. 學生利用四捨五入法取概數至整數，算出 BMI 值是 24 後，女生部份要 24.0 才過重，他們可能認為 24 比 24.0 小，因此選擇正常範圍為答案。

（二）核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師先在整數情境的問題中，說明「被除數和除數同時換單位」解題策略的意義後，再引入小數情境的問題。
以「14000 元，每人分 3000 元，最多可以分給幾人，剩下幾元？」為例，說明「被除數和除數同時換單位」解題策略的意義。
步驟一：先布題「14 張 1000 元鈔票，每人分 3 張，最多可以分給幾人，剩下幾張 1000 元鈔票？也就是剩下多少元？」。
 $14(\text{張}) \div 3(\text{張}) = 4(\text{人}) \dots 2(\text{張})$ ，得到最多可以分給 4 個人，剩下 2 張 1000 元鈔票，也就是剩下 2000 元。
步驟二：回到原問題，限制學生先將被除數 14000 元及除數 3000 元，都換成 1000 元後再解題。
14000 元換成 14 張千元，也就是 14 個千，3000 元換成 3 張千元，也就是 3 個千。
 $14(\text{個千}) \div 3(\text{個千}) = 4(\text{人}) \dots 2(\text{個千})$ ，得到最多可以分給 4 個人，剩下 2 個千，也就是剩下 2000 元。
步驟三：稱這種解題方法為被除數和除數同時換成 1000 的方法。
再命一些題目讓學生練習。
2. 以「36.2 公升果汁，1.4 公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」為例，說明如何利用「被除數和除數同時以 0.1 公升換單位」策略，幫助學生解題。
步驟一：幫助學生將被除數 36.2 公升及除數 1.4 公升，同時以 0.1 公升為單位來換單位。
36.2 公升轉換成 362 個 0.1 公升，1.4 公升換成 14 個 0.1 公升。

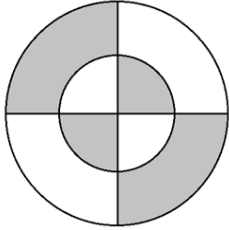
步驟二：再透過 $362 \div 14 = 25 \dots 12$ ，得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 12 個 0.1 公升，也就是剩下 1.2 公升。

如果學生無法掌握以 0.1 公升為單位的意義，教師可以透過命名 0.1 公升為 1 杯的方式，將被除數 36.2 公升及除數 1.4 公升，轉換成 362 杯和 14 杯，再透過 $362 \div 14 = 25 \dots 12$ ，得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 12 杯，也就是剩下 1.2 公升的答案。

3. 當商數較小時，例如商數是一位數字時，教師應幫助學生利用「先乘後減」的策略解題。「先乘後減」策略的概念比較簡單，學生不但較易理解其意義，而且也比較有效率。

4. 回到原題目，利用上述換單位的方式，帶著孩子用直式計算 $1.6 \times 1.6 = 2.56$ ，之後再用 $62 \div 2.56 \approx 24.22$ 。

引導孩子查表判斷數值是被歸類到成年女性的過重。

題號	試題代碼					答案	
12	110-M6-B1-12					1	
評量指標	6-n-14 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同6-s-03)						
知識向度	量與實測		認知向度		概念理解		
題目	<p>「下圖為一個飛鏢標靶，外圈大圓的直徑為 20 公分，內圈小圓的直徑為 10 公分，請問塗色部分的面積是多少平方公分？(圓周率=3.14)」</p> <p>下列哪個算式可以算出正確答案？</p>  <p>① $10 \times 10 \times 3.14 \times \frac{1}{2}$</p> <p>② $10 \times 10 \times 3.14$</p> <p>③ $20 \times 20 \times 3.14 \times \frac{1}{2}$</p> <p>④ $20 \times 20 \times 3.14$</p>						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：58%
	全 體	0.58	0.06	0.31	0.04	0.00	
	高分組	0.75	0.01	0.23	0.01	0.00	鑑別度：0.33
	低分組	0.41	0.13	0.36	0.10	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定兩個被等分成四份同心圓組成的複合圖形，要求學生選出能算出塗色部分面積的算式，評量學生利用圓和扇形面積公式解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.33，正確答案為選項①，通過率為 58%，顯示近六成的學生已具備利用圓和扇形面積公式解題的能力。
2. 有 31% 的學生選擇選項③(低分組有 36%)，這些學生可能不具備利用圓和扇形面積公式解題的能力；這些學生可能已掌握面積的保留概念，知道塗色部分的面積和大圓面積的一半一樣大，但是記錯圓面積公式為「圓面積=直徑×直徑×3.14」。
3. 有 6% 的學生選擇選項②(低分組有 13%)，有 4% 的學生選擇選項④(低分組有 10%)，這些學生可能不具備利用圓和扇形面積公式解題的能力；也可能尚無法掌握面積的保留概念，無法將塗色部分的面積看成大圓面積的一半。

二、對應能力指標（97 課綱分年細目）

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。	6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-n-14)	8-s-20 能理解與圓相關的概念(如半徑、弦、弧、弓形等)的意義。

三、教學建議

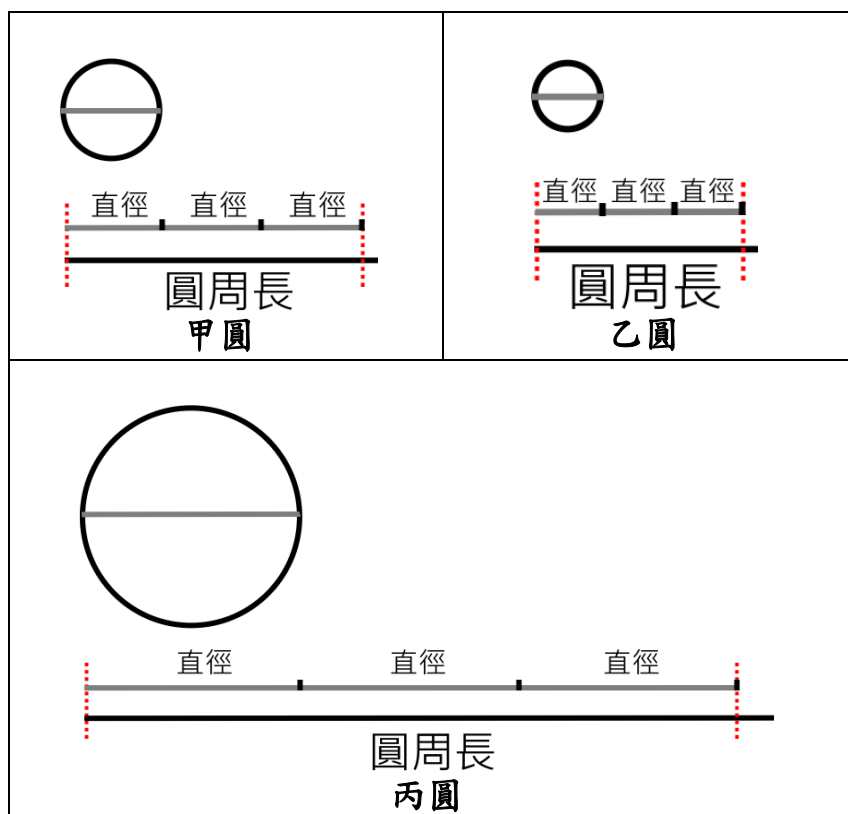
(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生混淆圓周長公式和圓面積公式，圓周長公式「圓周長＝直徑×3.14」與直徑有關，圓面積公式「圓面積＝半徑×半徑×3.14」與半徑有關，學生誤記圓面積公式為「圓面積＝直徑×直徑×3.14」。
2. 學生尚未掌握面積的保留概念，無法將塗色部分的面積看成大圓面積的一半。
3. 學生只要掌握乘除互逆的關係，就可以將「圓周長＝直徑×3.14」和「圓周率＝圓周長÷直徑」看成相同的算式，建議教師要求學生理解或記憶「圓周率＝圓周長÷直徑」，這個算式比較容易察覺圓周率表示圓周長是直徑長 3.14 倍的關係。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 圓周率的率指的是比率，比率相等指的是所有的圓都相似，也就是說，所有的圓，其圓周長和直徑的比、圓周長和半徑的比以及直徑和半徑的比都相等。圓的周長是曲線，不易測量其長度，而圓的直徑是直線，比較容易測量，因此只要知道「圓周長：直徑長」的比值，測量出直徑後就能算出圓的周長，數學上稱「圓周長：直徑長」的比值為圓周率。
2. 下面說明如何幫助學生掌握圓周率的意義：
教師先給定 3 個大小不同的圓，再提供下面兩種情境，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。
 - (1) 觀察給定三個圓的圓周長和 3 倍直徑長的長短關係：
教師分別畫出這 3 個圓的圓周長以及直徑長的 3 倍，要求學生觀察這些圓的圓周長和 3 倍直徑長，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面

引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。如下所示：



(2)比較三個圓「圓周長÷直徑長」商的大小關係：

教師給定三個圓的圓周和直徑的長度，以及「圓周長÷直徑長」的商(商數以四捨五入法取概數到百分位)，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。如下所示：

	圓周長 (公分)	直徑長 (公分)	圓周長÷直徑長 (四捨五入到百分位)
甲圓	56.5	18	3.14
乙圓	38.0	12	3.17
丙圓	72.5	23	3.15

教師應同時提供兩種情境，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點。

第一種情境是比的想法，學生可以同時看到圓周長和直徑 3 倍長的關係；第二種情境是比值的想法，學生可能只將注意力放在「圓周長÷直徑長」的商，而無法察覺圓周長和直徑 3 倍長的關係。

- 先將圓切成兩個半圓，再將兩個半圓都切成很多個(例如 8 個或 16 個)全等的扇形，將這兩個切成扇形的半圓上下交錯疊合起來，會變成接近平行四邊形(或長方形)的圖形，平行四邊形的底(長方形的長)是圓周長的一半，平行四邊形的高(長方形的寬)是圓的半徑，可以透過平行四邊形(長方形)面積求出圓面積。

圓面積

= 平行四邊形面積

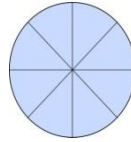
= 底×高

= 圓周長的一半×半徑

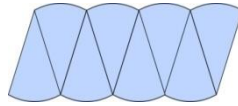
= (直徑×3.14)÷2×半徑

= (直徑÷2×3.14)×半徑

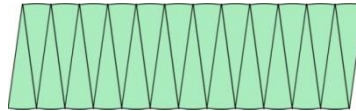
= 半徑×半徑×3.14



一個被八等分分割的圓



重新組一個被八等分分割的圓



重新組一個被二十四等分分割的圓

4. 以「半徑 10 公分、圓心角 36 度的扇形面積是多少平方公分？」為例，提供兩種解題的方法。

方法一：以幾分之幾圓的想法來解題

$$36 \div 360 = \frac{1}{10}, (10 \times 10 \times 3.14) \times \frac{1}{10} = 31.4,$$

答：31.4 平方公分。

方法二：以 1 度圓心角對應的扇形面積為單位來解題

$$(10 \times 10 \times 3.14) \times \frac{36}{360} = 31.4, \text{ 答：} 31.4 \text{ 平方公分。}$$

學生較容易掌握第一種方法解題的意義。

5. 建議教師在處理需平移部分區域的複合圖形面積問題時，應試著讓學童動手操作，甚至剪下貼上，用以確認平移後的圖形面積的確和原本的區域面積一樣大。使所有區域組合成一個半圓，再求出其面積。學童可能在課堂上較少真正進行「平移面積→組合」的操作，所以遇到此類複合圖形面積的問題時較難順利解題。

題號	試題代碼					答案	
13	110-M6-D3-13					1	
評量指標	6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式、進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13)						
知識向度	代數		認知向度		解題思考		
題目	<p>「○○○○□□□□○○○○□□□□○○○○□□□□」，</p> <p>如上圖，第 1 個到第 4 個圖形都是○，第 5 個到第 9 個圖形都是□。依照 4 個○、5 個□，4 個○、5 個□的規律排列下去，第 253 個圖形和第 365 個圖形為何？</p> <p>① 第 253 個是○，第 365 個是□ ② 第 253 個是□，第 365 個是○ ③ 第 253 個是○，第 365 個是○ ④ 第 253 個是□，第 365 個是□</p>						
選答率	選項	1*	2	3	4	其他	通過率：60%
	全體	0.60	0.14	0.13	0.13	0.00	
	高分組	0.85	0.03	0.05	0.06	0.00	鑑別度：0.51
	低分組	0.35	0.26	0.21	0.18	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定由兩種形狀組成而且是 9 個一循環的圖形序列，要求學生回答第幾個圖形的形狀，評量學生利用常用數量關係解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.51，正確答案為選項①，通過率為 60%，顯示六成的學生已具備利用常用數量關係解題的能力。
2. 有 14% 的學生選擇選項②(低分組有 26%)，有 13% 的學生選擇選項③(低分組有 21%)，有 13% 的學生選擇選項④(低分組有 18%)，這些學生可能不具備利用常用數量關係解題的能力；也可能沒有發現 9 個圖形一循環的規律，無法利用除以 9 所得到的餘數來解題。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目		6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13)	A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生無法將本題解讀成 9 個一循環的圖形序列。
2. 學生看不到 9 個一循環的圖形序列和正整數 1、2、3、... 間的對應關係，
例如：1⇒○、2⇒○、...、8⇒□、9⇒□，1⇒○、2⇒○、...、8⇒□、9⇒□。
3. 學生可能發現 9 個圖形一循環的規律，但是不知道為什麼可以利用除以 9 所得到的餘數來解題。
例如：1⇒□、10⇒□、19⇒□、28⇒□，所以可以透過 $28-9-9-9=1$ ，
也就是 $28\div 9=3\dots 1$ ，知道第 28 個圖形和第 1 個圖形是相同的。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 先以不同形狀的規律圖形，幫助學生釐清 5 個一循環的規律



2. 幫助學生建立相同圖形的數字與圖形間的連結，例如：

☆ 分別是在 5，10，引導學生推測出下一次出現會是在 15、20...

幫助學生發現出現的位置都是 5 的倍數。

○ 分別是在 1，6，引導學生推測出下一次出現會是在 11、16...

幫助學生發現 6、11... 的數字與 5 個一循環之間的連結，

也就是 $6\div 5=1\dots 1$ ； $11\div 5=2\dots 1$

進而歸納出圓形的位置都是除以 5 餘 1。

以此類推幫助學生發現圖形出現的位置分別為：

除以 5 餘 1	除以 5 餘 2	除以 5 餘 3	除以 5 餘 4	除以 5 餘 5
○	△	◇	□	☆

3. 回到原題目幫助學生發現圖形的變化是 9 個一循環，圖形出現的位置分別為：

圖形	○	○	○	○	□	□	□	□	□
除以 9 的餘數	1	2	3	4	5	6	7	8	9

因此

$253\div 9=28\dots 1$ ，所以圖形是○

$365\div 9=40\dots 5$ ，所以圖形是□

題號	試題代碼					答案	
14	110-M6-A3-14					1	
評量指標	6-n-03 能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。						
知識向度	數與計算		認知向度		解題思考		
題目	<p>已經知道分數 $\frac{a}{b}$ 的最簡分數是 $\frac{4}{13}$，且 a 和 b 的最大公因數是 30。</p> <p>下列敘述何者<u>錯誤</u>？</p> <p>① a 是 13 的倍數 ② a 和 b 都是 10 的倍數 ③ a 和 b 都是 15 的倍數 ④ a 和 b 的最小公倍數是 1560</p>						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：40%
	全 體	0.40	0.18	0.17	0.24	0.00	
	高分組	0.64	0.09	0.09	0.17	0.00	鑑別度：0.42
	低分組	0.22	0.26	0.23	0.28	0.01	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定一分數的最簡分數及其分子和分母的最大公因數，要求學生選出關於該分數分子和分母的正确敘述，評量學生利用兩數互質與最簡分數解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.42，正確答案為選項①，通過率為 40%，顯示四成的學生已具備利用兩數互質與最簡分數解題的能力。
2. 有 24% 的學生選擇選項④(低分組有 28%)，這些學生可能尚未具備利用兩數互質與最簡分數解題的能力；也可能已具備利用兩數互質與最簡分數解題的能力，透過「 a 和 b 的最大公因數是 30」的條件算出 $\frac{a}{b} = \frac{120}{390}$ ，且求出 a 和 b 的最小公倍數是 1560，但是誤解題意，選出正確的敘述。
3. 有 18% 的學生選擇選項②(低分組有 26%)、17% 的學生選擇選項③(低分組有 23%)，這些學生可能尚未具備利用兩數互質與最簡分數解題的能力，無法利用 a 和 b 的最大公因數是 30 的條件求得分數 $\frac{a}{b} = \frac{120}{390}$ ；也可能學生知道 a 和 b 的最大公因數是 30，所以 a 和 b 一定是 10 和 15 的倍數，但是誤解題意，選出正確的敘述。

二、對應能力指標（97 課綱分年細目）

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解。	6-n-03 能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。	7-n-02 能理解因數、質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。

