

三年級試題選項分析與教學建議

題號	1		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-3-2 加減直式計算：含加、減法多次進、退位。 備註：須處理數字中有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。		
試題內容	1. 飲料店今天賺了 4234 元，昨天賺了 3768 元，今天比昨天多賺多少元？ ① 466 元 ② 576 元 ③ 1534 元 ④ 8002 元		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.83	0.64	0.95
2	0.06	0.10	0.02
3	0.04	0.10	0.01
4	0.07	0.16	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.83	鑑別度	0.31
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.31，正確答案為選項 1，通過率為 83%，顯示超過八成的學生已具備減法直式計算的能力。 2.有 6%的學生選擇選項 2(低分組有 10%)，這些學生可能不理解減法直式借位的操作，沒有將借用的位數扣除。 3.有 4%的學生選擇選項 3(低分組有 10%)，這些學生可能不理解減法直式的意義，只用各個位值的大數字減小數字。 4.有 7%的學生選擇選項 4(低分組有 16%)，這些學生可能不理解題意，誤用加法策略解題。			

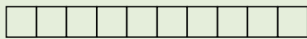
教材地位分析				
		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容		N-2-2 加減算式與直式計算：用位值理解多位數加減計算的原理與方法。初期可操作、橫式、直式等方法並陳，二年級最後歸結於直式計算，做為後續更大位數計算之基礎。直式計算的基礎為位值概念與基本加減法，教師須說明直式計算的合理性。	N-3-2 加減直式計算：含加、減法多次進、退位。	R-4-2 四則計算規律(I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。
補救教學建議				
1. 本學習內容 N-3-2 為 N-2-2 之後續學習概念，故學生應該已經理解三位數加減直式計算(不含兩次退位)。本學習內容是整數加、減直式計算的總結，要求學生熟練整數加、減的直式計算。 2. 以退位減法計算問題「$537-251$」為例，在說明減法退位計算時，教師經常用「向百位借 1」的說法，這種說法並不正確，因為借了並沒有還回來。建議教師改用「拿一個 $\boxed{100}$ 換 10 個①」的說法。 3. 一年級加減法教學重點：基本加減法。 二年級加減法教學重點：二位數的加減直式計算(含進位及退位)；三位數的加減直式計算(不含兩次退位)。 三年級加減法教學重點：四位數以內的加減直式計算；並總結整數的加減直式計算。 4. 本學習內容是整數加減直式計算的總結，四年級不再出現與加減法相關的學習內容，教師應幫助學生熟練加減直式計算。因為三年級只引入 10000 以內的數，因此限制和及被減數都必須小於 10000。 5. 以退位減法計算問題「$1235-678$」為例，進行個位計算時，因為 5 減 8 不夠減，拿 1 個十換 10 個一之後，有兩種解題的方法，第一種是利用基本加減事實來解題，直接利用 $15-8=7$，算出和的個位數字是 7，第二種是利用拆十來解題，透過 $10-8=2$，$2+5=7$，算出和的個位數字是 7。三年級學生應該已熟記基本加減事實，建議教師幫助學生利用第一種方法來解題。 6. 有兩種使用定位板的時機，第一種是溝通數字的位值及位名，第二種是直式計算溝通不同單位的個數，引入定位板時，教師應說明下面三個限制。 (1) 記錄「幾」個十的時候，只能將「幾」記錄在十位，記錄「幾」個一的時候，只能將「幾」記錄在個位。以「將 3 個十，5 個一記在定位板上」為例，定位板記錄不同單位的個數，因此必須將 3 個十的 3 記在十位，5 個一的 5 記在個位，才能夠溝通不同單位計數的意義。				

(2)一個位置只能記錄 1 個數碼。

十位	個位
	
3	15

以「將 3 個十，15 個一記在定位板上」為例，將 3 個十的 3 記在十位，將 15 個一的 15 記在個位，如上圖。當定位板存在時，可以清楚的溝通有 3 個十，15 個一，但是脫離定位板記成 315 後，會和三百一十五混淆。因此數學上限制一個位置只能記錄 1 個數碼，必須將 3 個十，15 個一改記成 4 個十，5 個一。

(3)某位值的個數是 0 時，必須記 0。

十位	個位
	
5	0

以「將 5 個十記在定位板上」為例，將 5 個十的 5 記在十位，如上圖。當定位板存在時，可以清楚的溝通有 5 個十，但是脫離定位板記成 5 後，會和 5 個一混淆，因此數學上限制當個位數字是 0 時，必須在個位上記 0。

題號	2		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-3-3 乘以一位數：乘法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被乘數為二、三位數。 備註：須處理被乘數有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。最後須能以一列算出答案。多位數乘以一位數隱含之分配律來自操作經驗與數感，而非分配律教學。		
試題內容	2. 一天游泳 45 分鐘，可以消耗 252 大卡的熱量。 連續一星期每天游同樣的時間，可以消耗多少大卡的熱量？ ① 259 大卡 ② 297 大卡 ③ 315 大卡 ④ 1764 大卡		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.01	0.04	0.00
2	0.08	0.21	0.01
3	0.11	0.18	0.05
4*	0.79	0.56	0.94
未作答	0.00		
通過率	0.79	鑑別度	0.38
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.38，正確答案為選項 4，通過率為 77%，顯示近八成的學生已具備三位數乘以一位數乘法直式計算的能力。 2. 有 1% 的學生選擇選項 1(低分組有 4%)，這些學生可能不具備三位數乘以一位數乘法直式計算的能力；也可能不理解題意，知道一天消耗 252 大卡，一星期有 7 天，利用 $252+7=259$ 算出答案。 3. 有 8% 的學生選擇選項 2(低分組有 21%)，這些學生可能不具備三位數乘以一位數乘法直式計算的能力；也可能不理解題意，利用加法來計算。 4. 有 11% 的學生選擇選項 3(低分組有 18%)，這些學生可能不具備三位數乘以一位數乘法直式計算的能力；也可能不理解題意，知道一週有 7 天，誤算成一週游泳的時間 $45 \times 7 = 315$ (分鐘)。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。 N-2-7 十十乘法：乘除直式計算的基礎，以熟練為目標。	N-3-3 乘以一位數：乘法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被乘數為二、三位數。	N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。

補救教學建議
1. 二位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為二位數乘法直式計算的基礎，也是除數為二位數除法直式計算的基礎。 以 34×678 為例，直式進行 3 次 34 乘以一位數 6、7、8 的計算。 以 4613÷72 為例，學生估商時進行 2 次 72 乘以一位數的計算。 三位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為三位數乘法直式計算的基礎，也是除數為三位數除法直式計算的基礎。 以 345×678 為例，直式進行了 3 次 345 乘以一位數 6、7、8 的計算。 以 4613÷172 為例，學生估商時進行了 2 次 172 乘以一位數的計算。
2. 有兩種分解 147 的方法，第一種是將 147 分解成 100、40 和 7；第二種是將 147 分解成 1 個百 4 個十和 7 個一。乘法直式計算採用第二種分解方式，使得每一個單位的個數都不超過 10，藉以簡化計算。 下面的圖一是第一種分解方法的乘法直式計算，圖二是第二種分解方法的乘法直式計算。 不易將第一種分解方法的乘法直式計算結果記成一行，學生必須先將 7×6、40×6、200×6 的計算結果記在心裡，再心算出這三個數的和，才能將圖一的計算結果改記成一行，國小三年級的學生不易做到。

	千	百	十	個	
	1000	100	⑩	①	
		2	4	7	
	×			6	
			4	2	
		2	4	0	
	+ 1	2	0	0	
	1	4	8	2	

	千	百	十	個	
	1000	100	⑩	①	
		2	4	7	
	×			6	
			4	2	
		2	4		
	+ 1	2			
	1	4	8	2	

圖 一

圖 二

3.以「 147×6 」為例，說明如何幫助學生將乘法直式計算的積摘要的記成一行。

千	百	十	個		千	百	十	個
1000	100	10	1		1000	100	10	1
	1	4	7			1	4	7
×			6		×			6
		4	2	→		8	8	2
	2	4						
+	6							
	8	8	2					

⇒ 因為「4」和「24」都是「十」單位，只要心算出「 $4+24$ 」，就可以省略記成一行。
 因為「2」和「6」都是「百」單位，只要出「 $2+6$ 」，就可以省略記成一行。因此可以省略記成一行。

4. 一位數乘以二位數的直式計算比二位數乘以一位數的直式計算困難，一位數乘以三位數的直式計算比三位數乘以一位數的直式計算困難，而且不是大數字乘法直式計算的先備知識，教師只要幫助學生理解直式計算解題的意義即可，不要求熟練。

當學生認識乘法交換律後，教師可以幫助學生利用乘法交換律，將一位數乘以二位數的計算問題，例如 7×34 ，改用二位數(三位數)乘以一位數的直式，例如 34×7 算出答案。將一位數乘以三位數的計算問題，例如 7×348 ，改用三位數乘以一位數的直式，例如 348×7 算出答案。