三、教學建議

（一）錯誤類型的可能原因

1. 無法聯絡分數 $\frac{a}{b}$ 、最簡分數 $\frac{4}{13}$ ，和 a 和 b 的最大公因數是 30 間的關係，不知道 a 和 b 的最大公因數是 30，該分數就是 $\frac{4 \times 30}{13 \times 30}$ 。
2. 學生不知道 a 和 b 的最大公因數是 30， a 和 b 的公因數都是 30 的因數，例如 10 和 15 都是 30 的因數，所以 10 和 15 都是 a 和 b 的公因數。
3. 學生沒有掌握因數和倍數間的互逆關係，不知道 10 和 15 都是 a 和 b 的公因數， a 和 b 都是 10 和 15 的倍數。

（二）核心概念與本題的教學重點

1. 應該指導學生區分「質數」和「互質」的差異。
質數：質數討論的是一個數的性質，判斷該數是否滿足只有 1 和自己兩個因數的條件。
互質：互質討論的是 a 、 b 兩個數的關係，當 $(a, b) = 1$ ，數學上稱 a 和 b 互質。
例如：1 不是質數，但是 $(1, 6) = 1$ ，所以 1 和 6 互質。
2. 最簡分數是很多等值分數比較的結果，教師不宜透過直接宣告「一個分數的分子和分母互質，我們稱這個分數為最簡分數」的方式引入最簡分數。
教師應透過比較活動引入最簡分數，例如列出一些分子和分母都比 $\frac{18}{30}$ 小的等值分數 $\frac{9}{15}$ 、 $\frac{6}{10}$ 、 $\frac{3}{5}$ ，說明這些分數中， $\frac{3}{5}$ 的分子和分母最小，稱 $\frac{3}{5}$ 為這些等值分數中的最簡分數，最後再說明可以利用分子和分母互質，判斷該分數是最簡分數。
3. 在進行過上述的學習過程後，以下以「將 $\frac{24}{18}$ 化為最簡分數」為例，說明如何幫助學生解題：
步驟一：先溝通最簡分數的意義：當一個分數的分子和分母互質時，我們稱該分數為最簡分數。
步驟二：復習互質的意義：兩整數除了 1 以外沒有其它的公因數，稱該兩數互

質。

步驟三：幫助學生用短除法找出 18 和 24 的最大公因數

$$\begin{array}{r|l} 2 & 18 \quad 24 \\ \hline 3 & 9 \quad 12 \\ & 3 \quad 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(先提出共同的質因數 2)} \\ \text{(再提出共同的質因數 3)} \\ \text{(確認無法再提出共同的質因數了)} \end{array}$$

18 和 24 的最大公因數，就是將兩次所提出來的共同質因數(2 和 3)之乘積，也就是 $2 \times 3 = 6$ 。

步驟四：說明要求得最簡分數時，需要透過約分活動，將分子與分母同時除以兩數的最大公因數。

步驟五： $\frac{24}{18} = \frac{24 \div 6}{18 \div 6} = \frac{4}{3}$ ，得到 $\frac{24}{18}$ 的最簡分數是 $\frac{4}{3}$ 。

題號	試題代碼					答案										
15	110-M6-A2-15					2										
評量指標	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。															
知識向度	數與計算		認知向度		程序執行											
題目	<p>當風速達到時速 54 公里的時候，遊樂場的摩天輪就會停止運轉，請問時速 54 公里相當於幾級風力？</p> <table border="1" style="margin-left: 40px;"> <thead> <tr> <th>風力</th> <th>公尺/秒鐘</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6 級</td> <td>10.8 ~ 13.8</td> </tr> <tr> <td>7 級</td> <td>13.9 ~ 17.1</td> </tr> <tr> <td>8 級</td> <td>17.2 ~ 20.7</td> </tr> <tr> <td>9 級</td> <td>20.8 ~ 24.4</td> </tr> </tbody> </table> <p>① 6 級 ② 7 級 ③ 8 級 ④ 9 級</p>						風力	公尺/秒鐘	6 級	10.8 ~ 13.8	7 級	13.9 ~ 17.1	8 級	17.2 ~ 20.7	9 級	20.8 ~ 24.4
風力	公尺/秒鐘															
6 級	10.8 ~ 13.8															
7 級	13.9 ~ 17.1															
8 級	17.2 ~ 20.7															
9 級	20.8 ~ 24.4															
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：55%									
	全 體	0.13	0.55	0.18	0.14	0.00										
	高分組	0.05	0.85	0.07	0.04	0.00	鑑別度：0.59									
	低分組	0.20	0.26	0.28	0.25	0.01										

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定時速幾公里的風速及利用秒數幾公尺對應風力幾級的表格，要求學生判斷給定的風速相當於幾級風，評量學生利用速度常用單位換算解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.59，正確答案為選項②，通過率為 55%，顯示近六成的學生已具備利用速度常用單位換算解題的能力。
2. 有 13% 的學生選擇選項①(低分組有 20%)，有 18% 的學生選擇選項③(低分組有 28%)，有 14% 的學生選擇選項④(低分組有 25%)，這些學生可能不具備利用速度常用單位換算解題的能力，無法將時速幾公里的單位換算成秒數多少公尺；這些學生也可能不理解題意。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活上的應用(含「百分率」、「折」)。 6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生無法進行速率常用單位間的換算，無法將時速幾公里的單位換算成秒數多少公尺。
2. 學生不理解風速和時速 54 公里間的關係。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 「平均 1 小時跑 60 公里」是日常生活中常見的說法，下面提供三種也可以溝通「平均 1 小時跑 60 公里」的方法。

方法一：60 公里：1 小時

方法二：60 公里/小時

方法三：時速 60 公里

方法一是利用比的記法來溝通速率，方法二是利用比值的記法來溝通速率，方法三是日常生活中常用的說法。

建議教師幫助學生熟練「時速 60 公里」、「速率 60 公里/小時」、「60 公里：1 小時」這三種說法間的轉換，但在解題時，儘量利用比的方法來解題，因為比的記法較能夠看到時間和距離兩量的關係。

2. 以甲 3 小時跑 5 公里，乙 5 小時跑 8 公里，誰跑得比較快為例，有兩種比較誰比較快的方法。

第一種：時間相同，比較誰跑的距離比較長

甲：3 小時跑 5 公里 \Rightarrow 15 小時跑 25 公里

乙：5 小時跑 8 公里 \Rightarrow 15 小時跑 24 公里

25 公里比 24 公里長，也就是 25 比 24 大，甲跑得比較快。

第二種：距離相同，比較誰跑的時間比較短

甲：3 小時跑 5 公里 \Rightarrow 24 小時跑 40 公里

乙：5 小時跑 8 公里 \Rightarrow 25 小時跑 40 公里

24 小時比 25 小時短，也就是 24 比 25 小，甲跑得比較快。

由上面的說明可以知道，可以有兩種定義速率的方法：

第一種：速率 = 距離：時間

第二種：速率＝時間：距離

第一種方法中時間相同時，距離的數字比較大時，速率比較快，距離的數字比較小時，速率比較慢；第二種方法中距離相同時，時間的數字比較大時，速率比較慢，時間的數字比較小時，速率比較快。

為了讓速率的數字比較大時，跑得比較快，數字比較小時，跑得比較慢，數學上都選擇第一種方法為速率的定義。

3.如果學生比較無法掌握比值想法解決速度換單位問題解題的意義，

$$\begin{aligned}\text{例如：} 54 \frac{\text{公里}}{\text{小時}} &= 54 \times \frac{1000 \text{公尺}}{60 \text{分鐘}} \\ &= 54 \times \frac{1000 \text{公尺}}{3600 \text{秒鐘}} \\ &= 15 \frac{\text{公尺}}{\text{秒鐘}}\end{aligned}$$

教師可以透過比的想法來解決換單位的問題，

$$\begin{aligned}\text{例如：} 54 \text{ 公里/小時} &= 54 \text{ 公里} : 1 \text{ 小時} \\ &= 54000 \text{ 公尺} : 60 \text{ 分鐘} \\ &= 900 \text{ 公尺} : 1 \text{ 分鐘} \\ &= 900 \text{ 公尺} : 60 \text{ 秒鐘} \\ &= 15 \text{ 公尺} : 1 \text{ 秒鐘} \\ &= 15 \text{ 公尺/秒鐘}\end{aligned}$$

查表對應風力為 7 級。

題號	試題代碼					答案	
16	110-M6-A1-16					1	
評量指標	6-n-03 能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	下列關於 a 、 b 兩數互質的敘述哪些正確？ 甲： a 、 b 兩數的最大公因數是 1 乙： a 、 b 兩數沒有共同的質因數 丙： a 和 b 兩數都不能是 1 ① 只有甲和乙 ② 只有甲和丙 ③ 只有乙和丙 ④ 甲、乙、丙都正確						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：29%
	全 體	0.29	0.28	0.18	0.24	0.00	
	高分組	0.37	0.24	0.07	0.32	0.00	鑑別度：0.15
	低分組	0.21	0.31	0.27	0.20	0.01	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定三個關於兩數互質的敘述，要求學生選出正確的敘述，評量學生是否理解互質的意義。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.15，正確答案為選項①，通過率為 29%，顯示近三成的學生已理解兩數互質的意義。
2. 有 28% 的學生選擇選項②(低分組有 31%)，這些學生可能尚未理解兩數互質的意義；也可能只熟記課本互質的定義，不知道利用短除法求兩數最大公因數或最小公倍數時，兩數互質，也就是兩數沒有共同的質因數，是判斷短除法運算停止的條件。
3. 有 24% 的學生選擇選項④(低分組有 20%)，這些學生可能尚未理解兩數互質的意義；也可能受到 1 不是質數的影響，混淆了「互質」和「質數」的意義，誤認為 1 和其他的數都不互質。
4. 有 18% 的學生選擇選項③(低分組有 27%)，這些學生可能尚未完全掌握兩數互質的意義。

二、對應能力指標（97 課綱分年細目）

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解。	6-n-03 能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。	7-n-02 能理解因數、質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。

三、教學建議

（一）錯誤類型的可能原因

1. 學生不知道「 a 、 b 兩數的最大公因數是 1」和「 a 、 b 兩數沒有共同的質因數」的意義相同。例如利用短除法求最大公因數或最小公倍數時，提出來的數是共同質因數的乘積，沒有共同質因數時就可以停止計算，和兩數互質時就可以停止計算的意義相同。
2. 受到 1 不是質數的影響，混淆了「互質」和「質數」的意義，因為 1 不是質數，誤認為 1 和其他的數都不互質。

（二）核心概念與本題的教學重點

1. 區分「質數」和「互質」的差異。
質數：質數討論的是一個數的性質，判斷該數是否滿足只有 1 和自己兩個因數的條件。
互質：互質討論的是 a 、 b 兩個數的關係，當 $(a, b) = 1$ ，數學上稱 a 和 b 互質。
例如：1 不是質數，但是 $(1, 6) = 1$ ，所以 1 和 6 互質。
2. 利用短除法求兩數的最大公因數及最小公倍數時，「兩數互質」是判斷短除法運算是否結束的依據，例如用短除法求 36 和 48 兩數的最大公因數或最小公倍數時，先提出共同的質因數後，發現剩下的兩數沒有共同的質因數時，就能確定最大公因數「 $2 \times 2 \times 3$ 」就是共同質因數的乘積，最小公倍數「 $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$ 」是「共同質因數乘積 $2 \times 2 \times 3$ 」和「剩下質因數乘積 $3 \times 4 = 3 \times 2 \times 2$ 」的乘積。

$$\begin{array}{l} 2 \overline{) \begin{array}{cc} 36 & 48 \end{array}} \Rightarrow 2 \text{ 是共同的質因數。} \\ 2 \overline{) \begin{array}{cc} 18 & 24 \end{array}} \Rightarrow 2 \text{ 是共同的質因數。} \\ 3 \overline{) \begin{array}{cc} 9 & 12 \end{array}} \Rightarrow 3 \text{ 是共同的質因數。} \\ \quad 3 \quad 4 \Rightarrow \text{沒有其它共同的質因數。} \end{array}$$

此時教師可以給兩數互質下定義，甲、乙兩數沒有共同的質因數，數學上稱甲、乙兩數互質。

甲、乙兩數互質時，甲、乙兩數的最大公因數 1，所以甲、乙兩數的最大公因數是 1 時，數學上也稱甲、乙兩數互質。

3.以「找出 18 和 24 的最小公倍數」為例，說明如何利用短除法求兩數的最小公倍數。

步驟一：複習質因數分解法求兩數的最小公倍數，18 和 24 的最小公倍數「 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 」是「共同質因數乘積 2×3 」和「剩下質因數乘積 $2 \times 2 \times 3$ 」的乘積。

步驟二：
$$\begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline & 9 & 12 \end{array}$$

2 是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 2，得到 $18 = 2 \times 9$ ， $24 = 2 \times 12$ 。

步驟三：
$$\begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline 3 & 9 & 12 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

3 也是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 3，
得到 $18 = (2 \times 3) \times 3$ ， $24 = (2 \times 3) \times 4$ 。

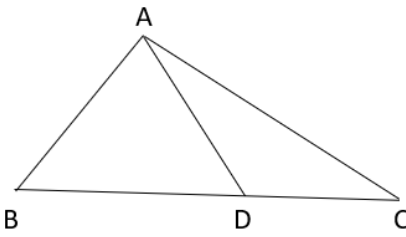
步驟四：3 和 4 互質，沒有共同的質因數。

步驟五：幫助學生認識下面的 4 可以質因數分解成 2×2 。

「共同質因數的乘積 2×3 」，是短除法左邊兩個質因數的乘積。

「剩下質因數乘積 $3 \times 2 \times 2 = 3 \times 4$ 」，是短除法下面兩數的乘積。

步驟六：最小公倍數是「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積，
只要將左邊的質因數 2、3，和下面的數字 3、4 相乘，就能得到：
最小公倍數 $= (2 \times 3) \times (3 \times 4)$ 。

題號	試題代碼					答案	
17	110-M6-A3-17					3	
評量指標	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。						
知識向度	數與計算		認知向度		解題思考		
題目	<p>三角形 ABC 中，\overline{BD} 和 \overline{DC} 的長度比為 4:3。 已經知道三角形 ABD 的面積是 16 平方公分。 請問三角形 ABC 的面積為多少平方公分？</p>  <p>① 12 ② 25 ③ 28 ④ 56</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：47%
	全 體	0.25	0.14	0.47	0.13	0.01	
	高分組	0.22	0.05	0.66	0.06	0.00	鑑別度：0.38
	低分組	0.28	0.23	0.28	0.21	0.01	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定兩個等高三角形底邊的邊長比及其中一個三角形的面積，要求學生算出另外兩個三角形的面積和，評量學生利用比和比值解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.38，正確答案為選項③，通過率為 47%，顯示近五成的學生已具備利用比和比值解決生活中問題的能力。
2. 有 25% 的學生選擇選項①(低分組有 28%)，這些學生可能不具備利用比和比值解決生活中問題的能力；也可能誤解題意，透過 $\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3 = 16 : 12$ ，算出三角形 ADC 的面積為 12 平方公分。
3. 有 14% 的學生選擇選項②(低分組有 23%)，這些學生可能不具備利用比和比值解決生活中問題的能力；也可能受放大縮小圖的影響，以為 $\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3$ ，三角形 ABD 面積：三角形 ADC 面積 = 16 : 9，所以三角形 ABC 的面積為 $16 + 9 = 25$ 平方公分。
4. 有 13% 的學生選擇選項④(低分組有 21%)，這些學生可能不具備利用比和比值解決生活中問題的能力；也可能受三角形面積公式除以 2 的影響，將所求出來的面積都再乘以 2 倍。

二、對應能力指標（97 課綱分年細目）

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活上的應用（含「百分率」、「折」）。	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。

三、教學建議

（一）錯誤類型的可能原因

1. 學生不知道兩三角形等高時，兩底邊的比等於兩三角形面積的比。
2. 學生受放大縮小圖的影響，以為 $\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3$ ，
三角形 ABD 面積：三角形 ADC 面積 = 16 : 9。

（二）核心概念與本題的教學重點

1. 教師先將本題的三角形特殊化，填上底和高的數據後，幫助學生發現
三角形 ABD 面積：三角形 ADC 面積 = 4 : 3 = $\overline{BD} : \overline{DC}$
2. 再舉一個相似的例子，幫助學生發現，
「三角形 ABD 面積：三角形 ADC 面積 = $\overline{BD} : \overline{DC}$ 」這個事實，並試著從面積公式幫助學生理解「三角形 ABD 面積：三角形 ADC 面積 = $\overline{BD} \times \text{高} \div 2 : \overline{DC} \times \text{高} \div 2$ 」
因為三角形 ABD 和三角形 ADC 的高相同，從相等的比來看，可以得到：
三角形 ABD 面積：三角形 ADC 面積 = $\overline{BD} : \overline{DC}$

題號	試題代碼		答案																
18	110-M6-A2-18		4																
評量指標	6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。																		
知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																
題目	<p>同一時刻，物體的高度與其影子長成正比。 下午4時，陳老師量出校園四周多項物品的高度及其影子長，整理成下表，請問表中哪項物體的資料<u>不正確</u>？</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>物體名稱</td> <td>榕樹</td> <td>鐘塔</td> <td>旗桿</td> <td>電線桿</td> </tr> <tr> <td>高度(cm)</td> <td>540</td> <td>900</td> <td>720</td> <td>600</td> </tr> <tr> <td>影子長(cm)</td> <td>900</td> <td>1500</td> <td>1200</td> <td>900</td> </tr> </table> <p>① 榕樹 ② 鐘塔 ③ 旗桿 ④ 電線桿</p>				物體名稱	榕樹	鐘塔	旗桿	電線桿	高度(cm)	540	900	720	600	影子長(cm)	900	1500	1200	900
物體名稱	榕樹	鐘塔	旗桿	電線桿															
高度(cm)	540	900	720	600															
影子長(cm)	900	1500	1200	900															
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：43%												
	全 體	0.24	0.16	0.16	0.43	0.00													
	高分組	0.15	0.07	0.08	0.70	0.00	鑑別度：0.48												
	低分組	0.29	0.23	0.25	0.22	0.01													

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題先說明物體的高度與其影子長成正比，以及四個物件同一時刻高度和影子長的對應表格，要求學生選出不是成正比的物件，評量學生利用成正比解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

- 1.本題鑑別度為 0.48，正確答案為選項④，通過率為 43%，顯示超過四成的學生已具備利用成正比解題的能力。
- 2.有 24%的學生選擇選項①(低分組有 29%)、16%的學生選擇選項②(低分組有 23%)、16%的學生選擇選項③(低分組有 25%)，這些學生尚未具備利用成正比解題的能力；也可能在求高度和影子長的比值時計算發生錯誤。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。	6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。	7-n-13 能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

學生不理解成正比的意義，不知道可以透過比值相等或最簡單整數比相等的關係來判斷是否成正比。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 「成正比」和「比或比值」的關係密切，比的相等關係強調將相比的兩類量寫在一起，直覺上較簡單；而成正比則是兩類量關係中的一種，應採用列表的方式記錄，並強調要使用比值來記錄正比關係，兩者間的關係，可運用列表的方式來統整。

下面以同學們同時量出不同長度的竹竿和對應影子長度的表格來說明：

竹竿長(公分)	40	50	60	70	80	90	100
影子長(公分)	20	25	30	35	40	45	50

國小階段可以透過比或比值的方式來表示不同長度的竹竿和對應影子長度的關係。

- (1) 利用最簡單整數比『竹竿長：影子長=2：1』來表示：

竹竿和對應影子長度的對應關係可以記成「40：20」、「50：25」、……、「100：50」，它們都是相等的比，可以利用最簡單整數比「竹竿長：影子長=2：1」來表示。

- (2) 利用比值「竹竿長：影子長=2」來表示：

「40：20」、「50：25」、...、「100：50」這些相等的比的比值都是2，可以透過比值「竹竿長：影子長=2」來表示這些相等的比，也可以說成「竹竿長是影子長的2倍」。

2. 成正比是兩個集合間特殊的對應關係，下面都是成正比的定義。

竹竿的長度和對應影子的長度同時改變，而它們的比值不變，數學上稱竹竿的長度和影子的長度「成正比」或「成正比例」。

- (1) 形如「 $y=kx$ 」的函數，數學上稱之為成正比。

- (2) 如果函數的圖形是過原點的直線，數學上稱之為成正比。

國小階段尚未引入函數的記法，只能透過(1)溝通成正比的意義。

3. 讓學生知道兩量變化時，一量增加，另一量也跟著增加的現象，並不一定是正比關係，並能判斷。

例如：父和子的年齡、正方形邊長與面積的關係等，都不是正比的關係。

題號	試題代碼					答案	
19	110-M6-D2-19					3	
評量指標	6-a-01 能理解等量公理。						
知識向度	代數		認知向度		程序執行		
題目	已知 $3 \times 8 + 5 = 20 + 27 \div 3$ ，請問下列哪個算式 <u>錯誤</u> ？ ① $(3 \times 8 + 5) - 5 = (20 + 27 \div 3) - 5$ ② $3 \times 8 + 5 - 20 = 20 + 27 \div 3 - 20$ ③ $3 \times 8 + 5 \times 3 = 20 + 27 \div 3 \times 3$ ④ $54 + 3 \times 8 + 5 = 54 + 20 + 27 \div 3$						
選答率	選項	1	2	3*	4	其他	通過率：47%
	全體	0.17	0.13	0.47	0.22	0.00	
	高分組	0.06	0.04	0.79	0.11	0.00	鑑別度：0.58
	低分組	0.27	0.22	0.21	0.29	0.01	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定一個等式，要求學生選出等號兩邊同加、同減、同乘或同除一數後的正確的算式，評量學生利用等量公理解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項③，通過率為 47%，顯示近五成的學生已具備利用等量公理解題的能力。
2. 有 17% 的學生選擇選項①(低分組有 27%)，這些學生可能不具備利用等量公理解題的能力；也可能已具備利用等量公理解題的能力，但誤解題意，選出正確的選項。
3. 有 13% 的學生選擇選項②(低分組有 22%)，22% 的學生選擇選項④(低分組有 29%)，這些學生可能不具備利用等量公理解題的能力；也可能無法將 $3 \times 8 + 5$ 和 $20 + 27 \div 3$ 看成兩個數，必須算出答案才能判斷等式是否成立，但是在計算時發生錯誤。

二、對應能力指標（97 課綱分年細目）

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-n-03 能用 $<$ 、 $=$ 與 $>$ 表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律。(同 2-a-01) 5-a-04 能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。	6-a-01 能理解等量公理。	6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13) A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生無法將算式解讀為數字，學生可能知道等量加法公理「 $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$ 」，但是無法將「 $3 \times 8 + 5$ 」和「 $20 + 27 \div 3$ 」這兩個答案相等的算式視為「 a 」和「 b 」，可以記成「 $a=b$ 」。
因此題目給定「 $3 \times 8 + 5 = 20 + 27 \div 3$ 」，學生必須算出答案才知道「 $(3 \times 8 + 5) + 8 = (20 + 27 \div 3) + 8$ 」。
2. 學生可能將等號看成「得到答案」的意義，而不是看成「兩邊一樣大」的意義。
例如學生接受「 $5 + 3 = 8$ 」的記法，但是不接受「 $8 = 5 + 3$ 」的記法。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 一年級加法與減法算式中的等號為「得到答案」的意義。
以「5 顆蘋果和 3 顆蘋果合起來有多少顆蘋果？」為例，學生解題時會先畫出 5 顆蘋果和 3 顆蘋果，再點數合起來有 8 顆蘋果，學生的解題活動中只出現 8 顆蘋果，加法算式「 $5 + 3 = 8$ 」中「 $5 + 3$ 」和「 8 」指的都是那 8 顆蘋果。
「 $5 + 3 = 8$ 」記錄 5 顆和 3 顆合起來的答案是 8 顆，算式中的等號是得到答案的意義。
部份學生不接受「 $8 = 5 + 3$ 」或「 $5 + 3 = 9 - 1$ 」，可能的原因是將等號看成得到答案，而不是兩邊一樣大。
二年級透過比較活動，加法與減法算式中的等號才是「兩邊一樣大」的意義。
等號表示「兩邊一樣大」，是六年級學習等量公理的前置經驗。
2. 教師可以提問「 $5 + 3$ 和 8，誰比誰大？」，引入 $5 + 3$ 和 8 一樣大，再將 $5 + 3$ 和 8 一樣大的結果記成「 $5 + 3 = 8$ 」，此時加法算式「 $5 + 3 = 8$ 」中 $5 + 3$ 和 8 是兩個不同的數，「 $5 + 3 = 8$ 」記錄 $5 + 3$ 和 8 一樣大，算式中的等號是「兩邊一樣大」的意義。
教師可以提問「8 和 $5 + 3$ ，誰比誰大？」、「 $5 + 3$ 和 $9 - 1$ ，誰比誰大？」，幫

助學生用「 $8=5+3$ 」、「 $5+3=9-1$ 」來記錄，幫助學生理解算式中的等號是「兩邊一樣大」的意義。

3.建議教師協助學生將一個運算式子視為一個數，例如 $3+5=11-3$ ，相等的兩數（「 $3+5$ 」和「 $11-3$ 」）同加、同減、同乘、同除，其值不變。也就是：

$$(3+5)+2=(11-3)+2$$

$$15-(3+5)=15-(11-3)$$

$$(3+5)\times 2=(11-3)\times 2$$

$$(3+5)\div 2=(11-3)\div 2$$

在透過四則運算的運算次序來幫助學生看到括號的省略，

$3+5+2=11-3+2$ 是正確的；

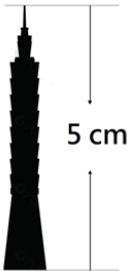
$15-3+5=15-11-3$ 是錯誤的；

$3+5\times 2=11-3\times 2$ 是錯誤的；

$3+5\div 2=11-3\div 2$ 是錯誤的。

4.學生須具備將一個運算式子視為一個數的能力，未來在國中的未知數解題才能將 $2\times(y+3)=4$ 的「 $y+3$ 」視為一個數。

5.回到原題目，檢視學生是否能將上述概念運用得宜。

題號	試題代碼					答案	
20	110-M6-C1-20					3	
評量指標	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。						
知識向度	幾何		認知向度		概念理解		
題目	<p>臺北 101 大樓的實際高度約 500 公尺，下圖是它的縮小圖，請問下列何者是這張縮小圖的比例尺？</p>  <p>① 1:500 ② 10000:1 ③ $\frac{1}{10000}$ ④ $\frac{1}{50000}$</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：38%
	全 體	0.24	0.18	0.38	0.20	0.00	
	高分組	0.05	0.15	0.69	0.11	0.00	鑑別度：0.56
	低分組	0.43	0.17	0.13	0.27	0.01	
一、試題分析							
(一) 評量目標說明							
本題給定物體的實際高度和縮小圖上的高度，要求學生選出縮小圖的比例尺，評量學生是否理解比例尺的意義。							
(二) 選項及學生表現說明							
1.本題鑑別度為 0.56，正確答案為選項③，通過率為 38%，顯示近四成的學生已理解比例尺的意義。							
2.有 24%的學生選擇選項①(低分組有 43%)，這些學生可能尚未理解比例尺的意義，看到大樓的實際高度約 500 公尺的數字 500，就以 1：500 為答案；也可能誤解題意，忽略了縮小圖中物體高度為 5 公分、也忽略了物體實際高度和縮小圖上的高度單位不一樣，直接以 1：500 為答案。							
3.有 20%的學生選擇選項④(低分組有 27%)，這些學生可能尚未理解比例尺的意							

義；也可能誤解題意，算出實際高度是 50000 公分後，忽略了縮小圖中物體高度為 5 公分， $1:50000$ 的比值為 $\frac{1}{50000}$ ，以 $\frac{1}{50000}$ 為答案。

4. 有 18% 的學生選擇選項②(低分組有 17%)，這些學生可能尚未理解比例尺的意義；也可能正確算出物體實際高度與縮小圖高度的比是 10000:1，但是不知道比例尺的後項必須是物體實際高度的約定。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。	9-s-01 能理解平面圖形縮放的意義。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生不知道描述比例尺時，必須以實際長度為後項的約定。
2. 學生無法連絡放大圖、縮小圖和比例尺間的關係。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師應幫助學生連絡「比」、「比值」和「幾倍放大(縮小)圖」的關係。教師應幫助學生認識下面三種表示法都可以說明「三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖」的關係，為引入比例尺的教學鋪路。

第一種：比的表示法

$$\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 1, \overline{EF} : \overline{BC} = 2 : 1, \overline{DF} : \overline{AC} = 2 : 1$$

第二種：比值的表示法

$$\overline{DE} \div \overline{AB} = 2, \overline{EF} \div \overline{BC} = 2, \overline{DF} \div \overline{AC} = 2$$

第三種：倍的表示法

$$\overline{DE} \text{ 長是 } \overline{AB} \text{ 的 } 2 \text{ 倍}, \overline{EF} \text{ 長是 } \overline{BC} \text{ 的 } 2 \text{ 倍}, \overline{DF} \text{ 長是 } \overline{AC} \text{ 的 } 2 \text{ 倍}$$

2. 建議教師透過縮小圖的情境引入比例尺，例如畫出籃球場 $\frac{1}{10}$ 倍的縮小圖，再透過 $\frac{1}{10}$ 倍的縮小圖引入比例尺的意義及記法，不宜直接透過地圖引入比例尺。

3. 數學上習慣將實際的長度當作基準量，地圖上的長度當作比較量，下面以「實際長度 1 公里，地圖上長 1 公分」為例，說明比例尺的表示法。

有兩種表示比例尺的方法，一種是利用同單位的比或比值來表示，另一種是利用不同單位的比或比值來表示。

(1) 同單位的表示法

同單位的表示法又可以區分為比的表示法和比值的表示法，因為單位相同，因此同單位的表示法都不記錄單位。

①比的表示法：1 公里 = 1000 公尺 = 100000 公分

可以用「1 : 100000」或「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」來表示。

「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」的記法較容易連絡比和比值的關係。

使用 1 : 100000 溝通比例尺時，表示地圖上長 1 公分，實際的長是 100000 公分；地圖上長 1 公尺，實際的長是 100000 公尺；地圖上長 1 毫米，實際的長是 100000 毫米。

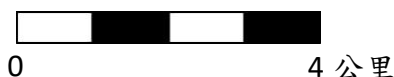
②比值的表示法：「1 : 100000」和「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」的比值都是 $\frac{1}{100000}$ 。

(2)不同單位的表示法

不同單位的表示法也可以區分為比的表示法和比值的表示法，因為單位不同，因此不同單位的表示法都必須記錄單位。

①比的表示法：「1 公分 : 1 公里」。

②比值的表示法：1 公分 : 1 公里 = 1 公分 / 公里，日常生活中不常出現這種記法，都用下面的圖示法來呈現。



4.以「實際長度是 800 公尺，在地圖上長 4 公分，這張地圖比例尺的比和比值各是多少？」為例，說明如何幫助學生解題。

(1)求比例尺的比

在用「比」記錄比例尺時，習慣把地圖上的長度當作前項，實際長度當作後項：

$$\begin{aligned} \text{地圖長度 : 實際長度} &= 4 \text{ 公分} : 800 \text{ 公尺} \\ &= 4 \text{ 公分} : 80000 \text{ 公分} \\ &= 1 : 20000 \end{aligned}$$

(2)求比例尺的比值

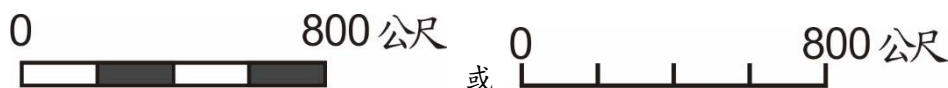
可以透過比例尺的比求比值

$$1 : 20000 = 1 \div 20000 = \frac{1}{20000}$$

(3)比例尺的圖示

以圖示標示比例尺的方式，常在地圖上出現。

「實際長度是 800 公尺，在地圖上長 4 公分」換成圖示如下：



上圖的 1 格是 1 公分。4 格表示是地圖上的 4 公分，在 4 公分處標示 800 公尺，意即「在地圖上的 4 公分代表實際距離的 800 公尺」。

題號	試題代碼					答案	
21	110-M6-A3-21					2	
評量指標	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。						
知識向度	數與計算		認知向度		解題思考		
題目	<p>「區間測速」是指車輛行經某路段後，以該車輛行駛這段路程的平均速率，判定是否有超速。一隧道全長 30 公里，且在隧道出入口間採用區間測速，速度上限為時速 70 公里。</p> <p>郭先生進入隧道先以時速 100 公里行駛了 0.2 小時，之後放慢速度，再行駛了 0.4 小時後抵達隧道出口。</p> <p>賴小姐進入隧道先以時速 50 公里行駛了 0.2 小時，之後加快速度，以時速 100 公里行駛至隧道出口。</p> <p>請問誰超速了？</p> <p>①只有郭先生 ②只有賴小姐 ③兩人都超速 ④兩人都沒有超速</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：43%
	全 體	0.14	0.43	0.30	0.12	0.00	
	高分組	0.08	0.55	0.26	0.11	0.00	鑑別度：0.25
	低分組	0.23	0.30	0.33	0.14	0.00	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定區間測速的定義以及超速的上限，要求學生判斷進入該區間的 2 名駕駛是否超速，評量學生利用速度及其常用單位解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.25，正確答案為選項②，通過率為 43%，顯示超過四成的學生已具備利用速度及其常用單位解題的能力。
2. 有 14% 的學生選擇選項①(低分組有 23%)，有 30% 的學生選擇選項③(低分組有 33%)，有 12% 的學生選擇選項④(低分組有 14%)，這些學生可能不具備利用速度及其常用單位解題的能力；也可能不理解題意，不知道區間測速的定義；也可能不理解平均速率的意義，或在算平均速率時計算發生錯誤。

二、對應能力指標（97 課綱分年細目）

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活上的應用（含「百分率」、「折」）。 6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。