題號	3		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-7 解題：兩步驟應用問題（加減與除、連乘）。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。 備註：乘除混合、連除在四年級（N-4-3）。		
試題內容	3. 一個甜甜圈賣 25 元，每 10 個裝成 1 盒。 小蘭買了 6 盒，共要付多少元？ ① 60 元 ② 250 元 ③ 1500 元 ④ 1800 元		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.07	0.16	0.01
2	0.24	0.42	0.08
3*	0.65	0.35	0.90
4	0.03	0.06	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.65	鑑別度	0.55
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.55，正確答案為選項 3，通過率為 65%，顯示有六成五的學生已具備兩步驟連乘解題的能力。 2.有 7%的學生選擇選項 1(低分組有 16%)，這些學生可能不理解題意，僅用每 10 個一盒，共有 6 盒(10×6)計算答案。 3.有 24%的學生選擇選項 2(低分組有 42%)，這些學生可能不理解題意，僅用 25 元的甜甜圈有 10 個(25×10)計算答案。 4.有 3%的學生選擇選項 4(低分組有 6%)，這些學生可能理解題意，用正確算式解題，但計算發生錯誤；也可能不理解題意。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-8 解題：兩步驟應用問題（加、減、乘）。加減混合、加與乘、減與乘之應用解題。不含併式。不含連乘。	N-3-7 解題：兩步驟應用問題（加減與除、連乘）。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。	N-4-3 解題：兩步驟應用問題（乘除，連除）。乘與除、連除之應用解題。

補救教學建議

1. 本學習內容 N-3-7 為 N-2-8 之後續學習概念，故學生應該已經能夠在具體情境中，解決加，減兩步驟問題；也應該已經能解決先乘後加(減)與先加(減)後乘兩步驟問題。本學習內容延伸兩步驟問題情境至「先除後加及先除後減問題」和「先加後除及先減後除問題」。
2. 單步驟問題是包含一個運算的文字題，兩步驟問題是包含兩個運算的文字題，三步驟問題是包含三個運算的文字題。
二年級引入「加、減」及「加(減)、乘」兩步驟問題；三年級引入「加(減)、除」及「連乘」兩步驟問題；四年級引入「乘、除」及「連除」兩步驟問題；五年級引入三步驟問題。
二年級至四年級的兩步驟問題，以及五年級的三步驟問題，都限制在整數情境，六年級才引入分數及小數的多步驟問題。。
3. 本學習內容教學重點是解決連乘的兩步驟問題，並用二個算式記錄解題活動，不討論利用數學性質簡化計算的問題。例如：面對「 $37 \times 25 \times 4$ 」的文字題情境時，不討論先算「 37×25 」與先算「 25×4 」，何種算法較有效率。四年級引入乘法結合律之後，才開始討論簡化計算的問題。
教師不宜命「丙=20，甲是乙的3倍，乙是丙的4倍，請問甲是丙的多少倍？」的問題，「甲是乙的3倍」是基準量與比較量關係的描述。
教師應命「丙=20，乙的3倍和甲一樣大，丙的4倍和乙一樣大，請問丙的多少倍和甲一樣大？」的問題，學生較容易將「乙的3倍和甲一樣大」記成「乙 $\times 3 =$ 甲」。

題號	4		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-3-8 解題：四則估算。具體生活情境。較大位數之估算策略。能用估算檢驗計算結果的合理性。 備註：估算解題的布題應貼近生活情境。本年級剛學除法，因此估算問題須簡單。		
試題內容	4. 一個披薩賣 698 元，老師買了 3 個披薩請全班吃，老師付的錢最接近多少元？ ① 1800 元 ② 2000 元 ③ 2100 元 ④ 2200 元		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.13	0.01
2	0.11	0.20	0.04
3*	0.76	0.51	0.93
4	0.07	0.14	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.76	鑑別度	0.41
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.41，正確答案為選項 3，通過率為 76%，顯示近八成的學生已具備乘法估算的能力。 2.有 6%的學生選擇選項 1(低分組有 13%)，這些學生可能不具備乘法估算的能力，看到百位是 6 就用 600 來計算， $600 \times 3 = 1800$ 。 3.有 11%的學生選擇選項 2(低分組有 20%)，這些學生可能不具備乘法估算的能力，先利用 $698 \times 3 = 2094$ 算出實際金額，只注意前面的 2 千多而認為答案是 2000。 4.有 7%的學生選擇選項 4(低分組有 14%)，這些學生可能不具備乘法估算的能力，他們知道 698 接近 700，算出 $700 \times 3 = 2100$ ，但誤認為估算應該要多一些所以認為要付 2200 元，也可能計算時發生錯誤。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-4 解題：簡單加減估算。具體生活情境。以百位數估算為主。	N-3-8 解題：四則估算。具體生活情境。較大位數之估算策略。能用估算檢驗計算結果的合理性。	N-4-4 解題：對大數取概數。具體生活情境。四捨五入法、無條件進入、無條件捨去。含運用概數做估算。近似符號「 $\approx$ 」的使用。

補救教學建議

1. 估算與取概數都無法精確地描述個數，因而容忍少量的差異，只做大概的描述，但是它們最後描述的單位並不相同。
估算是計算的問題，例如「 $402+299$ 」中的 402 很接近 400，299 很接近 300， $400+300=700$ ，所以「 $402+299$ 」估算的答案是 700，估算的答案必須以「1」為單位來描述。
概算是先進行單位量轉換後再計算的問題，例如「 $402+299$ 」中的 402 很接近 4 個百，299 很接近 3 個百，4 個百加 3 個百是 7 個百，所以「 $402+299$ 」概算的答案是 7 個百，概算的答案不是以「1」為單位來描述。
2. 估算為四捨五入法取概數的前置經驗，在此不宜進行取概數的教學。例如：「甲有 699 元，甲最多有幾張 100 元？」是取概數的問題。
3. 教師在評量估算問題時，不宜直接要求估算結果的標準答案，例如不可直接提問「 $398\div 8$ 的答案大約是多少？」，因為 50 和 49 都是合理的答案。
教師只宜布下列的問題：例如 $398\div 8=()$ ，答案最接近 60、50、40 中的哪一個數字？
4. 乘法估算，被估算的數字僅限被乘數；除法估算，被估算之數字僅限被除數，商以整百或整十為宜。例如：「 $298\times 2=()$ ，答案最接近 400、500、600、700 中的哪一個數字？」「 $899\div 3=()$ ，答案最接近 100、200、300、400 中的哪一個數字？」
5. 當學生計算發生錯誤時，例如得到「 $599\times 2=1398$ 」的結果，教師可以透過問話「 599×2 很接近 600×2 ， $600\times 2=1200$ ， $599\times 2=1398$ 是否合理？」，幫助學生檢驗答案的合理性。

題號	5		
內容領域	關係	認知歷程向度	概念理解
學習內容	R-3-2 數量模式與推理 (I)：以操作活動為主。一維變化模式之觀察與推理，例如數列、一維圖表等。 備註：含學生之簡單推理與說明。本教學活動不可出現公式，此非本條目之學習目標。可結合表格教學 (D-3-1)。		
試題內容	5. 小美用☆、▼、◎、◆四種珠子串項鍊。 ▼▼☆◆◎☆◆▼▼☆◆◎☆◆▼▼☆◆…… 觀察上面小美串項鍊的規律， 請問接下來要串哪種珠子？ ① ☆ ② ▼ ③ ◎ ④ ◆		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.01	0.03	0.00
2	0.14	0.24	0.06
3*	0.84	0.69	0.93
4	0.01	0.03	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.84	鑑別度	0.24
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.24，正確答案為選項 3，通過率為 84%，顯示超過八成的學生已具備一維變化模式推理的能力。 2.有 1%的學生選擇選項 1(低分組有 3%)，這些學生不理解題意；也可能尚未具備一維變化模式推理的能力。 3.有 14%的學生選擇選項 2(低分組有 24%)，這些學生可能沒有發現整列的規則是 7 顆珠子一輪，誤用第二顆◆的後面是▼來作答；也可能不理解題意。 4.有 1%的學生選擇選項 4(低分組有 3%)，這些學生可能誤解題意，僅用題目數列中的最後一種珠子作為答案；也可能尚未具備一維變化模式推理的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容		R-3-2 數量模式與推理 (I)：以操作活動為主。一維變化模式之觀察與推理，例如數列、一維圖表等。	R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

補救教學建議

1. 本學習內容首次引入數量模式與推理，希望學生透過觀察數列、一維圖表等，能說出一維變化模式之規律；找出一維變化模式的下一項，並說明理由。二年級至四年級的兩步驟問題，以及五年級的三步驟問題，都限制在整數情境，六年級才引入分數及小數的多步驟問題。
2. 以問題「想想看，第 4 個圖形有幾個圈？○○○、○○○○、○○○○○」為例，本學習內容只要求學生找出下一個圖形有 6 個圈，並說明理由即可，不必要求學生找出其它項，例如不必找出第 18 個圖形是什麼。
3. 教師提供數列讓學生討論時，並沒有定義數列的一般項，因此當我們只給定數列前幾項時，可以有很多定義數列的方法。

以「2、3、5、 、 」為例，下面都是合理的答案。

(1) 2、3、5、8、12 (3 比 2 多 1、5 比 3 多 2、8 比 5 多 3、12 比 8 多 4)

(2) 2、3、5、8、13 ($2+3=5$ 、 $3+5=8$ 、 $5+8=13$)

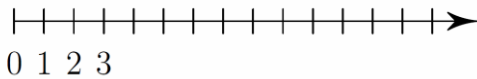
(3) 2、3、5、10、20 ($2+3=5$ 、 $2+3+5=10$ 、 $2+3+5+10=20$)

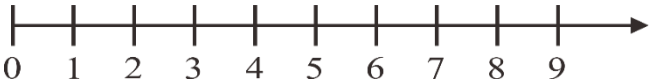
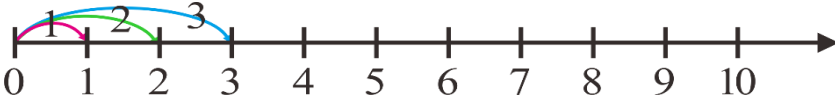
(4) 2、3、5、7、11 (將質數由小至大依序排列)

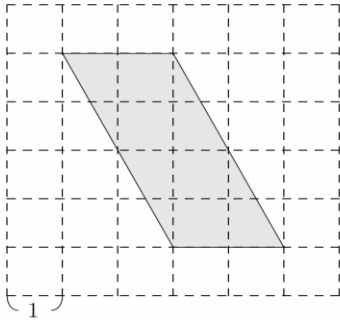
教師提供數列讓學生討論時，應接受不同的合理答案，但學生只要能說出一種合理的答案即可。

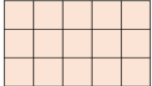
題號	6		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-3-3 乘以一位數：乘法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被乘數為二、三位數。 備註：須處理被乘數有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。最後須能以一列算出答案。多位數乘以一位數隱含之分配律來自操作經驗與數感，而非分配律教學。		
試題內容	6. 已經知道「 $76 \times 68 = 5168$ 」、 $76 \times 66 = \text{甲}$ ， 請問甲數的個位數字和十位數字之和是多少？ ① 5 ② 7 ③ 9 ④ 12		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.23	0.07
2*	0.41	0.20	0.65
3	0.09	0.16	0.04
4	0.34	0.40	0.24
未作答	0.01		
通過率	0.41	鑑別度	0.45
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.45，正確答案為選項 2，通過率為 41%，顯示超過四成的學生已能在被乘數固定時掌握乘數和積之間的關係。 2. 有 15% 的學生選擇選項 1 (低分組有 23%)，這些學生可能無法在被乘數固定時掌握乘數和積之間變化的關係；也可能不具備兩位數乘以兩位數乘法直式計算的能力。 3. 有 9% 的學生選擇選項 3 (低分組有 16%)，這些學生可能無法在被乘數固定時掌握乘數和積之間變化的關係；也可能不具備兩位數乘以兩位數乘法直式計算的能力。 4. 有 34% 的學生選擇選項 4 (低分組有 40%)，這些學生可能無法在被乘數固定時掌握乘數和積之間變化的關係；也可能不理解題意，將「 $76 \times 66 = \text{甲}$ 」中被乘數的個位數字及乘數的十位數字相加 ($6 + 6 = 12$)，得到答案 12。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。 N-2-7 十十乘法：乘除直式計算的基礎，以熟練為目標。	N-3-3 乘以一位數：乘法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被乘數為二、三位數。	N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。
補救教學建議			
1. 教師可以透過擷取九九乘法表部分算式，在被乘數不變的限制下，幫助學生發現乘數變化和答案變化之間的關係，例如：2×8 比 2×6 多加了 2 個 2，答案 16 比 12 也多了 2 個 2，2×6 比 2×8 少加了 2 個 2，答案 12 比 16 也少了 2 個 2。 $2 \times 6 = 12$ $2 \times 7 = 14$ $2 \times 8 = 16$ 2. 教師可以透過「6×12」等問題，檢查學生是否掌握九九乘法前後算式的關係，學生可以利用「$6 \times 9 = 54$，$54 + 6 = 60$，$60 + 6 = 66$，$66 + 6 = 72$」算出「6×12」的答案。 3. 76×68 和 76×66 的被乘數都是 76，76×66 的乘數比 76×68 少 2，所以 76×66 的積比 76×68 的積少了 2 個 76。 $76 \times 68 = 5168$，$76 \times 2 = 152$，$5168 - 152 = 5016$，可以得到 $76 \times 66 = 5016$			

題號	7		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。 備註：數線須從 0 開始。運用長度加減法（N-2-11），理解在數線上做加、減的意義。		
試題內容	7. 下圖是一條數線。  下面關於數線的敘述，何者正確？ ① $10 - 3 = 7$ ，刻度 10 往左移 3 格，會移到刻度 7 ② $7 - 2 = 5$ ，刻度 2 往右移 7 格，會移到刻度 5 ③ $3 + 8 = 11$ ，刻度 3 往右移到刻度 8，要移 11 格 ④ $5 + 9 = 14$ ，刻度 5 和刻度 9 之間有 14 格		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.77	0.48	0.95
2	0.07	0.17	0.01
3	0.09	0.19	0.03
4	0.06	0.16	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.77	鑑別度	0.47
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.47，正確答案為選項 1，通過率為 77%，顯示近八成的學生已具備報讀整數數線並在數線上做加、減的能力。 2. 有 7% 的學生選擇選項 2（低分組有 17%），這些學生可能不理解如何在整數數線上做加減，混淆被減數和減數的意義。 3. 有 9% 的學生選擇選項 3（低分組有 19%），這些學生可能不理解如何在整數數線上做加減，混淆加法和減法的意義。 4. 有 6% 的學生選擇選項 4（低分組有 16%），這些學生可能不理解如何在整數數線上做加減，混淆加數及和的意義。			

教材地位分析				
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識	
學習內容	N-2-11 長度：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 S-2-3 直尺操作：測量長度。報讀公分數。指定長度之線段作圖。	N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。	N-4-8 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。	
補救教學建議				
1. 本學習內容 N-3-11 為 S-2-3 之後續學習概念，故學生應該已經能用直尺測量給定線段的長度及兩點的距離；開始引入整數數線，並在數線上做大小比較與加、減的操作。 2. 本學習內容由長度測量的經驗來認識數線，不要求學生自己繪製數線，教師教學或評量時應先提供已繪製的數線。 國小階段尚未引入負數，因此國小階段的整數數線，僅限於正數範圍，如下所示：  3. 可以利用直尺測量物長的經驗來認識數線，例如透過直尺測量物長是 5 公分，指的是刻度 5 和刻度 0 的距離是 5 公分，幫助學生認識數線上的刻度 5 有下列兩種意義： (1) 在數線上的位置(或坐標)是 5。 (2) 和原點 0 的距離是 5。 4. 教師可以透過下列方法繪製數線，幫助學生理解整數數線的意義。 步驟一：先利用直尺上的公分刻度繪製有刻度的數線，並標示相鄰兩刻度間的距離都是 1(單位)。  步驟二：再幫助學生將最左邊的刻度上標示 0，在和 0 距離 1 的刻度上標示 1，在和 0 距離 2 的刻度上標示 2，在和 0 距離 3 的刻度上標示 3，以此類推。  步驟三：說明相鄰兩刻度的距離都是 1(單位)，刻度 5 和 0 的距離是 5(單位)  5. 數線是國中學習直角坐標的先備知識，也是統整所有數系及幾何的重要基礎，應讓學生經常練習數線的使用。				