三、教學建議

（一）錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不理解「區間測速」或「平均速率」的意義。
2. 學生無法進行「時間」、「距離」、「速率」三者間關係的轉換。例如給定距離和速率，學生無法求出時間，給定時間和速率，學生無法求出距離。

（二）核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師先幫助孩子釐清「區間測速」的定義。「區間測速」是指車輛行經某路段後，以該車輛行駛這段路程的平均速率，判定是否有超速。因為車輛行駛某路段的時速並非等速，所以我們取平均速率來判定是否超速。
2. 只有個數才能相加減，例如 5 個蘋果和 3 個蘋果可以相加減，5 公里指的是 5 個 1 公里，3 公里指的是 3 個 1 公里，所以 5 公里和 3 公里也可以相加減，5 小時指的是 5 個 1 小時，3 小時指的是 3 個小時，所以 5 小時和 3 小時也可以相加減。

速率不是個數，所以速率不能直接相加減，例如把時速 60 公里和時速 12 公里相加，不會變成時速 72 公里。

所以如果某車行駛 A 路段的速率為 60 公里，行駛 B 路段的速率為 80 公里，平均速率並非 $(60+80) \div 2 = 70$

平均速率的定義為：總距離 ÷ 總時間，也就是總距離對總時間的比值。

3. 幫助孩子確實理解距離、時間和速率的關係，以及如果距離、時間、速率某兩個量已知，如何求第三個量。

(1) 首先，教師應幫助學生先釐清日常生活中常見速率的用語「時速 60 公里或每小時跑 60 公里」，可以改記成比「60 公里：1 小時」或比值「60 公里/小時」。

(2) 以「甲車的速率是 60 公里/小時，跑 300 公里要花多少時間？」為例，提出四種解題策略，教師可以提供學生這四種解題策略的經驗，但不宜限制學生使用某種解題策略來解題。

① 單價法：甲車的速率是 60 公里/小時，也就是甲車每 1 小時跑 60 公里， $300 \div 60 = 5$ ，就能得到甲車跑 300 公里要 5 小時的答案。

②倍數法：甲車的速率是 60 公里/小時，也就是甲車每 1 小時跑 60 公里，300 公里是 60 公里的 5 倍， $1 \times 5 = 5$ ，就能得到甲車跑 300 公里要 5 小時的答案。

③比的加法：60 公里/小時 = 60 公里 : 1 小時，
60 公里 : 1 小時
60 公里 : 1 小時
60 公里 : 1 小時
60 公里 : 1 小時
60 公里 : 1 小時

合起來：300 公里 : 5 小時

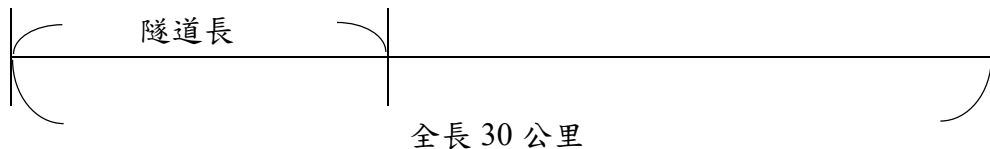
就能得到甲車跑 300 公里要 5 小時的答案。

④比例式：60 公里/小時 = 60 公里 : 1 小時， $60 : 1 = 300 : \square$ ，
得到 $300 \div 60 = 5$ ， $\square = 1 \times 5$ ，就能得到甲車跑 300 公里要 5 小時的答案。

4. 低成就學生比較容易掌握比例式的運算，也就是能夠直接看到兩量關係的方式，才不會需要硬記公式，而且因背錯公式或用錯公式造成運算上的錯誤。

郭先生的平均速率為總距離：總時間 = $30\text{km} : (0.2 + 0.4)\text{小時} = 30\text{km} : 0.6\text{小時} = 50\text{km} : 1\text{小時} = 50\text{km}/\text{小時}$

賴小姐的平均速率為總距離：總時間，發現加快速度後所花的時間未知，因此要先求加快速度後的時間，但題目只提供時速 100 公里的資訊，換句話說必須知道行駛該路段的距離，而這段距離則需由全長扣掉隧道的距離。



隧道長可利用時速 50 公里也就是 $50\text{公里} : 1\text{小時} = \square\text{公里} : 0.2\text{小時}$ ，得到 $\square = 10$
利用全長 $30 - 10 = 20$ ，得到出隧道後的距離為 20 公里。

再以時速 100 公里也就是 $100\text{公里} : 1\text{小時} = 20\text{公里} : \Delta\text{小時}$ ，
得到 $\Delta = 1/5\text{小時} = 0.2\text{小時}$ 。

最後利用平均速率為總距離：總時間

= $30\text{公里} : (0.2 + 0.2)\text{小時} = 30\text{公里} : 0.4\text{小時} = 75\text{公里} : 1\text{小時} = 75\text{公里}/\text{小時}$

依上述結果進行選答，因此只有賴小姐超速。

題號	試題代碼				答案		
22	110-M6-A3-22				4		
評量指標	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。						
知識向度	數與計算	認知向度		解題思考			
題目	<p>「農場的$\frac{1}{5}$是菜園，菜園的$\frac{1}{28}$種青花菜，已知種青花菜的面積是$2\frac{4}{5}$公畝，請問農場的面積是多少公畝？」</p> <p>下列哪個算式可以算出正確答案？</p> <p>① $2\frac{4}{5} \times \frac{1}{28} \times \frac{1}{5}$</p> <p>② $2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \times \frac{1}{5}$</p> <p>③ $2\frac{4}{5} \times \frac{1}{28} \div \frac{1}{5}$</p> <p>④ $2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \div \frac{1}{5}$</p>						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：38%
	全 體	0.23	0.21	0.18	0.38	0.00	
	高分組	0.10	0.11	0.07	0.71	0.00	鑑別度：0.58
	低分組	0.30	0.29	0.27	0.13	0.01	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題是連除分數兩步驟的文字題，要求學生選出能算出答案的算式，評量學生連除分數兩步驟問題列式的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項④，通過率為 38%，顯示近四成的學生已具備連除分數兩步驟問題列式的能力。
2. 有 23% 的學生選擇選項①(低分組有 30%)、21% 的學生選擇選項②(低分組有 29%)、18% 的學生選擇選項③(低分組有 27%)，這些學生可能不具備連除分數兩步驟問題列式的能力；也可能尚未掌握分數情境乘除互逆的關係；也可能誤解或不理解題意。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。	7-a-03 能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生較容易依題意列出算式 $\square \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{28} = 2\frac{4}{5}$ ，如果學生無法掌握分數情境乘除互逆的關係，或不具備先列式再利用等量公理解題的能力，就無法成功的解題。
2. 如果學生無法列出算式 $\square \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{28} = 2\frac{4}{5}$ ，只能在問題情境中利用乘除互逆的關係來解題，利用乘除互逆才能解題的連除兩步驟問題，對低分組學生而言相當的困難。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 二步驟問題的教學包含三個重點，第一個重點是能夠解決問題，並用二個算式記錄解題過程；第二個重點是能夠用併式記錄解題過程；第三個重點是能夠列式，並用逐次減項的記法記錄解題過程。
2. 以分數兩步驟問題「媽媽買了 $\frac{10}{3}$ 公升的果汁 6 瓶，全部分裝到 $\frac{5}{4}$ 公升的杯子裡，相當於裝滿幾杯？」為例，如果學生無法解題，建議教師先將原問題修改為整數情境的問題，例如修改為「媽媽買了 10 公升的果汁 6 瓶，全部分裝到 5 公升的瓶子裡，相當於裝滿幾瓶？」。待學生解題成功後，再回到原分數情境的問題，希望學生能類比整數情境的問題來解決相同情境分數的問題。
3. 下面以「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」為例，說明整數兩步驟問題的教學流程。
教師可以仿下面的教學流程，進行分數兩步驟問題的教學。

(1) 用兩個算式記錄解題活動

$$15 + 25 = 40, 40 \div 5 = 8, \text{答：可以買 8 枝。}$$

(2) 將兩個算式改記成併式的記法

$$\text{將「} 15 + 25 = 40, 40 \div 5 = 8 \text{」改記成「} (15 + 25) \div 5 = 8 \text{」}$$

(3) 用併式記錄解題活動

$$(15 + 25) \div 5 = 8, \text{答：可以買 8 枝。}$$

(4) 用算式填充題來列式

$$(15 + 25) \div 5 = (\quad)$$

(5) 先列式，再用逐次減項記錄解題活動

$$(15 + 25) \div 5 = (\quad)$$

$$(15 + 25) \div 5$$

$$= 40 \div 5$$

$$= 8$$

答：可以買 8 枝。

4. 以逐次減項的記法「 $5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10 = 100 - 10 = 90$ 」為例，它是以下解題過程的摘要記法：

$$5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10, 5 \times 20 - 10 = 100 - 10, 100 - 10 = 90$$

因為等號滿足遞移性($A=B$ ， $B=C$ ， $C=D$ ，所以 $A=C$)，

所以 $5 \times (12 + 8) - 10 = 90$ 。

逐次減項記法中除了把重複出現的算式「 $5 \times 20 - 10$ 」和「 $100 - 10$ 」只記一次之外，還把解題過程最重要的部份「因為等號滿足遞移性，所以 $5 \times (12 + 8) - 10 = 90$ 」也省略了。

教師可以透過詢問為什麼「 $5 \times (12 + 8) - 10$ 」的答案是 90，檢查學生是否掌握利用等號遞移性記錄的意義。

5.本題為「分數乘法情境描述」的乘除互逆情境題，學童宜先依照題意列出算式填充題，再以乘除互逆的關係從而列出解題的二步驟列式。建議教師在教學時，指導學童先依題意列出算式填充題後再解題，比較能看出乘除互逆的關係。

題號	試題代碼					答案	
23	110-M6-A2-23					1	
評量指標	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數（含四捨五入法），並做加、減、乘、除之估算。						
知識向度	數與計算		認知向度		程序執行		
題目	<p>已知 1 磅大約等於 0.4536 公斤，飄香咖啡店進了 16 磅的咖啡豆，如果以每公斤 400 元賣出，全部賣出後可得到多少元？ （先以四捨五入法取概數至小數點後第二位再計算）</p> <p>① 2880 ② 2903 ③ 2903.04 ④ 2904</p>						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：38%
	全 體	0.38	0.19	0.22	0.20	0.01	
	高分組	0.56	0.11	0.15	0.18	0.00	鑑別度：0.36
	低分組	0.21	0.27	0.29	0.23	0.01	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題是小數乘法兩步驟問題，要求學生先將題目所提供的小數以四捨五入法取概數至小數點後第二位，再計算出答案，評量學生是否具備在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除估算的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.36，正確答案為選項①，通過率為 38%，顯示近四成的學生已具備在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除估算的能力。
2. 有 19%的學生選擇選項②(低分組有 27%)，這些學生可能不具備在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除估算的能力；也可能誤解題意，或忽略了「先以四捨五入法取概數至小數點後第二位再計算」的限制，算出 $0.4536 \times 16 \times 400 = 2903.04$ 之後，選擇選項中最接近的整數 2903 為答案。
3. 有 22%的學生選擇選項③(低分組有 29%)，這些學生可能不具備在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除估算的能力；也可能誤解題意，或忽略了「先以四捨五入法取概數至小數點後第二位再計算」的限制，算出 $0.4536 \times 16 \times 400 = 2903.04$ 之後，直接選答。
4. 有 20%的學生選擇選項④(低分組有 23%)，這些學生可能不具備在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除估算的能力；也可能誤解題意，或忽略了「先以四捨五入法取概數至小數點後第二位再

計算」的限制，算出 $0.4536 \times 16 = 7.2576$ ，先以四捨五入法取概數到小數第二位，也就是 7.26，再以 $7.26 \times 400 = 2904$ 算出答案。

二、對應能力指標（97 課綱分年細目）

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-06 能在具體情境中，對大數在指定位數取概數（含四捨五入法），並做加、減之估算。	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數（含四捨五入法），並做加、減、乘、除之估算。	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。 6-d-03 能報讀生活中常用的圓形圖，並能整理生活中的資料，製成圓形圖。

三、教學建議

（一）錯誤類型的可能原因

1. 學生不理解「先以四捨五入法取概數至小數點後第二位再計算」指的是先把 0.4536 公斤取概數至小數點後第二位後，再算出 16 磅的咖啡豆要賣多少元，學生直接算出 0.4536 公斤的咖啡豆要賣多少元，再取概數至小數點後第二位。
2. 學生能解決整數情境四捨五入法取概數的問題，但是無法解決小數情境四捨五入法取概數的問題。

（二）核心概念與本題的教學重點

1. 教師應先複習在整數情境取概數並做加、減計算的問題，再引入在整數情境取概數並做乘、除計算的問題。
以問題「工廠 9 天可以生產 360018 顆燈泡，請問 1 天大約可以生產幾萬顆燈泡？（以萬為單位，先以四捨五入法取概數到萬位再計算）」為例，教師幫助學生先將 360018 以四捨五入法取概數到萬位，得到「36 萬」，再以 $36 \div 9 = 4$ ，算出答案為 1 天大約生產 4 萬顆燈泡。
2. 將整數情境類推到本題的小數情境，引導學生進行 1 磅大約等於 0.4536 公斤，以四捨五入法取概數至小數點後第二位，所以 1 磅大約是 0.45 公斤。
3. 透過 $0.45 \times 16 \times 400 = 2880$ (元) 得到答案。

如果學生有列式上的困難，可透過如下的關係式幫助學生列式：

1 磅	0.45 公斤	$0.45 \times 16 = 7.2$ (公斤)
16 磅	? 公斤	

1 公斤	400 元	$7.2 \times 400 = 2880$ (元)
7.2 公斤	? 元	

題號	試題代碼					答案	
24	110-M6-A2-24					1	
評量指標	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。						
知識向度	數與計算		認知向度		程序執行		
題目	<p>已知 1 桶果汁，每 16 公升裝成一瓶，全部裝完，相當於裝成 $13\frac{3}{8}$ 瓶。</p> <p>如果將這桶果汁，每 16 公升裝成一瓶，最多可以裝滿 13 瓶，還剩下多少公升？</p> <p>① 6</p> <p>② 0.3</p> <p>③ $\frac{3}{8}$</p> <p>④ $\frac{128}{3}$</p>						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：37%
	全 體	0.37	0.11	0.44	0.07	0.01	
	高分組	0.68	0.04	0.25	0.02	0.01	鑑別度：0.52
	低分組	0.16	0.20	0.49	0.14	0.01	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定描述「 $\square \div 16 = 13\frac{3}{8}$ 」的文字題，要求學生算出改記成「 $\square \div 16 = 13 \dots r$ 」後的餘數，評量學生利用分數除法解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.52，正確答案為選項①，通過率為 37%，顯示近四成的學生已具備利用分數除法解題的能力。
2. 有 44% 的學生選擇選項③(低分組有 49%)，這些學生可能尚未具備利用分數除法解題的能力，不知道 $13\frac{3}{8}$ 瓶指的是「13 瓶 + $\frac{3}{8}$ 瓶」，直接將未裝滿 1 瓶的 $\frac{3}{8}$ 瓶看成 $\frac{3}{8}$ 公升，得到剩下 $\frac{3}{8}$ 公升的答案。
3. 有 11% 的學生選擇選項②(低分組有 20%)，這些學生可能尚未具備利用分數除法解題的能力；也可能知道 $13\frac{3}{8}$ 瓶指的是「13 瓶 + $\frac{3}{8}$ 瓶」，但是將剩下的 $\frac{3}{8}$ 瓶轉換成幾公升時發生錯誤，誤認為 $\frac{3}{8}$ 瓶 = 0.3 公升。

4.有 7%的學生選擇選項④(低分組有 14%)，這些學生可能尚未具備利用分數除法解題的能力；也可能知道 $13\frac{3}{8}$ 瓶指的是「13 瓶 + $\frac{3}{8}$ 瓶」，但是將剩下的 $\frac{3}{8}$ 瓶轉換成幾公升時發生錯誤，誤認為 $\frac{3}{8}$ 瓶 = $16 \div \frac{3}{8} = \frac{128}{3}$ 公升。

二、對應能力指標 (97 課綱分年細目)

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。	7-n-06 能理解負數的特性並熟練數(含小數、分數)的四則混合運算。

三、教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

- 1.學生無法進行「 $a \div b = \frac{a}{b}$ 」和「 $a \div b = q \dots r$ 」這兩種紀錄格式的轉換，不知道 $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ 。
- 2.學生不知道將「 $\square \div 16 = 13\frac{3}{8}$ 」改記成「 $\square \div 16 = 13 \dots r$ 」時，「 $\frac{3}{8} = \frac{r}{16}$ 」或「 $16 \times \frac{3}{8} = r$ 」的關係。
- 3.學生會透過顛倒相乘算出分數除以分數的答案，但是不知道為什麼可以顛倒相乘。
- 4.學生也可以透過乘除互逆的關係， $16 \times 13\frac{3}{8} = 214$ (公升)，先算出 1 桶果汁有 214 公升， $214 \div 16 = 13 \dots 6$ ，得到剩下 6 公升的答案。

(二) 核心概念與本題的教學重點

- 1.本題有兩種解題的方法：

方法一：先算出 1 桶果汁有多少公升，再算出 16 公升裝成一瓶，最多可以滿幾瓶，還剩下多少公升？

$$16 \times 13\frac{3}{8} = 214(\text{公升}), \text{算出 1 桶果汁有 214 公升,}$$

$$214 \div 16 = 13 \dots 6, \text{得到剩下 6 公升的答案。}$$

方法二：將 $13\frac{3}{8}$ 瓶解讀為裝滿 13 瓶，剩下 $\frac{3}{8}$ 瓶，再算出 $\frac{3}{8}$ 瓶是多少公升？

$$1 \text{ 瓶是 } 16 \text{ 公升, } 16 \times \frac{3}{8} = 6, \text{得到剩下 6 公升的答案。}$$
- 2.以「① $70 \div 20$ 、② $7 \div 2$ 、③ $0.7 \div 0.2$ 」為例，當我們限制記錄的格式是 $a \div b = q \dots r$ 時，

這三題的答案不相同；當我們限制記錄的格式是 $a \div b = \frac{a}{b}$ 時，這三題的答案相同。

(1) 記錄格式是 $a \div b = q \dots r$:

① $70 \div 20 = 3 \dots 10$ 、② $7 \div 2 = 3 \dots 1$ 、③ $0.7 \div 0.2 = 3 \dots 0.1$ ，這三題的答案不相同。

(2) 記錄格式是 $a \div b = \frac{a}{b}$:

① $70 \div 20 = \frac{70}{20} = \frac{7}{2}$ 、② $7 \div 2 = \frac{7}{2}$ 、③ $0.7 \div 0.2 = \frac{0.7}{0.2} = \frac{7}{2}$ ，這三題的答案相同。

教師布題時應強調答案是哪種記錄格式，如果要求的記錄格式是 $a \div b = q \dots r$ ，不論餘數為 0 或不為 0，布題時應同時詢問商及餘數，如果要求的記錄格式是

$a \div b = \frac{a}{b}$ ，建議要加上「全部分完」的限制。

3. 以「 $\frac{41}{5}$ 公升果汁， $\frac{4}{7}$ 公升裝 1 瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？」為例，說明

如何引入沒有餘數的分數除法算則(顛倒相乘)。

步驟一：利用被除數及除數同時換單位策略來解題。

$$\begin{aligned} & \frac{41}{5} \div \frac{4}{7} \\ &= \frac{41 \times 7}{5 \times 7} \div \frac{4 \times 5}{7 \times 5} \rightarrow (\text{通分}) \\ &= (41 \times 7) \div (4 \times 5) \rightarrow (\text{同時以 } \frac{1}{35} \text{ 公升換單位}) \\ &= \frac{41 \times 7}{4 \times 5}, \text{ 答：相當於裝成 } \frac{41 \times 7}{4 \times 5} \text{ 瓶。} \end{aligned}$$

步驟二：學生不易發現問題「 $\frac{41}{5} \div \frac{4}{7}$ 」和答案「 $\frac{41 \times 7}{4 \times 5}$ 」的關係。

教師先將答案改記成兩分數的乘積。

$$\begin{aligned} \frac{41 \times 7}{4 \times 5} &= \frac{41 \times 7}{5 \times 4} \rightarrow (\text{乘法交換律}) \\ &= \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} \rightarrow (\text{分數} \times \text{分數} = \frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}}) \end{aligned}$$

步驟三：要求學生觀察問題「 $\frac{41}{5} \div \frac{4}{7}$ 」和改寫後答案「 $\frac{41}{5} \times \frac{7}{4}$ 」的關係。

幫助學生發現可以利用顛倒相乘的方式直接算出答案。

4. 以「 $\frac{41}{5}$ 公升果汁， $\frac{4}{7}$ 公升裝 1 瓶，最多裝滿幾瓶，還剩下多少公升？」為例，

說明如何幫助學生解有餘數的包含除問題。

下面提供兩種解題的方法：

方法一：利用被除數和除數同時換單位策略來解題

$$\frac{41}{5} \text{公升} = \frac{287}{35} \text{公升} \Rightarrow 287 \text{ 個 } \frac{1}{35} \text{公升}$$

$$\frac{4}{7} \text{公升} = \frac{20}{35} \text{公升} \Rightarrow 20 \text{ 個 } \frac{1}{35} \text{公升}$$

$$287 \div 20 = 14(\text{瓶}) \dots 7 \text{ (7 個 } \frac{1}{35} \text{公升)}$$

$$\text{可以記成：} \frac{287}{35} \div \frac{20}{35} = 14 \dots \frac{7}{35} \left(\frac{7}{35} = \frac{1}{5} \right)$$

答：最多裝滿 14 瓶，剩下 $\frac{1}{5}$ 公升。

方法二：利用沒有餘數的分數除法算則(顛倒相乘)來解題

步驟一：利用顛倒相乘算出全部裝完相當於多少瓶

$$\frac{41}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{287}{20} = 14 \frac{7}{20} (\text{瓶})$$

步驟二：說明 $14 \frac{7}{20} = 14(\text{瓶}) + \frac{7}{20}(\text{瓶})$ ，

所以最多裝滿 14 瓶，剩下 $\frac{7}{20}$ 瓶。

步驟三：將剩下的 $\frac{7}{20}$ 瓶換成多少公升。

$$\frac{4}{7} \times \frac{7}{20} = \frac{1}{5} (\text{公升})$$

答：最多裝滿 14 瓶，剩下 $\frac{1}{5}$ 公升。

題號	試題代碼					答案	
25	110-M6-C3-25					2	
評量指標	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。						
知識向度	幾何		認知向度		解題思考		
題目	<p>在比例尺 1:1000 的地圖上，有一個長 5 公分、寬 3 公分的長方形土地，它的面積是多少平方公尺？（1 平方公尺=10000 平方公分）</p> <p>① 1.5 ② 1500 ③ 15000 ④ 15000000</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：28%
	全 體	0.22	0.28	0.30	0.18	0.02	
	高分組	0.22	0.52	0.13	0.12	0.01	鑑別度：0.38
	低分組	0.19	0.14	0.42	0.22	0.02	

一、試題分析

(一) 評量目標說明

本題給定用比表示的比例尺及地圖上長方形長邊和寬邊是多少公分，要求學生回答長方形實際的面積是多少平方公尺，評量學生是否認識比例尺，以及是否具備利用平面圖形放大、縮小對面積影響的性質解題的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.38，正確答案為選項②，通過率為 28%，顯示近三成的學生已具備利用平面圖形放大、縮小對面積影響的性質解題的能力，也認識比例尺。
2. 有 22% 的學生選擇選項①(低分組有 19%)，這些學生可能誤認為在比例尺 1:1000 的地圖上，面積是 15 平方公分的長方形，實際的面積是 15000 平方公分 ($15 \times 1000 = 15000$)， 15000 平方公分 = 1.5 平方公尺 ($15000 \div 10000$)。
3. 有 30% 的學生選擇選項③(低分組有 42%)，這些學生可能誤認為在比例尺 1:1000 的地圖上，面積是 15 平方公分的長方形，實際的面積是 15000 平方公分 ($15 \times 1000 = 15000$)，這些學生可能也誤解題意，誤認為答案是問多少立方公分，直接以 15000 為答案。
4. 有 18% 的學生選擇選項④(低分組有 22%)，這些學生可能誤認為在比例尺 1:1000 的地圖上，面積是 15 平方公分的長方形，實際的面積是 15000 平方公分 ($15 \times 1000 = 15000$)，這些學生在平方公分聚成平方公尺時也發生錯誤， 15000 平方公分 = 150000000 平方公尺 ($15000 \times 10000 = 150000000$)。

二、對應能力指標（97 課綱分年細目）

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	<p>4-n-17 能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並作相關計算。</p> <p>5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。</p>	<p>6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。</p>	<p>9-s-02 能理解多邊形相似的意義。</p> <p>9-s-03 能理解三角形的相似性質。</p>

三、教學建議

（一）錯誤類型的可能原因

1. 學生不理解比例尺的意義，不知道比例尺 1:1000 指的是地圖上的邊長是 1 公分時，實際的長度是 1000 公分。
學生誤認為在比例尺 1:1000 的地圖上，面積是 1 平方公分時，實際的面積是 1000 平方公分。
2. 教師應提醒學生必須由邊長開始解題，在比例尺 1:1000 的地圖上，長 5 公分、寬 3 公分的長方形，實際的圖形是長 5000 公分、寬 3000 公分的長方形。
3. 高分組有 22% 的學生選擇選項①，13% 的學生選擇選項③，12% 的學生選擇選項④，這些學生都誤認為在比例尺 1:1000 的地圖上，面積是 15 平方公分的長方形，實際的面積是 15000 平方公分($15 \times 1000 = 15000$)。
但是選擇選項①的學生正確的進行平方公分聚成平方公尺的活動，知道 15000 平方公分可以改記成 1.5 平方公尺。
4. 低分組有 42% 的學生選擇選項③，高分組有 13% 的學生選擇選項③，這些學生錯誤的算出在比例尺 1:1000 的地圖上，面積是 15 平方公分的長方形，實際的面積是 15000 平方公分($15 \times 1000 = 15000$)後，就停止解題，以 15000 為答案，顯示低分組學生可能一次只能處理一個概念的問題，無法同時處理兩個概念的問題。

（二）核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師透過縮小圖的情境引入比例尺，例如畫出籃球場 $\frac{1}{10}$ 倍的縮小圖，再透過 $\frac{1}{10}$ 倍的縮小圖引入比例尺的意義及記法，不宜直接透過地圖引入比例尺。
2. 以「將正方形甲對摺兩次，得到正方形乙，請問正方形乙是正方形甲的幾倍縮小圖？」為例，有兩種溝通幾倍縮小圖的方法。

第一種：利用邊長的關係來溝通

正方形甲和正方形乙相似，對應邊成比例，正方形乙的邊長是正方形甲對應邊長的 $\frac{1}{2}$ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。

第二種：利用面積的關係來溝通

正方形乙的面積是正方形甲面積的 $\frac{1}{4}$ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 $\frac{1}{4}$ 倍縮小圖。

因為長度比面積容易測量，因此數學上約定乙是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍縮小圖，指的是乙的邊長是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍，不是指乙的面積是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍。

3. 教師應幫助學生連絡「比」、「比值」和「幾倍放大(縮小)圖」的關係。

教師應幫助學生認識下面三種表示法都可以說明「三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖」的關係，為引入比例尺的教學鋪路。

第一種：比的表示法

$$\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 1, \overline{EF} : \overline{BC} = 2 : 1, \overline{DF} : \overline{AC} = 2 : 1$$

第二種：比值的表示法

$$\overline{DE} \div \overline{AB} = 2, \overline{EF} \div \overline{BC} = 2, \overline{DF} \div \overline{AC} = 2$$

第三種：倍的表示法

\overline{DE} 長是 \overline{AB} 的 2 倍， \overline{EF} 長是 \overline{BC} 的 2 倍， \overline{DF} 長是 \overline{AC} 的 2 倍

4. 數學上習慣將實際的長度當作基準量，地圖上的長度當作比較量，下面以「實際長度 1 公里，地圖上長 1 公分」為例，說明比例尺的表示法。

有兩種表示比例尺的方法，一種是利用同單位的比或比值來表示，另一種是利用不同單位的比或比值來表示。

(1) 同單位的表示法

同單位的表示法又可以區分為比的表示法和比值的表示法，因為單位相同，因此同單位的表示法都不記錄單位。

① 比的表示法：1 公里 = 1000 公尺 = 100000 公分

可以用「1 : 100000」或「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」來表示。

「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」的記法較容易連絡比和比值的關係。

使用 1 : 100000 溝通比例尺時，表示地圖上長 1 公分，實際的長是 100000 公分；地圖上長 1 公尺，實際的長是 100000 公尺；地圖上長 1 毫米，實際的長是 100000 毫米。

② 比值的表示法：「1 : 100000」和「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」的比值都是 $\frac{1}{100000}$ 。

(2)不同單位的表示法

不同單位的表示法也可以區分為比的表示法和比值的表示法，因為單位不同，因此不同單位的表示法都必須記錄單位。

①比的表示法：「1公分：1公里」。

②比值的表示法：1公分：1公里=1公分/公里，日常生活中不常出現這種記法，都用下面的圖示法來呈現。



伍、整體學力表現分析

一、不同背景變項學生整體學力表現分析

本計畫同時採用古典測驗理論(classical test theory, CTT)與試題反應理論(item response theory, IRT)三參數模式作為試題分析理論基礎，並以三參數模式進行學生能力估計。三參數模式有 a、b、c 三種參數，分別代表鑑別度、難度以及猜測度。學生能力估計值則參考 PISA 與 TIMSS 等國際大型測驗的作法，將估計出來的能力轉換至平均分數 500，標準差 100 的量尺上，再以轉換所得量尺分數進行不同背景變項學生表現分析。本年度數學六年級整體學生學力表現分布狀況，如圖 5-1 所示。

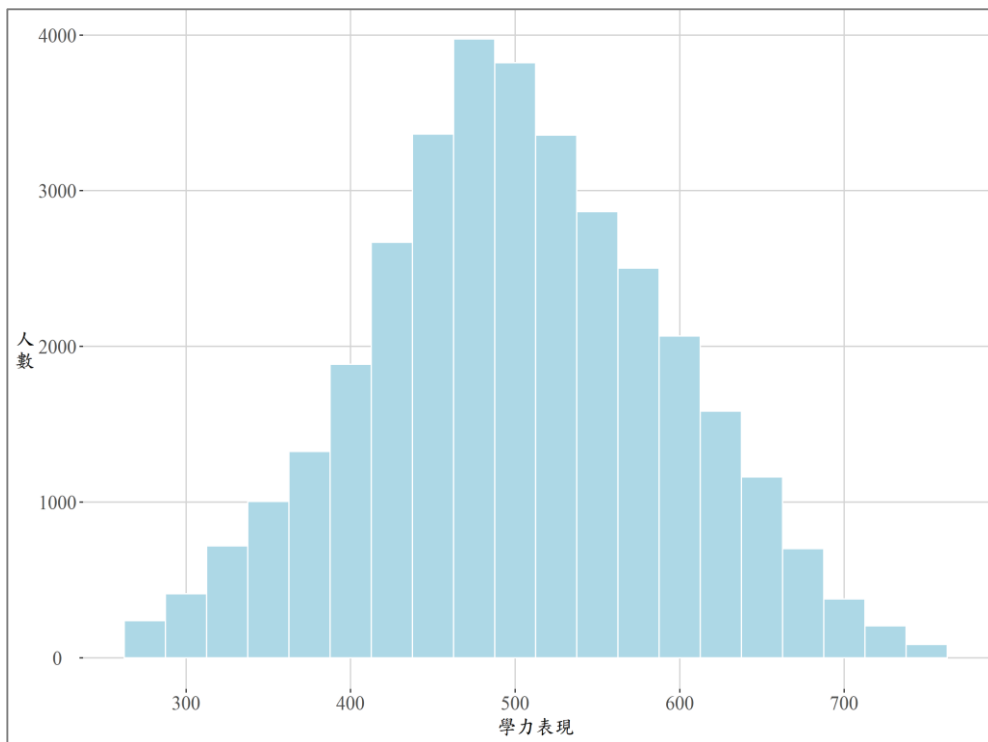


圖 5-1 數學六年級整體學生學力表現分布圖

如圖 5-2，以性別為背景變項進行分析，男生的平均量尺分數為 501（標準差 96）、女生平均量尺分數則為 501（標準差 85）；再以不同都市化程度進行背景變項分析，發現「都會核心」及「工商市區」之六年級學生其數學學力檢測表現高於整體平均，「新興市鎮」學生之表現與整體平均相差不大，「傳統產業市鎮」、「低度發展鄉鎮」、「高齡化鄉鎮」及「偏遠鄉鎮」學生之表現低於整體平均。按照不同都市化程度學力表現由高至低依序為「都會核心」、「工商市區」、「新興市鎮」、「傳統產業市鎮」、「低度發展鄉鎮」、「偏遠鄉鎮」「高齡化鄉鎮」，與都市化程度排列大致相同，其中「高齡化鄉鎮」平均量尺分數為 468（標準差 80）與整體平均差異最為明顯，各鄉鎮市區類型參與之學生人數、學力表現平均數及標準差如表 5-1 所示。本年度參與人數 34,322 人，排除資料缺漏者 371 人，總計背景變項分析有效樣本為 33,951 人。