題號	8		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。 備註：應用平方公分板（百格圖），協助點數簡單圖形如正方形、長方形、三角形之面積，但不發展一般公式。		
試題內容	8. 下圖是平方公分板，請問塗色圖形的面積是多少平方公分？  (單位：公分) ① 4 平方公分 ② 8 平方公分 ③ 12 平方公分 ④ 16 平方公分		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.05	0.11	0.01
2*	0.88	0.70	0.97
3	0.06	0.14	0.02
4	0.01	0.04	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.88	鑑別度	0.27
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.27，正確答案為選項 2，通過率為 88%，顯示近九成的學生已具備以「1 平方公分」為單位實測面積的能力。 2. 有 5% 的學生選擇選項 1(低分組有 11%)，這些學生可能不具備以「1 平方公分」為單位實測面積的能力，只計算完整的 1 平方公分，忽略不滿 1 平方公分的部分，得到面積是 4 平方公分。 3. 有 6% 的學生選擇選項 3(低分組有 14%)，這些學生可能不具備以「1 平方公分」為單位實測面積的能力，算出塗色部分的格子有 12 格，就當成 12 平方公分，不管其中有些格子沒有全部都塗色的。 4. 有 1% 的學生選擇選項 4(低分組有 4%)，這些學生這些學生可能不具備以「1 平方公分」為單位實測面積的能力。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-12 容量、重量、面積：以操作活動為主。此階段量的教學應包含初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。不同的量應分不同的單元學習。	N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。	N-4-11 面積：「平方公尺」。實測、量感、估測與計算。
補救教學建議			
1.教師應多提供學生以「1 平方公分」為單位的實測活動，例如名片和 45 個「1 平方公分」合起來一樣大，所以名片的面積是 45 平方公分，幫助學生建立「1 平方公分」面積的量感。 2.當學生理解「1 平方公分」和「蘋果、花片等」相同，都是可以被計數的單位時，就能幫助學生進行平方公分面積單位的加、減和整數倍計算。例如甲紙和 10 個「1 平方公分」合起來一樣大，乙紙和 8 個「1 平方公分」合起來一樣大，可以利用加法「$10+8=18$」算出兩張紙合起來的面積與 18 個「1 平方公分」合起來一樣大，所以兩張紙片的面積和是 18 平方公分。也可以利用減法「$10-8=2$」算出甲紙的面積比乙紙大 2 個「1 平方公分」，所以甲紙和乙紙的面積差是 2 平方公分。 3.以「長 5 公分、寬 3 公分長方形的面積是多少平方公分？」為例，教師布題時應給定圖一的長方形，不能給定圖二的長方形，因為長方形內部是沒有格線的。圖二是學生將 1 平方公分的方瓦排在圖一長方形內部後形成的圖形。  圖一  圖二 4.以求長方形面積為例，教師可以透過平方公分板，先幫助學生點數長方形的面積和幾個 1 平方公分合起來一樣大，也就是幾平方公分；再要求學生透過「一排有幾個 1 平方公分，有幾排」的方式，用乘法計算出長方形的面積是幾個 1 平方公分，也就是幾平方公分。三年級只能討論給定長方形的面積是幾平方公分，不能引入長方形的面積公式，四年級才引入長方形面積公式。 5.建立「1 平方公分」為單位的面積概念，先定義邊長 1 公分的正方形面積為「1 平方公分」。再透過將 1 平方公分正方形紙的分割、拼湊活動，讓學生經驗 1 平方公分的正方形可經由對摺分割成 2 個全等的長方形或三角形（如圖  或 ），因此 2 個全等的長方形或三角形可拼湊回 1 平方公分的正方形。讓學生理解由 1 平方公分的正方形分割而成的 2 個全等長方形或三角形，每個長方形或三角形的面積都是 $\frac{1}{2}$ 平方公分。			

題號	9		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-3-5 除以一一位數：除法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。 備註：須處理被除數有 0 的題型。		
試題內容	9. 下列何者是「 $911 \div 9$ 」的商和餘數？ ① 商是 10，餘數是 11 ② 商是 100，餘數是 2 ③ 商是 101，餘數是 2 ④ 商是 110，餘數是 2		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.18	0.01
2	0.12	0.21	0.04
3*	0.66	0.38	0.89
4	0.14	0.21	0.06
未作答	0.00		
通過率	0.66	鑑別度	0.51
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.51，正確答案為選項 3，通過率為 66%，顯示近七成的學生已具備除以一一位數的除法直式計算能力。 2.有 8%的學生選擇選項 1(低分組有 18%)，這些學生可能尚未具備除以一一位數的除法直式計算能力，僅估商到十位就停止。 3.有 12%的學生選擇選項 2(低分組有 21%)，這些學生可能理解除法直式計算的意義，但忘記紀錄個位的估商；也可能尚未具備除以一一位數的除法直式計算能力。 4.有 14%的學生選擇選項 4(低分組有 21%)，這些學生可能理解除法直式計算的意義，但在紀錄十位和個位的估商時出現錯誤；也可能尚未具備除以一一位數的除法直式計算能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-9 解題：分裝與平分。以操作活動為主。除法前置經驗。理解分裝與平分之意義與方法。引導學生在解題過程，發現問題和乘法模式的關連。 N-3-4	N-3-5 除以一一位數：除法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。	N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。

	除法：除法的意義與應用。基於 N-2-9 之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十乘十範圍的除法，做為估商的基礎。	
--	---	--

補救教學建議

1. 本學習內容 N-3-5 為 N-3-4 之後續學習概念，故學生應該已經理解除法的意義，並使用除法算式記錄分裝或平分活動的解題過程；也應該已經能夠用除法解決生活中的問題。N-3-5 幫助學生熟練二位數除一位數、三位數除一位數的直式計算。
2. 除法問題有等分除和包含除兩種題型，本學習內容限制在等分除情境引入二位及三位除一位數的除法直式計算。
 等分除問題：將 748 元平分給 5 個人，每人最多分到幾元，還剩下多少元？
 包含除問題：748 元，每 5 元分給 1 個人，最多可分給幾人，還剩下多少元？
 等分除問題可以將 748 元解讀成 7 張 100 元、4 枚十元和 5 個一元，讓百元、十元和一元的個數都不超過 10 個，可以簡化計算。
3. 本學習內容將除法直式計算視為解題的工具，不論文字題是等分除或包含除問題，學生只要判斷它是除法問題，就能利用除法直式來解題。
4. 基本乘法事實是二位數除一位數及三位數除一位數直式計算的基礎。
 以 $78 \div 5$ 為例，直式進行了 2 次一位數乘以 5 的計算；以 $678 \div 5$ 為例，直式進行了 3 次一位數乘以 5 的計算。
 教師應要求學生熟練二位及三位數乘以一位數的乘法直式計算，並將計算的結果記成一行，為除數是二、三位數的除法直式計算鋪路。
5. 以「659 元平分給 4 個人，每個人最多分到幾元，還剩下多少元？」為例，說明如何幫助學生學習除法直式計算。
 (1) 有兩種分解 659 的方法，第一種是將 659 分解成 $600 + 50 + 9$ ，第二種是將 659 分解成 6 個百、5 個十和 9 個一。第二種方法會讓計算的數字變小，本基本學習內容透過第二種分解方式引入除法直式計算。
 (2) 將 659 元分解成 6 張百元鈔票、5 枚十元硬幣和 9 個一元硬幣。
 先將 6 張百元鈔票平分給 4 個人，每人分到 1 張百元鈔票，還剩下 2 張百元鈔票不夠分；將 2 張百元鈔票換成 20 枚的十元硬幣，再加上原有的 5 枚十元硬幣，合起來有 25 枚十元硬幣；25 枚十元硬幣平分給 4 個人，每人分到 6 枚十元硬幣，還剩下 1 枚十元硬幣不夠分；將 1 枚十元硬幣換成 10 個一元硬幣，加上原有的 9 個一元硬幣，合起來有 19 個一元硬幣；19 個一元硬幣平分給 4 人，每人分到 4 個一元硬幣，還剩下 3 個一元硬幣。

合起來每個人分到 1 張百元鈔票、6 枚十元硬幣和 4 個 1 元硬幣，還剩下 3 個一元硬幣，也就是每人分到 164 元，剩下 3 元。

(3)用直式將解題過程記錄下來，並說明每個步驟的意義，如果學生混淆不同單位平分的意義，教師可以在直式上方畫出定①、⑩、100 來說明。

	百	十	個	
	100	⑩	①	
	1	6	4	⇒分到 1 張百元、6 枚十元和 4 個一元，也就是 164 元
4)	6	5	9	⇒6 張百元鈔票、5 枚十元硬幣和 9 個一元硬幣
	4			⇒先分 6 張百元鈔票，每人分到 1 張，還剩下 2 張
	2	5		⇒換成 20 枚十元，加上原有的 5 枚，有 25 枚十元
	2	4		⇒再分 25 枚十元，每人分到 6 枚，剩下 1 枚十元
		1	9	⇒換成 10 個一元，加上原有的 9 個，有 19 個一元
		1	6	⇒再分 19 個一元，每人分到 4 個一元
			3	⇒剩下 3 個一元

題號	10																																																			
內容領域	關係	認知歷程向度	概念理解																																																	
學習內容	R-3-2 數量模式與推理 (I)：以操作活動為主。一維變化模式之觀察與推理，例如數列、一維圖表等。 備註：含學生之簡單推理與說明。本教學活動不可出現公式，此非本條目之學習目標。可結合表格教學 (D-3-1)。																																																			
試題內容	10. 已經知道民國 111 年 6 月 1 日是星期三， 6 月共有 30 天。 <table><tr><th colspan="7">民國 111 年 6 月</th></tr><tr><th>日</th><th>一</th><th>二</th><th>三</th><th>四</th><th>五</th><th>六</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> 甲說：民國 111 年 6 月的最後一個星期三是 6 月 28 日。 乙說：民國 111 年 6 月共有 5 個星期六。 請問哪些人的說法正確？ ① 只有甲正確 ② 只有乙正確 ③ 甲和乙都正確 ④ 甲和乙都不正確			民國 111 年 6 月							日	一	二	三	四	五	六				1	2																														
民國 111 年 6 月																																																				
日	一	二	三	四	五	六																																														
			1	2																																																
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)																																																			
選項	整體	低分組	高分組																																																	
1	0.09	0.16	0.03																																																	
2	0.19	0.32	0.07																																																	
3	0.06	0.15	0.01																																																	
4*	0.66	0.36	0.88																																																	
未作答	0.00																																																			
通過率	0.66	鑑別度	0.52																																																	
試題品質分析																																																				
1.本題鑑別度為 0.52，正確答案為選項 4，通過率為 66%，顯示近七成的學生已具備一維變化模式觀察與推理的能力。																																																				
2.有 9%的學生選擇選項 1(低分組有 16%)，這些學生可能不具備一維變化模式觀察與推理的能力，誤將第二個週三認為是 6 月 7 日，依此類推後面的週三依序為 14 日、21 日、28 日，而認為最後一個週三是 6 月 28 日。																																																				

- 3.有 19%的學生選擇選項 2(低分組有 32%)，這這些學生可能不具備一維變化模式觀察與推理的能力，他們發現月曆填寫後有五橫排，因此誤認週六有五個。
- 4.有 6%的學生選擇選項 3(低分組有 15%)，這些學生可能不具備一維變化模式觀察與推理的能力。

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-14 時間：「年」、「月」、「日」、「星期」。理解所列時間單位之關係與約定。 D-3-1 一維表格與二維表格：以操作活動為主。報讀、說明與製作生活中的表格。二維表格含列聯表。	R-3-2 數量模式與推理(I)：以操作活動為主。一維變化模式之觀察與推理，例如數列、一維圖表等。	R-4-2 四則計算規律(I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

補救教學建議

- 以問題「想想看，第 4 個圖形有幾個圈？○○○、○○○○、○○○○○」為例，只要求學生找出下一個圖形有 6 個圈，並說明理由即可，不必要求學生找出其它項，例如不必找出第 18 個圖形是什麼。
- 教師提供數列讓學生討論時，並沒有定義數列的一般項，因此當我們只給定數列前幾項時，可以有很多定義數列的方法。
以「2、3、5、□、□」為例，下面都是合理的答案。
(1)2、3、5、8、12 (3 比 2 多 1、5 比 3 多 2、8 比 5 多 3、12 比 8 多 4)
(2)2、3、5、8、13 ($2+3=5$ 、 $3+5=8$ 、 $5+8=13$)
(3)2、3、5、10、20 ($2+3=5$ 、 $2+3+5=10$ 、 $2+3+5+10=20$)
(4)2、3、5、7、11 (將質數由小至大依序排列)
教師提供數列讓學生討論時，應接受不同的合理答案，但學生只要能說出一種合理的答案即可。

題號	11		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-3-2 正方形和長方形：以邊與角的特徵來定義正方形和長方形。 備註：知道如何判斷斜擺的長方形或正方形依舊是長方形或正方形。		
試題內容	11. 正^正方^方形^形的^的邊^邊長^長是^是 5 公^公分^分； 長^長方^方形^形的^的長^長是^是 6 公^公分^分、寬^寬是^是 4 公^公分^分； 正^正三^三角^角形^形的^的邊^邊長^長是^是 7 公^公分^分。 請^請問^問哪^哪個^個圖^圖形^形的^的周^周長^長最^最長^長？ ① 正^正方^方形^形 ② 長^長方^方形^形 ③ 正^正三^三角^角形^形 ④ 一^一樣^樣長^長		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.08	0.02
2	0.23	0.38	0.09
3*	0.66	0.42	0.87
4	0.06	0.12	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.66	鑑別度	0.45
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.45，正確答案為選項 3，通過率為 66%，顯示近七成的學生已具備從正方形和長方形反推邊與角特徵的能力。 2.有 4%的學生選擇選項 1(低分組有 8%)，這些學生可能知道正方形和長方形的邊長特徵，但計算出現錯誤；也可能尚未具備從正方形和長方形反推邊與角特徵的能力。 3.有 23%的學生選擇選項 2(低分組有 38%)，這些學生可能知道正方形和長方形的邊長特徵，但計算出現錯誤；也可能尚未具備從正方形和長方形反推邊與角特徵的能力。 4.有 6%的學生選擇選項 4(低分組有 12%)，這些學生可能知道正方形和長方形的邊長特徵，但計算出現錯誤；也可能尚未具備從正方形和長方形反推邊與角特徵的能力。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-2-4 平面圖形的邊長：以操作活動與直尺實測為主。認識特殊幾何圖形的邊長關係。含周長的計算活動。	S-3-2 正方形和長方形：以邊與角的特徵來定義正方形和長方形。	S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。 S-4-8 四邊形：以邊與角的特徵(含平行)認識特殊四邊形並能作圖。如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。
補救教學建議			
1.本學習內容 S-3-2 為 S-2-4 之後續學習概念，故學生應該已經認識給定的正方形、長方形、正三角形、等腰三角形的邊長關係。 本學習內容幫助學生由邊長和角的特性來認識正方形、由邊長和角的特性來認識長方形。 2.教師常混淆「長方形的定義(如何辨識圖形為長方形)」與「長方形的性質(長方形有哪些特徵)」，誤認為一個四邊形要同時滿足「四個角都是直角，對邊等長、對邊互相平行，對角線互相平分且等長」這些條件，才能辨識這個四邊形是長方形。 數學上利用最少的條件來辨識長方形，一個四邊形，只要四個角都是直角，就能確認該四邊形為長方形。 各版本都定義四個角都是直角的四邊形為長方形，因此只要一個四邊形的四個角都是直角，該四邊形就是長方形。 定義長方形之後，可以探討長方形還有哪些共同特徵，例如長方形對邊等長、長方形對邊互相平行等，都屬於長方形的性質。 3.各版本的課本都以邊和角的特徵來定義正方形與長方形。 長方形：四個角都是直角的四邊形稱為長方形。 正方形：四個角都是直角且四邊等長的四邊形稱為正方形。 在還沒有定義正方形與長方形之前，教學時討論的都是給定的正方形與長方形，定義正方形與長方形之後，教學時討論的是所有正方形與長方形共同的特徵。 4.學生可能會認為斜擺的長方形或正方形不是長方形或正方形，教師可協助學生利用直尺和三角板檢查斜擺的長方形或正方形依舊是長方形或正方形。			

5.長方形哪一邊稱為長邊、哪一邊稱為寬邊常引起爭議。數學上並沒有給長邊或寬邊下定義，日常生活中，常見下面這三種定義長邊和寬邊的方式。

第一種：因為受到「長」這個關鍵字的影響，稱比較長的那一邊為長邊，比較短的那一邊稱為寬邊。

第二種：由長方形擺放的位置決定長邊和寬邊，將長方形擺正後，稱水平方向的那一邊為長邊，鉛直方向的那一邊為寬邊。這種定義的方式有一個缺點，如果兩個人擺放的方式不相同，他們所稱的長邊和寬邊就不相同。

第三種：因為只要確定長邊和寬邊就能決定一個長方形，因此長邊和寬邊是同等的重要，只要約定其中的一邊為長邊，那麼剩下的另一邊就是寬邊。

題號	12		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 備註：基於 N-3-1 的限制，單位換算公升數限個位數。可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。		
試題內容	12. 媽媽將煮好的桑椹汁全部平分倒入 3 個相同的玻璃杯中。下圖是其其中一個裝桑椹汁的玻璃杯。媽媽共煮了多少桑椹汁？  ① 1 公升 35 毫升 ② 1 公升 350 毫升 ③ 13 公升 50 毫升 ④ 1350 公升		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.17	0.03
2*	0.56	0.34	0.79
3	0.15	0.22	0.08
4	0.19	0.26	0.10
未作答	0.01		
通過率	0.56	鑑別度	0.45
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.45，正確答案為選項 2，通過率為 56%，顯示近六成的學生已能報讀有毫升刻度量杯的液量，並具備容量單位複名數乘法計算及公升、毫升單位化聚的能力。 2. 有 9% 的學生選擇選項 1 (低分組有 17%)，這些學生可能無法報讀有毫升刻度量杯的液量；也可能不具備容量單位複名數乘法計算或公升、毫升單位化聚的能力。 3. 有 15% 的學生選擇選項 3 (低分組有 22%)，這些學生已能報讀有毫升刻度量杯的液量，知道所有桑椹汁是 $450 \times 3 = 1350$ 毫升，但誤認為 1 公升 = 100 毫升。 4. 有 19% 的學生選擇選項 4 (低分組有 26%)，這些學生已這些學生可能在報讀有毫升刻度量杯液量時發生錯誤，將 450 毫升報讀為 450 公升。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-12 容量、重量、面積：以操作活動為主。此階段量的教學應包含初步認識、直接比較、間接比較(含個別單位)。不同的量應分不同的單元學習。	N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。	N-5-15 解題：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。
補救教學建議			
1.建議教師先引入「毫升」單位，待學生能進行毫升單位的實測、估測與加減計算後，再引入「公升」單位。 2.學生必須先學會描述容器中有多少液量，才能夠描述容器中最多裝了多少液體，因此學生先學習如何描述液量後，才能夠溝通容器的容量是多少。例如將容器中的水倒入量杯中，測量出水有 5 毫升，我們稱容器中水的液量是 5 毫升，將容器中裝滿水再倒入量杯中，測量出水有 8 毫升，我們稱容器的容量是 8 毫升。 3.因為「公升、毫公升」單位間是 1000 倍的關係，建議教師先處理大單位化為小單位的問題，再處理小單位聚成大單位的問題，但兩單位間的化聚限制在整數倍，例如「5 公升=()毫公升」，「3000 毫公升=()公升」。			