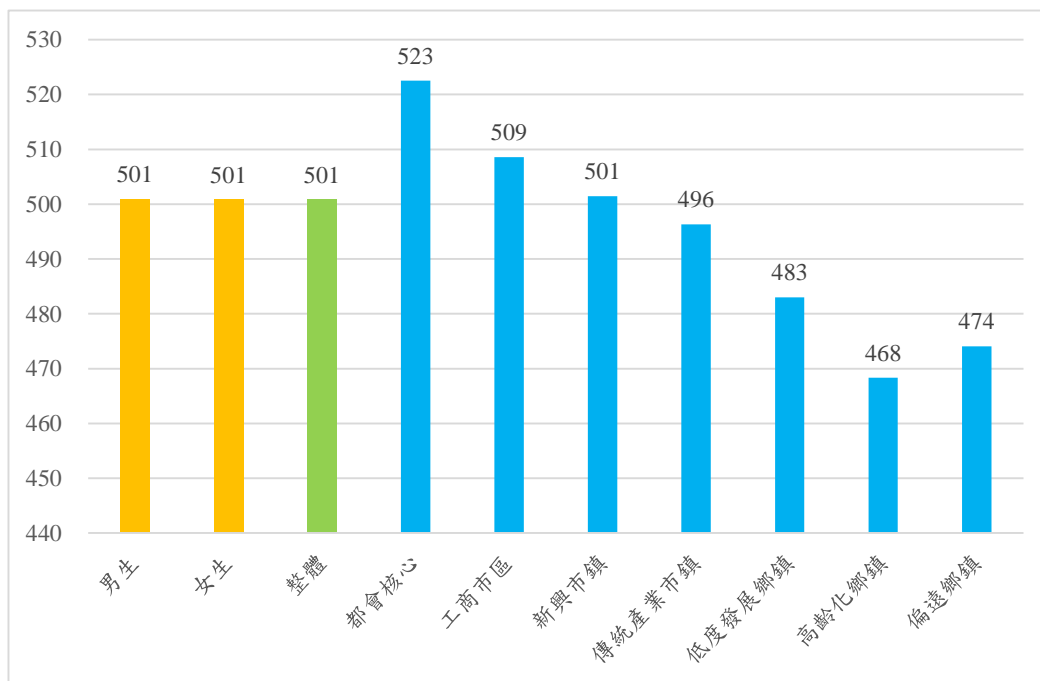


圖 5-2 數學六年級學生不同背景變項學力表現

表 5-1 各鄉鎮市區類型參與之學生人數、學力表現平均數及標準差

整體	人數	33951
	平均數	501
	標準差	91
都會核心	人數	2156
	平均數	523
	標準差	90
工商市區	人數	9469
	平均數	509
	標準差	90
新興市鎮	人數	14471
	平均數	501
	標準差	92
傳統產業市鎮	人數	2474
	平均數	496
	標準差	89
低度發展鄉鎮	人數	3411
	平均數	483
	標準差	86
高齡化鄉鎮	人數	964
	平均數	468
	標準差	80
偏遠鄉鎮	人數	1006
	平均數	474
	標準差	88

二、國民小學六年級學生於不同能力指標之答對率

藉由將「國民小學數學六年級學生學習能力檢測」題號、對應之九年一貫能力指標和答對率進行交叉對照，可更明確檢視學生表現較優異和有待加強之處，相關整理如下表 5-2 所示：

表 5-2 不同能力指標與其答對率之交叉對照表

答對率	數與計算		
	題號	能力指標	
91~100			
81~90	3	6-n-11	能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。
	4	6-n-06	能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。
71~80	2	6-n-02	能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。
	6	6-n-09	能認識比和比值，並解決生活中的問題。
61~70	5	6-n-02	能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。
51~60	15	6-n-12	能認識速度的意義及其常用單位。
41~50	9	6-n-01	能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解（質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100 ）。
	11	6-n-06	能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。
	17	6-n-09	能認識比和比值，並解決生活中的問題。
	18	6-n-10	能理解正比的意義，並解決生活中的問題。
	21	6-n-12	能認識速度的意義及其常用單位。
31~40	14	6-n-03	能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。
	22	6-n-05	能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。
	23	6-n-07	能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數（含四捨五入法），並做加、減、乘、除之估算。
	24	6-n-04	能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。
21~30	16	6-n-03	能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。
11~20			
0~10			

答對率	量與實測		
	題號	能力指標	
91~100			
81~90			
71~80			
61~70	7	6-n-15	能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-s-05)
	8	6-n-08	能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。
51~60	12	6-n-14	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-s-03)
41~50			
31~40			
21~30			
11~20			
0~10			

答對率	幾何		
	題號	能力指標	
91~100	1	6-s-04	能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。
81~90			
71~80			
61~70			
51~60			
41~50			
31~40	10	6-s-03	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-n-14)
	20	6-s-02	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。
21~30	25	6-s-02	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。
11~20			
0~10			

答對率	代數		
	題號	能力指標	
91~100			
81~90			
71~80			
61~70			
51~60	13	6-a-04	能利用常用的數量關係，列出恰當的算式、進行解題，並檢驗解的合理性。（同 6-n-13）
41~50	19	6-a-01	能理解等量公理。
31~40			
21~30			
11~20			
0~10			

陸、整體教學建議

一、學生整體表現

由表 6-1 觀之，本次測驗全體學生的平均通過率是 54%。從學生在各評量指標-知識向度與認知向度的解題表現來看，其中，在知識向度方面，學生在量與實測向度的平均通過率最高(62%)，其次是數與計算向度(54%)與代數向度(54%)，而在幾何向度的平均通過率最低(48%)；在認知向度方面，學生在概念理解向度的平均通過率最高(62%)，在程序執行向度平均通過率最低(48%)。進一步分析資料，學生在幾何*概念理解向度的平均通過率最佳（全：64%，高分組：84%，低分組：44%）；學生在幾何*解題思考向度的平均通過率最低（全：28%，高分組：52%，低分組：14%）。

此結果顯示針對六年級學生的數學課室教學，教師對於建立學生幾何概念，以及解題思考能力，除重視基本概念之講解說明與程序運算的練習之外，亦要多提供促進學生思考與討論的應用性問題，提升學生更高階段的學習成效。

表 6-1 數學領域六年級正式題本試題數據-雙向細目表

六	概念理解			程序執行			解題思考			小計		
	題號	分組	通過率	題號	分組	通過率	題號	分組	通過率		分組	通過率
數與計算	2、3、 5、9、 16	全	0.62	4、11、 15、18、 23、24	全	0.50	6、14、 17、 21、22	全	0.49	共 16 題	全	0.54
		高	0.80		高	0.74		高	0.71		高	0.75
		低	0.40		低	0.29		低	0.28		低	0.32
量與實測	7、12	全	0.62	/	8	全	0.62	共 3 題	全	0.62	全	0.62
		高	0.75			高	0.90		高	0.80		
		低	0.46			低	0.32		低	0.41		
幾何	1、20	全	0.64	10	全	0.36	25	全	0.28	共 4 題	全	0.48
		高	0.84		高	0.58		高	0.52		高	0.69
		低	0.44		低	0.21		低	0.14		低	0.31
代數	/	19	全	0.47	13	全	0.60	共 2 題	全	0.54	全	0.54
			高	0.79		高	0.85		高	0.82		
			低	0.21		低	0.35		低	0.28		
小計	共 9 題	全	0.62	共 8 題	全	0.48	共 8 題	全	0.50	共 25 題	全	0.54
		高	0.80		高	0.73		高	0.73		高	0.75
		低	0.42		低	0.27		低	0.27		低	0.32

二、對學習待加強學生的觀察

本次測驗對象是國小六年級的學生，測驗的內容是以九年一貫課程綱要-數學領域中所羅列之六年級學生應學習的分年細目作為命題依據。因此，高、低分組學生在這些題目的答對率上應相距不遠；但是，由上表 6-1 呈現的數據發現，有些題目高分組學生與低分組學生的通過率落差很大。因此，我們特別針對鑑別度較高的試題(第 8、22、13、15、19、24 題) 再做進一步的分析與討論，提供老師作為教學上的參考。

(一) 小數及分數兩步驟問題列式

1. 評量目標

第 8 題(試題如下)對應的分年細目是「6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。」，第 8 題是小數乘除兩步驟文字題，要求學生選出能正確算出答案的算式，評量學生小數乘除兩步驟問題列式的能力。

第 22 題(試題如下)對應的分年細目是「6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。」，第 22 題是連除分數兩步驟的文字題，要求學生選出能算出答案的算式，評量學生分數連除兩步驟問題列式的能力。這兩個問題都必須掌握分數及小數情境的乘除互逆概念，才能夠成功的解題。

「底為 3.6 公分的三角形面積是 38.64 平方公分，請問三角形的高是多少公分？」下列哪個算式可以算出正確的答案？

- ① $38.64 \times 2 \times 3.6$
- ② $38.64 \times 2 \div 3.6$
- ③ $38.64 \div 2 \times 3.6$
- ④ $38.64 \div 2 \div 3.6$

「農場的 $\frac{1}{5}$ 是菜圃，菜圃的 $\frac{1}{28}$ 種青花菜，已知種青花菜的面積是 $2\frac{4}{5}$ 公畝，請問農場的面積是多少公畝？」下列哪個算式可以算出正確答案？

① $2\frac{4}{5} \times \frac{1}{28} \times \frac{1}{5}$

② $2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \times \frac{1}{5}$

③ $2\frac{4}{5} \times \frac{1}{28} \div \frac{1}{5}$

④ $2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \div \frac{1}{5}$

2. 試題分析

第 8 題鑑別度為 0.58，正確答案為選項②，通過率為 62%。其中高分組通過率為 90%，顯示九成的高分組學生已具備涉及乘除互逆情境小數乘除兩步驟問題列式的能力；低分組的通過率為 32%，顯示低分組學生不具備涉及乘除互逆情境小數乘除兩步驟問題列式的能力。

(1) 有 17% 的學生選擇選項④(高分組有 7%、低分組有 23%)、有 16% 的學生選擇選項③(高分組有 2%、低分組有 33%)，這些學生可能都無法掌握小數情境乘除互逆的關係，誤認為三角形的面積都要除以 2。

選擇選項④的高分組學生有 7%、低分組學生有 23%，而選擇選項③的高分組學生有 2%、低分組學生有 33%，可能的原因是比較多的高分組學生知道已知面積求高時，要除以底邊的長，因此選擇選項④，而比較多的低分組學生沒有乘除互逆的概念，誤用三角形面積公式底 \times 高 \div 2 來解題。

(2) 有 5% 的學生選擇選項①(高分組有 1%、低分組有 11%)，這些學生無法掌握小數情境乘除互逆的關係，在列式時出現錯誤；也可能不理解或誤解題意。

第 22 題鑑別度為 0.58，正確答案為選項④，通過率為 38%。其中高分組通過率為 71%，顯示只有七成高分組的學生已具備涉及乘除互逆情境小數乘除兩步驟問題列式的能力；低分組的通過率為 13%，其他三個誘答選項的選項率分別是 30%、29%、27%，顯示低分組學生可能不具備涉及乘除互逆情境分數

連除兩步驟問題列式的能力。有 23% 的學生選擇選項①(高分組有 10%、低分組有 30%)、21% 的學生選擇選項②(高分組有 11%、低分組有 29%)、18% 的學生選擇選項③(高分組有 7%、低分組有 27%)，這些學生可能不具備涉及乘除互逆情境分數連除兩步驟問題列式的能力。

第 8 題的通過率為 0.62，高分組的通過率為 90%，第 22 題的通過率為 0.38，高分組的通過率為 71%，可能的原因如下：

(1) 第 8 題是學生比較熟悉的情境，學生較熟悉三角形的面積公式，知道三角形的面積 = 底 × 高 ÷ 2，較能列出算式「 $3.6 \times \text{高} \div 2 = 38.64$ 」，列出算式後較容易利用等量公理或乘除互逆的概念來解題。

(2) 第 22 題是學生比較不熟悉的情境，學生可能不理解農場的 $\frac{1}{5}$ 是菜圃，菜圃的 $\frac{1}{28}$ 種青花菜的描述，學生也可能無法利用未知數將問題記成「 $\square \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{28} = 2\frac{4}{5}$ 」後，再利用等量公理或乘除互逆的概念來解題。

(3) 97 課綱只引入分數單步驟問題的列式及等量公理解題，因此這兩題的主要解題策略是透過問題情境利用乘除互逆的關係來解題。

3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

(1) 三角形的面積公式是底 × 高 ÷ 2，因此學生較容易列出算式 $3.6 \times \text{高} \div 2 = 38.64$ ，如果學生無法列出 $3.6 \times \text{高} \div 2 = 38.64$ 的算式，只能在問題情境中利用乘除互逆的關係來解題，利用乘除互逆才能解題的乘除兩步驟問題，對低分組學生而言相當的困難。

相同的理由，如果學生無法列出算式「 $\square \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{28} = 2\frac{4}{5}$ 」，只能在問題情境中利用乘除互逆的關係來解題，利用乘除互逆才能解題的連除兩步驟問題，對低分組學生而言相當的困難。

(2) 列出算式「 $\square \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{28} = 2\frac{4}{5}$ 」是翻譯問題，對多數學生而言比較容易，而看著問題情境列出算式「 $2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \div \frac{1}{5} = ()$ 」是解題計畫，對多數學生而言比較

困難。

(3)列出算式「 $\square \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{28} = 2\frac{4}{5}$ 」後，再利用乘除互逆的概念解題，解題成功後再改記成併式，對多數學生而言比較簡單，改記成併式後學生就能夠列式。如果學生能理解等量公理的意義，高分組學生應該能利用等量公理解決兩步驟的問題。

(4)以「底為 3.6 公分的三角形面積是 38.64 平方公分，請問三角形的高是多少公分？」為例，提出三種解題的方法。

方法一：利用乘除互逆解題

建議教師透過分段布題的方式幫助學生解題。

布題一：三角形的面積是 38.64 平方公分，三角形底和高的乘積是多少平方公分？

$$38.64 \times 2 = 77.28(\text{平方公分}), \text{答: } 77.28 \text{ 平方公分}$$

布題二：三角形的底為 3.6 公分，底和高的乘積是 77.28 平方公分，三角形的高是多少公分？

$$77.28 \div 3.6 = \frac{7728}{360} = \frac{322}{15}(\text{公分}), \text{答: } \frac{322}{15} \text{ 公分。}$$

回到原問題：底為 3.6 公分的三角形面積是 38.64 平方公分，請問三角形的高是多少公分？

$$38.64 \times 2 = 77.28(\text{平方公分})$$

$$77.28 \div 3.6 = \frac{7728}{360} = \frac{322}{15}(\text{公分}), \text{答: } \frac{322}{15} \text{ 公分。}$$

教師應要求學生將前面的兩個算式改記成併式「 $38.64 \times 2 \div 3.6 = \frac{322}{15}$ 」，學生能夠用併式紀錄解題過程才有能力列式。

方法二：先列式，再透過乘除互逆解題

$$3.6 \times \text{高} \div 2 = 38.64$$

將「 $3.6 \times \text{高}$ 」看成一個未知數□

$$\square \div 2 = 38.64 \Rightarrow \text{透過乘除互逆算出 } \square = 38.64 \times 2$$

$$3.6 \times \text{高} = 38.64 \times 2 \Rightarrow \text{透過乘除互逆算出高} = 38.64 \times 2 \div 3.6$$

方法三：先列式，再透過等量公理解題

$$3.6 \times \text{高} \div 2 = 38.64 (\text{等號兩邊同乘 } 2)$$

$$3.6 \times \text{高} = 38.64 \times 2 (\text{等號兩邊同除 } 3.6)$$

$$\text{高} = 38.64 \times 2 \div 3.6$$

(5)以「農場的 $\frac{1}{5}$ 是菜圃，菜圃的 $\frac{1}{28}$ 種青花菜，已知種青花菜的面積是 $2\frac{4}{5}$ 公畝，

請問農場的面積是多少公畝？」為例，提出三種解題的方法。

方法一：利用乘除互逆解題

建議教師透過分段布題的方式幫助學生解題，

布題一：菜圃的 $\frac{1}{28}$ 種青花菜，已知種青花菜的面積是 $2\frac{4}{5}$ 公畝，

請問菜圃的面積是多少公畝？

$$2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} = \frac{392}{5} (\text{公畝}), \text{答: } \frac{392}{5} \text{公畝。}$$

布題二：農場的 $\frac{1}{5}$ 是菜圃，菜圃的面積是 $\frac{392}{5}$ 公畝，請問農場的面

積是多少公畝？

$$\frac{392}{5} \div \frac{1}{5} = 392 (\text{公畝}), \text{答: } 392 \text{公畝。}$$

回到原問題：農場的 $\frac{1}{5}$ 是菜圃，菜圃的 $\frac{1}{28}$ 種青花菜，已知種青花菜

的面積是 $2\frac{4}{5}$ 公畝，請問農場的面積是多少公畝？

$$2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} = \frac{392}{5} (\text{公畝})$$

$$\frac{392}{5} \div \frac{1}{5} = 392 (\text{公畝}), \text{答: } 392 \text{公畝。}$$

教師應要求學生將前面的兩個算式改記成併式「 $2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \div \frac{1}{5} = 392$ 」，

學生能夠用併是紀錄解題過程才有能力列式。

方法二：先列式，再透過乘除互逆解題

$$\square \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{28} = 2\frac{4}{5}$$