題號	13		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。 備註：知道圓心是認識圓的重要定義元素，但是圓心並不屬於圓。		
試題內容	13. 老師畫了一個大圓。 甲站在圓心 ^上 ，乙站在圓周 ^上 ，丙站在圓的內部 ^部 ，丁站在圓的外部 ^部 。 請問誰和甲的距離最近、誰和甲的距離最遠？ ① 乙和甲的距離最近、丙和甲的距離最遠 ② 乙和甲的距離最近、丁和甲的距離最遠 ③ 丙和甲的距離最近、乙和甲的距離最遠 ④ 丙和甲的距離最近、丁和甲的距離最遠		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.15	0.01
2	0.09	0.18	0.03
3	0.15	0.28	0.05
4*	0.69	0.38	0.92
未作答	0.01		
通過率	0.69	鑑別度	0.54
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.54，正確答案為選項 4，通過率為 69%，顯示近七成的學生已具備判讀「圓心」、「圓周」的能力。 2.有 6%的學生選擇選項 1(低分組有 15%)，這些學生可能尚未具備判讀「圓心」、「圓周」的能力，誤解圓內部和圓周的意思；也可能不理解題意。 3.有 9%的學生選擇選項 2(低分組有 18%)，這些學生可能尚未具備判讀「圓心」、「圓周」的能力；也可能僅以「乙和甲的距離」、「丁和甲的距離」做比較；也可能不理解題意。 4.有 15%的學生選擇選項 3(低分組有 28%)，這些學生可能尚未具備判讀「圓心」、「圓周」的能力；也可能僅以「丙和甲的距離」、「乙和甲的距離」做比較；也可能不理解題意。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-2-2 簡單幾何形體：以操作活動為主。包含平面圖形與立體形體。辨認與描述平面圖形與立體形體的幾何特徵並做分類。	S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。	S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合（幾分之幾圓）。能畫出指定扇形。
補救教學建議			
1. 本學習內容 S-3-3 為 S-2-2 之後續學習概念，故學生應該已經能辨認簡單平面圖形(圓、三角形、正方形、長方形等)。 本學習內容首次引入周界是曲線的平面圖形，幫助學生認識圓的圓心、圓周、半徑與直徑，以及半徑與直徑長度的關係，並幫助學生使用圓規畫圓。。 2. 教師應區分「圓(circle)」和「圓區域(disc)」的意義： 圓：在平面上選定一定點 O，在平面上與定點 O 的距離是 r ($r > 0$) 的所有點所成的集合稱為圓，該定點 O 稱為圓心，r 稱為半徑。 圓區域：圓和圓內部合起來稱為圓區域。 利用圓規畫圓時，畫出來的圖形是圓，利用摺紙找出圓的直徑時，所摺的圖形是圓區域。教師應區分圓或圓區域使用的時機及其限制。			

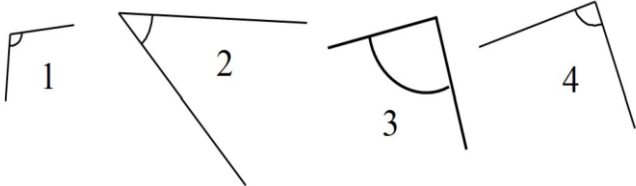
題號	14		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-1 一萬以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「千」。位值單位換算。 備註：教學可進行到最後的「一萬」，但不進行超過一萬的教學。		
試題內容	14. 用 0、3、5、9 這四張數字卡片排出一個比 5000 小，但是比 3600 大的四位数，這個四位数百位數字是多多少？ ① 0 ② 3 ③ 5 ④ 9		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.11	0.02
2	0.14	0.24	0.06
3	0.14	0.24	0.06
4*	0.65	0.39	0.86
未作答	0.01		
通過率	0.65	鑑別度	0.47
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.47，正確答案為選項 4，通過率為 65%，顯示有六成五的學生已能比較四位數大小，並具備位值單位換算的能力。 2. 有 6% 的學生選擇選項 1 (低分組有 11%)，這些學生可能無法比較四位數的大小；也可能誤解題意，排出最小的四位數字 3059。 3. 有 14% 的學生選擇選項 2 (低分組有 24%)，這些學生可能不理解題意，將數字由小至大依序排列，排出 0359。 4. 有 14% 的學生選擇選項 3 (低分組有 24%)，這些學生可能無法比較四位數的大小；也可能誤解題意，排出最大的四位數字 9530。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-1 一千以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「百」。位值單位換算。	N-3-1 一萬以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「千」。位值單位換算。	N-4-1 一億以內的數：位值單位「萬」、「十萬」、「百萬」、「千萬」。建立應用大數時之計算習慣，如「30 萬 1200」與「21 萬 300」的加減法。

補救教學建議

以比較 4532 和 4527 兩數的大小為例，有兩種幫助學生解題的方法。

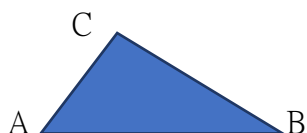
方法一：透過位值說明十位數字比較大的數比較大 4532 可以換成 4 個千 5 個百 3 個十和 2 個一，4527 可以換成 4 個千 5 個百 2 個十和 7 個一，4 個千和 4 個千一樣多，5 個百和 5 個百一樣多，3 個「十」比 2 個「十」多 1 個「十」，也就是多 10，10 一定比 7 大，所以當 32 的十位數字比 27 的十位數字大時，32 就比 27 大。

方法二：先唸出的數字比較小，後唸出的數字比較大 三年級學生已熟悉數詞序列 1、2、...、10000，應知道愈後面唸到的數字愈大，教師可以透過先唸出的數字比較小，後唸出的數字比較大，說明 4532 和 4527 的千位數字和百位數字都一樣大，4532 的十位數字比 4527 的十位數字大，十位數字比較大的數比較後唸到，所以 32 比 27 大。

題號	15		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-3-1 (同 N-3-13) 角與角度：以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 備註：同 N-3-13 備註。		
試題內容	15. 比一比，下面哪個角最大？  ① 角 1 ② 角 2 ③ 角 3 ④ 角 4		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.53	0.24	0.80
2	0.06	0.12	0.01
3	0.31	0.46	0.14
4	0.10	0.16	0.04
未作答	0.01		
通過率	0.53	鑑別度	0.56
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.56，正確答案為選項 1，通過率為 53%，顯示超過五成的學生已具備角度直接比較的能力。 2.有 6%的學生選擇選項 2(低分組有 12%)，這些學生可能尚未具備角度直接比較的能力，誤解角所夾的兩邊長度越長，角就越大。 3.有 31%的學生選擇選項 3(低分組有 46%)，這些學生可能尚未具備角度直接比較的能力，誤解角所標示的符號越大，角就越大。 4.有 10%的學生選擇選項 4(低分組有 16%)，這些學生可能尚未具備角度直接比較的能力，誤解角的圖示越大，角就越大。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-2-1 物體之幾何特徵：以操作活動為主。進行辨認與描述之活動。藉由實際物體認識簡單幾何形體(包含平面圖形與立體形體)，並連結幾何概念(如長、短、大、小等)。	S-3-1 (同 N-3-13) 角與角度：以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。	S-4-1 (同 N-4-10) 角度：「度」。量角器的操作。實測、估測與計算。以角的合成認識 180 度到 360 度之間的角度。「平角」、「周角」。指定角度作圖。

補救教學建議

1. 本學習內容 S-3-1 為 S-2-1 之後續學習概念，故學生應該已經認識周遭物體上的角。本學習內容首次引入角度的教材，學生可以透過直接比較及間接比較，來判斷兩個角張開程度的大小。。
2. 三年級還沒有引入角度的常用單位「度」，不能說直角的角度是 90 度。
3. 三年級討論的對象是「張開角」，張開角指的是共端點兩重合線段張開的結果，共同的端點稱為頂點，張開後的兩線段稱為邊，因為張開後的形狀像圖形的角，故稱之為張開角。
張開角的角度指的是張開的程度，選定單位量後，可以把角張開的程度數量化，討論張開角的角度不宜超過 180 度(不含平角)。
4. 三年級角的直接和間接比較，比較的對象是「張開角」而不是「圖形角」。因此，教師評量時不能比較圖形角的大小，例如不能評量「下圖三角形中，角 A 和角 B，哪個角比較大？」的問題。四年級引入角度的常用單位「度」之後，才能評量圖形角的大小。