將「 $\square \times \frac{1}{5}$ 」看成一個未知數 y

$$y \times \frac{1}{28} = 2\frac{4}{5} \Rightarrow \text{透過乘除互逆算出 } y = 2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28}$$

$$\square \times \frac{1}{5} = 2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \Rightarrow \text{透過乘除互逆算出 } \square = 2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \div \frac{1}{5}$$

方法三：先列式，再透過等量公理解題

$$\square \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{28} = 2\frac{4}{5} \text{ (等號兩邊同除 } \frac{1}{28} \text{)}$$

$$\Rightarrow \square \times \frac{1}{5} = 2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \text{ (等號兩邊同除 } \frac{1}{5} \text{)}$$

$$\Rightarrow \square = 2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \div \frac{1}{5}$$

(二) 速率單位的換算

1. 評量目標

第 15 題(試題如下)對應的分年細目是「6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。」，本題給定時速幾公里的風速及利用秒數幾公尺對應風力幾級的表格，要求學生判斷給定的風速相當於幾級風，評量學生利用速度常用單位換算解題的能力。

當風速達到時速 54 公里的時候，遊樂場的摩天輪就會停止運轉，
請問時速 54 公里相當於幾級風力？

風力	公尺/秒鐘
6 級	10.8 ~ 13.8
7 級	13.9 ~ 17.1
8 級	17.2 ~ 20.7
9 級	20.8 ~ 24.4

- ① 6 級
- ② 7 級
- ③ 8 級
- ④ 9 級

2. 試題分析

本題鑑別度為 0.59，正確答案為選項②，通過率為 55%。其中高分組通過率為 85%，顯示八成五的高分組學生已具備利用速度常用單位換算解題的能力；低分組的通過率為 26%，其他三個誘答選項的選項率分別是 20%、28%、25%，顯示低分組學生可能不具備利用速度常用單位換算解題的能力。

(1) 有 18% 的學生選擇選項③(高分組有 7%、低分組有 28%)，有 14% 的學生選擇選項④(高分組有 4%、低分組有 25%)，有 13% 的學生選擇選項①(高分組有 5%、低分組有 20%)，這些學生可能不具備利用速度常用單位換算解題的能力，無法將時速幾公里的單位換算成秒數多少公尺；這些學生也可能不理解題意。

3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

(1) 學生可能不理解風速和時速 54 公里間的關係，教師應多舉一些例子來說明。

(2) 「平均 1 小時跑 60 公里」是日常生活中常見的說法，下面提供三種也可以溝通「平均 1 小時跑 60 公里」的方法。

方法一：60 公里：1 小時

方法二：60 公里/小時

方法三：時速 60 公里

方法一是利用比的記法來溝通速率，方法二是利用比值的記法來溝通速率，方法三是日常生活中常用的說法。

建議教師幫助學生熟練「時速 60 公里」、「速率 60 公里/小時」、「60 公里：1 小時」這三種說法間的轉換，但在解題時，儘量利用比的方法來解題，因為比的記法較能夠看到時間和距離兩量的關係。

(3) 以甲 3 小時跑 5 公里，乙 5 小時跑 8 公里，誰跑得比較快為例，有兩種比較誰比較快的方法。

第一種：時間相同，比較誰跑的距離比較長。

甲：3 小時跑 5 公里 \Rightarrow 15 小時跑 25 公里

乙：5 小時跑 8 公里 \Rightarrow 15 小時跑 24 公里

25 公里比 24 公里長，也就是 25 比 24 大，甲跑得比較快

第二種：距離相同，比較誰跑的時間比較短。

甲：3 小時跑 5 公里 \Rightarrow 24 小時跑 40 公里

乙：5 小時跑 8 公里 \Rightarrow 25 小時跑 40 公里

24 小時比 25 小時短，也就是 24 比 25 小，甲跑得比較快。

由上面的說明可以知道，可以有兩種定義速率的方法：

第一種：速率＝距離：時間

第二種：速率＝時間：距離

第一種方法中時間相同時，距離的數字比較大時，速率比較快，距離的數字比較小時，速率比較慢；第二種方法中距離相同時，時間的數字比較大時，速率比較慢，時間的數字比較小時，速率比較快。

為了讓速率的數字比較大時，跑得比較快，數字比較小時，跑得比較慢，數學上都選擇第一種方法為速率的定義。

(4)如果學生比較無法掌握比值想法解決速度換單位問題解題的意義

$$\begin{aligned}\text{例如：} 54 \frac{\text{公里}}{\text{小時}} &= 54 \times \frac{1000 \text{公尺}}{60 \text{分鐘}} \\ &= 54 \times \frac{1000 \text{公尺}}{3600 \text{秒鐘}} \\ &= 15 \frac{\text{公尺}}{\text{秒鐘}}\end{aligned}$$

教師可以透過比的想法來解決換單位的問題。

$$\begin{aligned}\text{例如：} 54 \text{ 公里/小時} &= 54 \text{ 公里} : 1 \text{ 小時} \\ &= 54000 \text{ 公尺} : 60 \text{ 分鐘} \\ &= 900 \text{ 公尺} : 1 \text{ 分鐘} \\ &= 900 \text{ 公尺} : 60 \text{ 秒鐘} \\ &= 15 \text{ 公尺} : 1 \text{ 秒鐘} \\ &= 15 \text{ 公尺/秒鐘}\end{aligned}$$

查表對應風力為 7 級。

(三) 週期情境的規律

1. 評量目標

第 13 題(試題如下)對應的分年細目是「6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式、進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13)」，本題給定由兩種形狀組成而且是 9 個一循環的圖形序列，要求學生回答第幾個圖形的形狀，評量學生利用常用數量關係解題的能力。

「○○○○□□□□○○○○□□□□○○○○□□□□」，

如上圖，第 1 個到第 4 個圖形都是○，第 5 個到第 9 個圖形都是□。

依照 4 個○、5 個□，4 個○、5 個□的規律排列下去，第 253 個圖形和第 365 個圖形為何？

- ① 第 253 個是○，第 365 個是□
- ② 第 253 個是□，第 365 個是○
- ③ 第 253 個是○，第 365 個是○
- ④ 第 253 個是□，第 365 個是□

2. 試題分析

本題鑑別度為 0.51，正確答案為選項①，通過率為 60%。其中高分組通過率為 85%，顯示八成五的高分組學生已具備利用常用數量關係解題的能力；低分組通過率為 35%，顯示低分組學生可能不具備利用常用數量關係解題的能力。

有 14%的學生選擇選項②(高分組有 3%、低分組有 26%)，有 13%的學生選擇選項③(高分組有 5%、低分組有 21%)，有 13%的學生選擇選項④(高分組有 6%、低分組有 18%)，這三個誘答選項的選項率都很接近，顯示這些學生可能不具備利用常用數量關係解題的能力；也可能沒有發現 9 個圖形一循環的規律，無法利用除以 9 所得到的餘數來解題。

3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

(1)學生無法將本題解讀成 9 個一循環的圖形序列。

學生看不到 9 個一循環的圖形序列和正整數 1、2、3、...間的對應關係，

例如：1⇒○、2⇒○、...、8⇒□、9⇒□，1⇒○、2⇒○、...、8⇒□、9⇒□。

建議教師將題目改記成 1⇒○、2⇒○、...、8⇒□、9⇒□；10⇒○、11⇒○、...、

17⇒□、18⇒□；19⇒○、20⇒○、...、26⇒□、27⇒□，幫助學生發現 9 個

一循環和數字 9、18、27 間的關係。

(2)學生可能發現 9 個圖形一循環的規律，但是不知道為什麼可以利用除以 9 所得到的餘數來解題。


例如：1⇒□、10⇒□、19⇒□、28⇒□，所以可以透過 $28-9-9-9=1$ ，也就是 $28\div 9=3\dots 1$ ，知道第 28 個圖形和第 1 個圖形是相同的。

(3)下面說明如何幫助學生解題


步驟一：先以不同形狀的規律圖形，幫助學生釐清 5 個一循環的規律



步驟二：幫助學生建立相同圖形的數字與圖形間的連結，例如：

 分別是在 5、10，引導學生推測出下一次出現會是在 15、20...






幫助學生發現出現的位置都是 5 的倍數

 分別是在 1、6，引導學生推測出下一次出現會是在 11、16...

幫助學生發現 6、11...的數字與 5 個一循環之間的連結，

也就是 $6\div 5=1\dots 1$ ； $11\div 5=2\dots 1$ ，進而歸納出圓形的位置都是除以 5 餘 1。

以此類推幫助學生發現圖形出現的位置分別為：

除以 5 餘 1	除以 5 餘 2	除以 5 餘 3	除以 5 餘 4	除以 5 餘 5
				

步驟三：回到原題目幫助學生發現圖形的變化是 9 個一循環，圖形出現的位置分別為：

圖形	○	△	◇	□	□	□	□	□	□
除以 9 的餘數	1	2	3	4	5	6	7	8	9

因此， $253\div 9=28\dots 1$ ，所以圖形是○

$365\div 9=40\dots 5$ ，所以圖形是□

(四) 等量公理

1. 評量目標

第 19 題(試題如下)對應的分年細目是「6-a-01 能理解等量公理。」，本題給定一個等式，要求學生選出等號兩邊同加、同減、同乘或同除一數後的正確的算式，評量學生利用等量公理解題的能力。

已知 $3 \times 8 + 5 = 20 + 27 \div 3$ ，請問下列哪個算式錯誤？

- ① $(3 \times 8 + 5) - 5 = (20 + 27 \div 3) - 5$
- ② $3 \times 8 + 5 - 20 = 20 + 27 \div 3 - 20$
- ③ $3 \times 8 + 5 \times 3 = 20 + 27 \div 3 \times 3$
- ④ $54 + 3 \times 8 + 5 = 54 + 20 + 27 \div 3$

2. 試題分析

本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項③，通過率為 47%。其中高分組通過率為 79%，顯示近八成的高分組學生已具備利用等量公理解題的能力；低分組的通過率為 21%，其他三個誘答選項的選項率分別是 27%、22%、29%，顯示低分組學生可能不具備利用等量公理解題的能力。

有 22% 的學生選擇選項④(高分組有 11%、低分組有 29%)、有 17% 的學生選擇選項①(高分組有 6%、低分組有 27%)，有 13% 的學生選擇選項②(高分組有 4%、低分組有 22%)，這些學生可能不具備利用等量公理解題的能力；也可能無法將 $3 \times 8 + 5$ 和 $20 + 27 \div 3$ 看成兩個數，必須算出答案才能判斷等式是否成立，但是在計算時發生錯誤。

3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

(1) 學生無法將算式解讀為數字，學生可能知道等量加法公理

「 $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ 」，但是無法將「 $3 \times 8 + 5$ 」和「 $20 + 27 \div 3$ 」這兩個答案相等的算式視為「a」和「b」，可以記成「 $a = b$ 」。

因此題目給定「 $3 \times 8 + 5 = 20 + 27 \div 3$ 」，學生必須算出答案才知道

「 $(3 \times 8 + 5) + 8 = (20 + 27 \div 3) + 8$ 」。

(2)學生可能將等號看成「得到答案」的意義，而不是看成「兩邊一樣大」的意義。例如學生接受「 $5+3=8$ 」的記法，但是不接受「 $8=5+3$ 」的記法。

一年級加法與減法算式中的等號為「得到答案」的意義。

以「5顆蘋果和3顆蘋果合起來有多少顆蘋果？」為例，學生解題時會先畫出5顆蘋果和3顆蘋果，再點數合起來有8顆蘋果，學生的解題活動中只出現8顆蘋果，加法算式「 $5+3=8$ 」中「 $5+3$ 」和「8」指的都是那8顆蘋果。「 $5+3=8$ 」記錄5顆和3顆合起來的答案是8顆，算式中的等號是得到答案的意義。部份學生不接受「 $8=5+3$ 」或「 $5+3=9-1$ 」，可能的原因是將等號看成得到答案，而不是兩邊一樣大。

二年級透過比較活動，加法與減法算式中的等號才是「兩邊一樣大」的意義。等號表示「兩邊一樣大」，是六年級學習等量公理的前置經驗。

可以提問「 $5+3$ 和8，誰比誰大？」，引入 $5+3$ 和8一樣大，再將 $5+3$ 和8一樣大的結果記成「 $5+3=8$ 」，此時加法算式「 $5+3=8$ 」中 $5+3$ 和8是兩個不同的數，「 $5+3=8$ 」記錄 $5+3$ 和8一樣大，算式中的等號是「兩邊一樣大」的意義。

教師可以提問「8和 $5+3$ ，誰比誰大？」、「 $5+3$ 和 $9-1$ ，誰比誰大？」，幫助學生用「 $8=5+3$ 」、「 $5+3=9-1$ 」來記錄，幫助學生理解算式中的等號是「兩邊一樣大」的意義。

(3)建議教師協助學生將一個運算式子視為一個數，例如 $3+5=11-3$ ，相等的兩數（「 $3+5$ 」和「 $11-3$ 」）同加、同減、同乘、同除，其值不變。也就是

$$(3+5)+2=(11-3)+2$$

$$15-(3+5)=15-(11-3)$$

$$(3+5)\times 2=(11-3)\times 2$$

$$(3+5)\div 2=(11-3)\div 2$$

(五) 有餘數的分數除法

1. 評量目標

第24題(試題如下)對應的分年細目是「6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。」，本題給定描述「 $\square\div 16=13\frac{3}{8}$ 」的文字題，

要求學生算出改記成「 $\square \div 16 = 13 \dots r$ 」後的餘數，評量學生利用分數除法解題的能力。

已知 1 桶果汁，每 16 公升裝成一瓶，全部裝完，相當於裝成 $13\frac{3}{8}$ 瓶。
如果將這桶果汁，每 16 公升裝成一瓶，最多可以裝滿 13 瓶，還剩下多少公升？

① 6
② 0.3
③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{128}{3}$

2. 試題分析

本題鑑別度為 0.52，正確答案為選項①，通過率為 37%。其中高分組通過率為 68%，顯示約七成的高分組學生已具備利用分數除法解題的能力；低分組的通過率為 16%，有 49% 的低分組學生選擇選項③，直接將未裝滿 1 瓶的 $\frac{3}{8}$ 瓶看成 $\frac{3}{8}$ 公升，得到剩下 $\frac{3}{8}$ 公升的答案，這些學生不具備利用分數除法解題的能力。

(1) 有 44% 的學生選擇選項③(高分組有 25%、低分組有 49%)，這些學生可能

尚未具備利用分數除法解題的能力，不知道 $13\frac{3}{8}$ 瓶指的是「13 瓶 + $\frac{3}{8}$ 瓶」，

直接將未裝滿 1 瓶的 $\frac{3}{8}$ 瓶看成 $\frac{3}{8}$ 公升，得到剩下 $\frac{3}{8}$ 公升的答案。

(2) 有 11% 的學生選擇選項②(高分組有 4%、低分組有 20%)，這些學生可能尚

未具備利用分數除法解題的能力；也可能知道 $13\frac{3}{8}$ 瓶指的是「13 瓶 + $\frac{3}{8}$ 瓶」，

但是將剩下的 $\frac{3}{8}$ 瓶轉換成幾公升時發生錯誤，誤認為 $\frac{3}{8}$ 瓶 = 0.3 公升。

(3) 有 7% 的學生選擇選項④(高分組有 2%、低分組有 14%)，這些學生可能尚

未具備利用分數除法解題的能力；也可能知道 $13\frac{3}{8}$ 瓶指的是「13 瓶 + $\frac{3}{8}$ 瓶」，但是將剩下的 $\frac{3}{8}$ 瓶轉換成幾公升時發生錯誤，誤認為 $\frac{3}{8}$ 瓶 = $16 \div \frac{3}{8} = \frac{128}{3}$ 公升。

3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

(1) 學生無法進行「 $a \div b = \frac{a}{b}$ 」和「 $a \div b = q \dots r$ 」這兩種紀錄格式的轉換，不知道

$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ ；學生也不知道將「 $\square \div 16 = 13\frac{3}{8}$ 」改記成「 $\square \div 16 = 13 \dots r$ 」時，

「 $\frac{3}{8} = \frac{r}{16}$ 」或「 $16 \times \frac{3}{8} = r$ 」的關係。

(2) 本題有兩種解題的方法：

方法一：先算出 1 桶果汁有多少公升，再算出 16 公升裝成一瓶，最多可以滿幾瓶，還剩下多少公升。

$$16 \times 13\frac{3}{8} = 214 \text{ (公升)}, \text{ 算出 1 桶果汁有 214 公升,}$$

$$214 \div 16 = 13 \dots 6, \text{ 得到剩下 6 公升的答案。}$$

方法二：將 $13\frac{3}{8}$ 瓶解讀為裝滿 13 瓶，剩下 $\frac{3}{8}$ 瓶，再算出 $\frac{3}{8}$ 瓶是多少公升？

$$1 \text{ 瓶是 16 公升, } 16 \times \frac{3}{8} = 6, \text{ 得到剩下 6 公升的答案。}$$

(3) 以「① $70 \div 20$ 、② $7 \div 2$ 、③ $0.7 \div 0.2$ 」為例，當我們限制記錄的格式是 $a \div b = q \dots r$