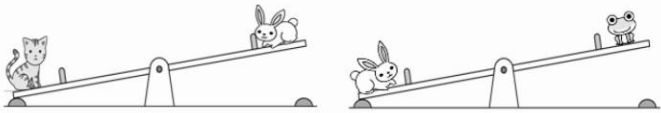
5. 學生常透過邊的長短、扇形面積的大小、弧的長短等特徵，來比較兩個角張開程度的大小，例如學生常誤認下圖右邊那個角的角度比較大，可能的理由是學生只看到張開角張開後的結果，並沒有看到張開的過程，無法理解張開程度的意義，建議教師透過實作，讓學生經驗張開角張開程度的意義。



6. 部份教師習慣透過一把扇子的開與合來跟學生溝通張開角張開程度的意義，認為這種教法很有效率，因為教完之後，學生很快就能解決張開角角度大小的比較問題。當學生說甲角比乙角大，可能是透過甲角的面積比乙角大，或甲角的弧比乙角的弧長的現象，陰錯陽差的認為甲角張開的程度比乙角大。
7. 建議教師透過下面的操作，幫助學生理解角的大小指的是張開程度的大小。
先拿出兩把扇子，其中一把扇子的邊比較長，稱為甲扇，另一把扇子的邊比較短，稱為乙扇，先張開甲扇，問學生扇子張開了多大，學生可能描述扇子的面積、弧長等與張開程度無關的答案；此時可將乙扇張開到和甲扇一樣大，再問學生這兩把扇子張開的程度是否一樣，此時兩把扇子的面積、邊長及弧長都不相同，只有張開的程度相同，強迫學生排除邊的長短、扇形面積的大小、弧的長短等因素，將注意力放在張開程度上。
接下來，再將乙扇張開一些，問哪一把扇子張開的程度比較大，此時甲扇的邊長、弧長都比乙扇長，甲扇的面積也比乙扇大，只有張開的程度比較小，可以檢查學生是否掌握張開程度的意義。

題號	16		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-3-4 除法：除法的意義與應用。基於 N-2-9 之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十十乘法範圍的除法，做為估商的基礎。 備註：建議先處理整除情境，再處理有餘數的情境。教學中應有乘、除法並陳之單元，讓學生能主動察覺乘法與除法問題的差異。		
試題內容	16. 老師將一堆糖果平分給 7 位小朋友， 每位小朋友分到 12 顆後，還剩下一些糖果。 甲說：最多只會剩下 6 顆糖果。 乙說：最多只會剩下 8 顆糖果。 丙說：最多只會剩下 11 顆糖果。 丁說：最多只會剩下 13 顆糖果。 請問誰的說法正確？ ① 甲 ② 乙 ③ 丙 ④ 丁		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.63	0.44	0.80
2	0.15	0.25	0.06
3	0.14	0.17	0.12
4	0.07	0.13	0.02
未作答	0.01		
通過率	0.63	鑑別度	0.36
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.36，正確答案為選項 1，通過率為 63%，顯示超過六成的學生已理解除法算式中餘數範圍的約定。 2. 有 15% 的學生選擇選項 2 (低分組有 25%)，這些學生可能不理解除法算式中餘數範圍的約定；也可能不理解題意。 3. 有 14% 的學生選擇選項 3 (低分組有 17%)，可能已理解除法算式中餘數範圍的約定，但誤將商 12 看成除數，得到剩下 11 顆的答案。 4. 有 7% 的學生選擇選項 4 (低分組有 13%)，這些學生可能不理解除法算式中餘數範圍的約定。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-9 解題：分裝與平分。以操作活動為主。除法前置經驗。理解分裝與平分之意義與方法。引導學生在解題過程，發現問題和乘法模式的關連。	N-3-4 除法：除法的意義與應用。基於 N-2-9 之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十乘十乘法範圍的除法，做為估商的基礎。	N-3-6 解題：乘除應用問題。乘數、被乘數、除數、被除數未知之應用解題。連結乘與除的關係（R-3-1）。
補救教學建議			
1.教師應幫助學生理解除法算式的意義： (1)知道「被除數」、「除數」、「商」、「餘數」的名稱及意義。 (2)理解商及餘數的意義，知道餘數可以為 0，而且一定要小於除數。 (3)理解商及餘數的意義，知道被除數減餘數後就能整除。 2.除法問題有兩種記錄的格式： 第一種：$a \div b = q \dots r$，q 是整數，$0 \leq r < b$。 第二種：$a \div b = a/b$，$b \neq 0$。 五年級引入「整數除以整數、商是分數」問題之前，只處理第一種記錄格式。 3.「$a \div b = q \dots r$，q 是整數，$0 \leq r < b$」中，餘數的範圍是「$0 \leq r < b$」，也就是說，剩下 0 個中的 0 也是餘數。 例如「將 12(或 13、14)個蘋果平分給 3 個人」，學生必須解題成功，才知道餘數是 0(或 1、2)。 建議教師命題時，不論餘數是否為 0，都要同時詢問商數及餘數。例如： 將 14 個蘋果平分給 3 個人，每人最多分到幾個蘋果，還剩下多少個蘋果？ 將 12 個蘋果平分給 3 個人，每人最多分到幾個蘋果，還剩下多少個蘋果？			

題號	17		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-16 重量：「公斤」、「公克」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 備註：基於 N-3-1 的限制，單位換算公斤數限個位數。可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。		
試題內容	17. 貓咪^{ニャ}、青蛙^{カエル}、兔子^{ウサギ}的重量關係如下圖。  青蛙的重量是 1 公斤 80 公克， 貓咪的重量是 2 公斤 50 公克。 甲說：兔子可能重 900 公克 乙說：兔子可能重 2400 公克 請問哪些人的說法正確？ ① 只有甲正確 ② 只有乙正確 ③ 甲和乙都正確 ④ 甲和乙都不正確		
選答案 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.25	0.38	0.13
2	0.20	0.26	0.14
3	0.06	0.13	0.02
4*	0.48	0.22	0.72
未作答	0.01		
通過率	0.48	鑑別度	0.50
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.50，正確答案為選項 4，通過率為 48%，顯示近五成的學生已具備重量單位換算跟比大小的能力。 2. 有 25% 的學生選擇選項 1 (低分組有 38%)，這些學生可能尚未具備利用天平比較重量大小的能力，也可能不理解題意。 3. 有 20% 的學生選擇選項 2 (低分組有 26%)，這些學生可能知道利用天平比較重量大小的意義，但在單位換算時發生錯誤；也可能尚未具備重量單位換算跟比大小的能力；也可能不理解題意。 4. 有 6% 的學生選擇選項 3 (低分組有 13%)，這些學生可能尚未具備重量單位換算跟利用天平比較重量大小的能力；也可能不理解題意。			

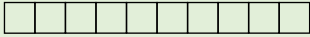
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-12 容量、重量、面積：以操作活動為主。此階段量的教學應包含初步認識、直接比較、間接比較（含個別單）。不同的量應分不同的單元學習。	N-3-16 重量：「公斤」、「公克」。實測、量感、估測與計算。單位換算。	N-5-13 重量：「公噸」。生活實例之應用。含與「公斤」的換算與計算。使用概數。
補救教學建議			
1. 本學習內容 N-3-16 為 N-2-12 之後續學習概念，故學生應該已經認識重量，並能進行重量的直接、間接與個別單位比較。本學習內容開始引入重量的常用單位「公克」及「公斤」，幫助學生作相關的實測、估測與計算；也幫助學生作公斤、公克單位間的整數倍化聚。 2. 建議教師先引入「公克」單位，待學生能進行公克單位的實測、估測與加減計算後，再引入「公斤」單位。 3. 因為「公斤、公克」單位間是 1000 倍的關係，建議教師先處理大單位化為小單位的問題，再處理小單位聚成大單位的問題，但兩單位間的化聚限制在整數倍，例如「5 公斤＝()公克」，「3000 公克＝()公斤」。 4. 二年級只進行重量的直接、間接及個別單位比較。 三年級引入重量單位「公斤」及「公克」。 兩單位間的化聚關係，只處理整數倍的化聚；而複名數的加減計算，只處理不進退位的問題。 5. 教師應幫助學生進行複名數的命名活動，當學生認識公斤及公克單位後，例如認識 3 公斤和 50 公克的意義後，就可以透過下列問話「我們已經認識 3 公斤，也認識 50 公克，我們如何稱呼 3 公斤和 50 公克合起來的重量？名稱中要看到 3 公斤和 50 公克，還要看到 3 公斤和 50 公克合起來」，幫助學生將 3 公斤和 50 公克合起來的重量稱為 3 公斤 50 公克。再透過下列問話「3 公斤和 50 公克中，是否看到 3 公斤和 50 公克，是否看到 3 公斤和 50 公克合起來」，幫助學生理解 3 公斤 50 公克指的是 3 公斤和 50 公克合起來的重量。			