時，這三題答案不相同；當我們限制記錄格式是 $a \div b = \frac{a}{b}$ 時，這三題的答案相同。

記錄格式是 $a \div b = q \dots r$ ：

$$\text{① } 70 \div 20 = 3 \dots 10, \text{ ② } 7 \div 2 = 3 \dots 1, \text{ ③ } 0.7 \div 0.2 = 3 \dots 0.1, \text{ 這三題的答案不相同。}$$

記錄格式是 $a \div b = \frac{a}{b}$ ：

$$\text{① } 70 \div 20 = \frac{70}{20} = \frac{7}{2}, \text{ ② } 7 \div 2 = \frac{7}{2}, \text{ ③ } 0.7 \div 0.2 = \frac{0.7}{0.2} = \frac{7}{2}, \text{ 這三題的答案相同。}$$

教師布題時應強調答案是哪種記錄格式，如果要求的記錄格式是 $a \div b = q \dots r$ ，不論餘數為 0 或不為 0，布題時應同時詢問商及餘數，如果要求的記錄格式是 $a \div b = \frac{a}{b}$ ，建議要加上「全部分完」的限制。

(4) 以「 $\frac{41}{5}$ 公升果汁， $\frac{4}{7}$ 公升裝 1 瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？」為例，

說明如何引入沒有餘數的分數除法算則(顛倒相乘)。

步驟一：利用被除數及除數同時換單位策略來解題。

$$\begin{aligned} & \frac{41}{5} \div \frac{4}{7} \\ &= \frac{41 \times 7}{5 \times 7} \div \frac{4 \times 5}{7 \times 5} \rightarrow (\text{通分}) \\ &= (41 \times 7) \div (4 \times 5) \rightarrow (\text{同時以 } \frac{1}{35} \text{ 公升換單位}) \\ &= \frac{41 \times 7}{4 \times 5}, \text{ 答：相當於裝成 } \frac{41 \times 7}{4 \times 5} \text{ 瓶。} \end{aligned}$$

步驟二：學生不易發現問題「 $\frac{41}{5} \div \frac{4}{7}$ 」和答案「 $\frac{41 \times 7}{4 \times 5}$ 」的關係。

教師先將答案改記成兩分數的乘積。

$$\begin{aligned} & \frac{41 \times 7}{4 \times 5} = \frac{41 \times 7}{5 \times 4} \rightarrow (\text{乘法交換律}) \\ &= \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} \rightarrow (\text{分數} \times \text{分數} = \frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}}) \end{aligned}$$

步驟三：要求學生觀察問題「 $\frac{41}{5} \div \frac{4}{7}$ 」和改寫後答案「 $\frac{41}{5} \times \frac{7}{4}$ 」的關係。

幫助學生發現可以利用顛倒相乘的方式直接算出答案。

(5) 以「 $\frac{41}{5}$ 公升果汁， $\frac{4}{7}$ 公升裝 1 瓶，最多裝滿幾瓶，還剩下多少公升？」

為例，說明如何幫助學生解有餘數的包含除問題。

下面提供兩種解題的方法：

方法一：利用被除數和除數同時換單位策略來解題

$$\frac{41}{5} \text{ 公升} = \frac{287}{35} \text{ 公升} \Rightarrow 287 \text{ 個 } \frac{1}{35} \text{ 公升}$$

$$\frac{4}{7} \text{公升} = \frac{20}{35} \text{公升} \Rightarrow 20 \text{個} \frac{1}{35} \text{公升}$$

$$287 \div 20 = 14(\text{瓶}) \dots 7 \text{ (7個} \frac{1}{35} \text{公升)}$$

$$\text{可以記成：} \frac{287}{35} \div \frac{20}{35} = 14 \dots \frac{7}{35} \left(\frac{7}{35} = \frac{1}{5} \right)$$

答：最多裝滿 14 瓶，剩下 $\frac{1}{5}$ 公升。

方法二：利用沒有餘數的分數除法算則(顛倒相乘)來解題

步驟一：利用顛倒相乘算出全部裝完相當於多少瓶

$$\frac{41}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{287}{20} = 14 \frac{7}{20} (\text{瓶})$$

步驟二：說明 $14 \frac{7}{20} = 14(\text{瓶}) + \frac{7}{20}(\text{瓶})$ ，

所以最多裝滿 14 瓶，剩下 $\frac{7}{20}$ 瓶。

步驟三：將剩下的 $\frac{7}{20}$ 瓶換成多少公升。

$$\frac{4}{7} \times \frac{7}{20} = \frac{1}{5} (\text{公升})$$

答：最多裝滿 14 瓶，剩下 $\frac{1}{5}$ 公升。

110 年學力檢測題本 數學六年級

作答注意事項：

各位同學：

你們好。

這是一份數學的試題，總共 25 題。

測驗時間為 40 分鐘。

每一題請選出一個最合適的答案，並用 2B 鉛筆在答案卡畫記，不可超出格線外，如果需要修改答案，請使用橡皮擦擦拭乾淨，再重新畫記。

畫記說明：

當你想選擇的答案為④時，正確畫記為① ② ③ ●

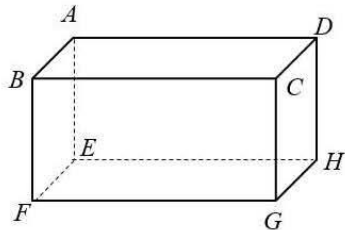
其他事項：

★ 每一題都要回答。

★ 試題如有錯誤，請立即告知老師。

學 校	
班 級	
姓 名	
座 號	

1. 下圖為一個長方體，請問下列哪個邊沒有和面 $EFGH$ 垂直？



- ① \overline{AE}
- ② \overline{BC}
- ③ \overline{CG}
- ④ \overline{DH}

2. 姐姐與妹妹到文具店選購了相同的原子筆若干枝，姐姐付了 48 元，妹妹付了 84 元。請問下列何者不可能是一枝原子筆的售價？

- ① 4 元
- ② 6 元
- ③ 8 元
- ④ 12 元

3. 「50 公里/小時」的記法表示「每 1 小時走 50 公里」。
小淇在超市看到一盒雞腿肉的標籤上寫著「90 元/ 100 g」。
下列關於「90 元/ 100 g」的說法何者正確？



- ① 這盒雞腿肉定價 90 元
② 這盒雞腿肉重 100 g
③ 這盒雞腿肉每 1 公克賣 90 元，整盒共重 100 g
④ 這盒雞腿肉每 100 公克賣 90 元
4. 如圖，大賣場內有三種廠牌的洗衣精，各廠牌的容量和價格如下所示，
請問哪一種廠牌每公升的售價最便宜？



甲廠牌：1.8公升賣432元

乙廠牌：0.9公升賣180元

丙廠牌：0.8公升賣216元

- ① 甲
② 乙
③ 丙
④ 一樣便宜

5. 下圖是小恩將兩數用短除法求最大公因數的計算過程，最大公因數是 $A \times C$ 。請問哪個選項的兩數互質？

$$\begin{array}{r|l} A & 42 \quad B \\ \hline C & D \quad 15 \\ \hline & 7 \quad E \end{array}$$

- ① 42 和 B
 ② C 和 15
 ③ D 和 15
 ④ 7 和 E
6. 將鹽滷加入豆漿後可製作出美味的豆花，而且以「豆漿：鹽滷 = 100 : 1」的比例做出來的豆花軟硬度最剛好。

小英想按照這個比例製作豆花，第一次製作時，在 600 ml 的豆漿中加入了 3 ml 的鹽滷，結果製作出來的豆花太稀，如果多加一些鹽滷，會讓製作出來的豆花變硬。

小英希望能夠成功製作出軟硬度剛好的豆花，下列哪個建議是正確的？

- ① 第一次加的鹽滷太多了，應該加入 1 ml 的鹽滷就好
 ② 第一次用的豆漿太多了，應該用 100 ml 的豆漿就好
 ③ 用 600 ml 的豆漿製作豆花應加入 1 ml 的鹽滷
 ④ 用 300 ml 的豆漿製作豆花應加入 3 ml 的鹽滷

7. 四角柱甲、三角柱乙、圓柱丙，它們的底面積和體積都相等。
請問哪一個柱體的高最長？

- ① 四角柱甲
- ② 三角柱乙
- ③ 圓柱丙
- ④ 一樣長

8. 「底為 3.6 公分的三角形面積是 38.64 平方公分，請問三角形的高是多少公分？」下列哪個算式可以算出正確的答案？

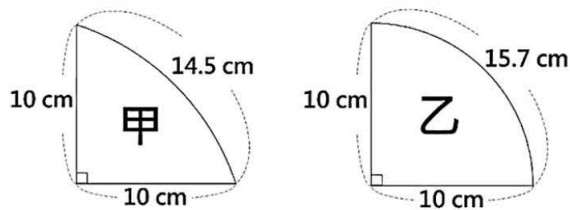
- ① $38.64 \times 2 \times 3.6$
- ② $38.64 \times 2 \div 3.6$
- ③ $38.64 \div 2 \times 3.6$
- ④ $38.64 \div 2 \div 3.6$

9. 「 $2 \times 2 \times 3 \times a$ 」是某數質因數分解的算式。

請問下列哪個選項不可能是該數？

- ① 36
- ② 60
- ③ 72
- ④ 84

10. 甲、乙兩個圖形中，哪個圖形是扇形（圓周率 = 3.14）？



- ① 只有甲
- ② 只有乙
- ③ 兩個圖形都是扇形
- ④ 兩個圖形都不是扇形

11. BMI 是目前國際上通用的胖瘦判斷的參考方式，利用體重和身高代入公式所得出的數值來客觀評判一個人的體型是否理想或太胖、太瘦。

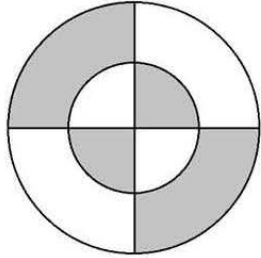
王太太身高 160 cm，體重 62 kg，請利用下方計算 BMI 值的公式及相關的判定標準，幫王太太評估一下，她是屬於哪一類？

$$\text{BMI 值計算公式：} \frac{\text{體重 (kg)}}{\text{身高 (m)} \times \text{身高 (m)}}$$

身體質量指數 BMI 值判定								
年齡	男生				女生			
	過輕 (BMI <)	正常範圍 (BMI 介於)	過重 (BMI >)	肥胖 (BMI ≥)	過輕 (BMI <)	正常範圍 (BMI 介於)	過重 (BMI >)	肥胖 (BMI ≥)
16	18.6	18.6~23.4	23.4	25.6	18.0	18.0~22.7	22.7	25.3
17	19.0	19.0~23.6	23.6	25.6	18.3	18.3~22.7	22.7	25.3
18	19.2	19.2~23.7	23.7	25.6	18.3	18.3~22.7	22.7	25.3
成人	18.5	18.5~24.0	24	27	18.5	18.5~24.0	24.0	27.0

- ① 過輕
- ② 正常範圍
- ③ 過重
- ④ 肥胖

12. 「下圖為一個飛鏢標靶，外圈大圓的直徑為 20 公分，內圈小圓的直徑為 10 公分，請問塗色部分的面積是多少平方公分？(圓周率 = 3.14)」
下列哪個算式可以算出正確答案？



- ① $10 \times 10 \times 3.14 \times \frac{1}{2}$
 ② $10 \times 10 \times 3.14$
 ③ $20 \times 20 \times 3.14 \times \frac{1}{2}$
 ④ $20 \times 20 \times 3.14$
13. 「○○○○□□□□○○○○□□□□○○○○□□□□」，
 如上圖，第 1 個到第 4 個圖形都是 ○，第 5 個到第 9 個圖形都是 □。
 依照 4 個 ○、5 個 □，4 個 ○、5 個 □ 的規律排列下去，第 253 個圖形和第 365 個圖形為何？
- ① 第 253 個是 ○，第 365 個是 □
 ② 第 253 個是 □，第 365 個是 ○
 ③ 第 253 個是 ○，第 365 個是 ○
 ④ 第 253 個是 □，第 365 個是 □

14. 已經知道分數 $\frac{a}{b}$ 的最簡分數是 $\frac{4}{13}$ ，且 a 和 b 的最大公因數是 30。

下列敘述何者錯誤？

- ① a 是 13 的倍數
- ② a 和 b 都是 10 的倍數
- ③ a 和 b 都是 15 的倍數
- ④ a 和 b 的最小公倍數是 1560

15. 當風速達到時速 54 公里的時候，遊樂場的摩天輪就會停止運轉，請問時速 54 公里相當於幾級風力？

風力	公尺/秒鐘
6 級	10.8 ~ 13.8
7 級	13.9 ~ 17.1
8 級	17.2 ~ 20.7
9 級	20.8 ~ 24.4

- ① 6 級
- ② 7 級
- ③ 8 級
- ④ 9 級

16. 下列關於 a 、 b 兩數互質的敘述哪些正確？

甲： a 、 b 兩數的最大公因數是 1

乙： a 、 b 兩數沒有共同的質因數

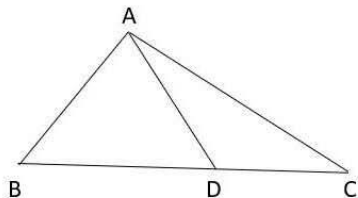
丙： a 和 b 兩數都不能是 1

- ① 只有甲和乙
- ② 只有甲和丙
- ③ 只有乙和丙
- ④ 甲、乙、丙都正確

17. 三角形 ABC 中， \overline{BD} 和 \overline{DC} 的長度比為 $4:3$ 。

已經知道三角形 ABD 的面積是 16 平方公分。

請問三角形 ABC 的面積為多少平方公分？



- ① 12
- ② 25
- ③ 28
- ④ 56

18. 同一時刻，物體的高度與其影子長成正比。

下午 4 時，陳老師量出校園四周多項物品的高度及其影子長，整理成下表，請問表中哪項物體的資料不正確？

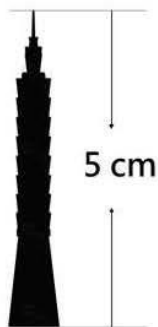
物體名稱	榕樹	鐘塔	旗桿	電線桿
高度 (cm)	540	900	720	600
影子長 (cm)	900	1500	1200	900

- ① 榕樹
- ② 鐘塔
- ③ 旗桿
- ④ 電線桿

19. 已知 $3 \times 8 + 5 = 20 + 27 \div 3$ ，請問下列哪個算式錯誤？

- ① $(3 \times 8 + 5) - 5 = (20 + 27 \div 3) - 5$
- ② $3 \times 8 + 5 - 20 = 20 + 27 \div 3 - 20$
- ③ $3 \times 8 + 5 \times 3 = 20 + 27 \div 3 \times 3$
- ④ $54 + 3 \times 8 + 5 = 54 + 20 + 27 \div 3$

20. 臺北 101 大樓的實際高度約 500 公尺，下圖是它的縮小圖，請問下列何者是這張縮小圖的比例尺？



- ① 1 : 500
② 10000 : 1
③ $\frac{1}{10000}$
④ $\frac{1}{50000}$
21. 「區間測速」是指車輛行經某路段後，以該車輛行駛這段路程的平均速率，判定是否有超速。一隧道全長 30 公里，且在隧道出入口間採用區間測速，速度上限為時速 70 公里。

郭先生進入隧道先以時速 100 公里行駛了 0.2 小時，之後放慢速度，再行駛了 0.4 小時後抵達隧道出口。

賴小姐進入隧道先以時速 50 公里行駛了 0.2 小時，之後加快速度，以時速 100 公里行駛至隧道出口。

請問誰超速了？

- ① 只有郭先生
② 只有賴小姐
③ 兩人都超速
④ 兩人都沒有超速

22. 「農場的 $\frac{1}{5}$ 是菜園，菜園的 $\frac{1}{28}$ 種青花菜，已知種青花菜的面積是 $2\frac{4}{5}$ 公畝，請問農場的面積是多少公畝？」

下列哪個算式可以算出正確答案？

- ① $2\frac{4}{5} \times \frac{1}{28} \times \frac{1}{5}$
② $2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \times \frac{1}{5}$
③ $2\frac{4}{5} \times \frac{1}{28} \div \frac{1}{5}$
④ $2\frac{4}{5} \div \frac{1}{28} \div \frac{1}{5}$

23. 已知 1 磅大約等於 0.4536 公斤，飄香咖啡店進了 16 磅的咖啡豆，如果以每公斤 400 元賣出，全部賣出後可得到多少元？
(先以四捨五入法取概數至小數點後第二位再計算)

- ① 2880
② 2903
③ 2903.04
④ 2904

24. 已知 1 桶果汁，每 16 公升裝成一瓶，全部裝完，相當於裝成 $13\frac{3}{8}$ 瓶。

如果將這桶果汁，每 16 公升裝成一瓶，最多可以裝滿 13 瓶，還剩下多少公升？

① 6

② 0.3

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{128}{3}$

25. 在比例尺 1:1000 的地圖上，有一個長 5 公分、寬 3 公分的長方形土地，它的面積是多少平方公尺？(1 平方公尺 = 10000 平方公分)

① 1.5

② 1500

③ 15000

④ 15000000