題號	18		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-3-2 加減直式計算：含加、減法多次進、退位。 備註：須處理數字中有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。		
試題內容	18. 算算看看，□ 內要填入什麼數字？ $ \begin{array}{r} 4 \ 3 \ 6 \ 2 \\ - \ 3 \ \square \ 7 \ 4 \\ \hline 6 \ 8 \ 8 \end{array} $ ① 3 ② 6 ③ 7 ④ 9		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.17	0.03
2*	0.56	0.29	0.80
3	0.25	0.33	0.15
4	0.09	0.19	0.02
未作答	0.01		
通過率	0.56	鑑別度	0.50
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.50，正確答案為選項 2，通過率為 56%，顯示近六成的學生已具備減法直式計算的能力。 2. 有 9% 的學生選擇選項 1(低分組有 17%)，這些學生可能不具備減法直式計算的能力。 3. 有 25% 的學生選擇選項 3(低分組有 33%)，這些學生可能已具備減法直式計算的能力，但是沒有注意到被減數的百位已拿一個百換成 10 個十，直接解 $13 - \square = 6$，得到□內填入 7 的答案。 4. 有 9% 的學生選擇選項 4(低分組有 19%)，這些學生可能不具備減法直式計算的能力。將□上、下兩數字相加，$6 + 3 = 9$，得到□內填入 7 的答案。			

教材地位分析									
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識						
學習內容	N-2-2 加減算式與直式計算：用位值理解多位數加減計算的原理與方法。初期可操作、橫式、直式等方法並陳，二年級最後歸結於直式計算，做為後續更大位數計算之基礎。直式計算的基礎為位值概念與基本加減法，教師須說明直式計算的合理性。	N-3-2 加減直式計算：含加、減法多次進、退位。	N-4-1 一億以內的數：位值單位「萬」、「十萬」、「百萬」、「千萬」。建立應用大數時之計算習慣，如「30 萬 1200」與「21 萬 300」的加減法。						
	N-2-3 解題：加減應用問題。加數、被加數、減數、被減數未知之應用解題。連結加與減的關係（R-2-4）。								
補救教學建議									
1. 以退位減法計算問題「1235－678」為例，進行個位計算時，因為5減8不夠減，拿1個十換10個一之後，有兩種解題的方法，第一種是利用基本加減事實來解題，直接利用15－8＝7，算出和的個位數字是7，第二種是利用拆十來解題，透過10－8＝2，2＋5＝7，算出和的個位數字是7。三年級學生應該已熟記基本加減事實，建議教師幫助學生利用第一種方法來解題。 2. 有兩種使用定位板的時機，第一種是溝通數字的位值及位名，第二種是直式計算溝通不同單位的個數，引入定位板時，教師應說明下面三個限制。 (1)記錄「幾」個十的時候，只能將「幾」記錄在十位，記錄「幾」個一的時候，只能將「幾」記錄在個位。 以「將3個十，5個一記在定位板上」為例，定位板記錄不同單位的個數，因此必須將3個十的3記在十位，5個一的5記在個位，才能夠溝通不同單位計數的意義。 (2)一個位置只能記錄1個數碼。									
<table><tr><th>十位</th><th>個位</th></tr><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td>3</td><td>15</td></tr></table>				十位	個位			3	15
十位	個位								
3	15								
以「將3個十，15個一記在定位板上」為例，將3個十的3記在十位，將15個一的15記在個位，如上圖。									

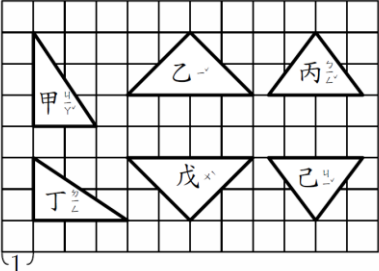
當定位板存在時，可以清楚的溝通有 3 個十，15 個一，但是脫離定位板記成 315 後，會和三百一十五混淆。因此數學上限制一個位置只能記錄 1 個數碼，必須將 3 個十，15 個一改記成 4 個十，5 個一。

(3)某位值的個數是 0 時，必須記 0。

十位	個位
	
5	0

以「將 5 個十記在定位板上」為例，將 5 個十的 5 記在十位，如上圖。

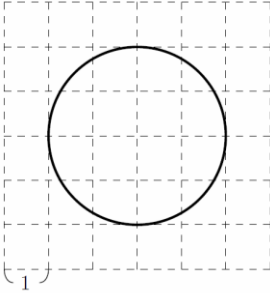
當定位板存在時，可以清楚的溝通有 5 個十，但是脫離定位板記成 5 後，會和 5 個一混淆，因此數學上限制當個位數字是 0 時，必須在個位上記 0。

題號	19		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-3-4 幾何形體之操作：以操作活動為主。平面圖形的分割與重組。初步體驗展開圖如何黏合成立體形體。知道不同之展開圖可能黏合成同一形狀之立體形體。 備註：以操作體驗平面圖形關係與空間感為目標，啟發學生探討與發現之興趣，但不做任何數學知識的歸納。展開圖活動只是初步體驗，勿做過多複雜推理活動。本條目不做操作以外的紙筆評量。		
試題內容	19. 小明想要製作一個長邊 3 公分，寬邊 2 公分的長方形圖案，他手邊有下面六張三角形圖卡。  (單位：公分) 哪兩張圖卡可以製作出這個長方形圖案？ ① 甲和丁 ② 乙和丙 ③ 乙和戊 ④ 丙和己		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.67	0.43	0.87
2	0.07	0.14	0.02
3	0.16	0.28	0.06
4	0.09	0.14	0.05
未作答	0.01		
通過率	0.67	鑑別度	0.44

試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.44，正確答案為選項 1，通過率為 67%，顯示近七成的學生已具備平面圖形分割重組的能力。 2.有 7%的學生選擇選項 2(低分組有 14%)，這些學生可能尚未具備平面圖形分割重組的能力，僅挑選兩個擺放方式一致的圖卡作為答案。 3.有 16%的學生選擇選項 3(低分組有 28%)，這些學生可能認識平面圖形如何分割重組，但不理解重組後的圖卡長寬應該要如何判讀；也可能不理解題意。 4.有 9%的學生選擇選項 4(低分組有 14%)，這些學生可能認識平面圖形如何分割重組，但誤解重組後的圖卡長寬是分割後三角形的底和高；也可能不理解題意。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-2-1 物體之幾何特徵：以操作活動為主。進行辨認與描述之活動。藉由實際物體認識簡單幾何形體（包含平面圖形與立體形體），並連結幾何概念（如長、短、大、小等）。 S-2-2 簡單幾何形體：以操作活動為主。包含平面圖形與立體形體。辨認與描述平面圖形與立體形體的幾何特徵並做分類。	S-3-4 幾何形體之操作：以操作活動為主。平面圖形的分割與重組。初步體驗展開圖如何黏合成立體形體。知道不同之展開圖可能黏合成同一形狀之立體形體。	S-4-6 平面圖形的全等：以具體操作為主。形狀大小一樣的兩圖形全等。能用平移、旋轉、翻轉做全等疊合。全等圖形之對應角相等、對應邊相等。
補救教學建議			
1. 本學習內容 S-3-4 為 S-1-2 之後續學習概念，故學生應該已經能依給定圖示，將簡單圖形作平面鋪設。本學習內容幫助學生透過操作，將簡單平面圖形切割重組成另一已知簡單平面圖形。 2. 將長方形或正方形切割成兩個全等的三角形後，教師宜先說明這兩個切割出來的三角形，除了可以平移及旋轉外，也可以翻轉。教師可以要求學生儘量將其組合成不同的圖形，但是，不可以要求學生窮盡所有的可能。 3. 將簡單平面圖形切割重組成另一已知簡單圖形後，教師可以詢問拼出來的圖形和原圖形的面積是否一樣大，檢查學生是否具備面積的保留概念。 4. 將長方形(或正方形)切割成兩個全等的直角三角形後，可以由這兩個全等的直角三角形拼回原長方形(或正方形)，幫助學生認識其中一個直角三角形的面積是長方形(或正方形)面積的一半。			

題號	20		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-7 解題：兩步驟應用問題（加減與除、連乘）。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。 備註：乘除混合、連除在四年級（N-4-3）。		
試題內容	20. 用一條長 304 公分的繩子繞正方形周界一圈，繩子還多出 28 公分，請問這個正方形的邊長是幾公分？ ① 48 公分 ② 69 公分 ③ 76 公分 ④ 83 公分		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.19	0.05
2*	0.37	0.17	0.65
3	0.35	0.37	0.24
4	0.15	0.25	0.05
未作答	0.02		
通過率	0.37	鑑別度	0.48
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.48，正確答案為選項 2，通過率為 37%，顯示近四成的學生已具備在具體情境中，解決先減後除兩步驟問題的能力。 2. 有 11% 的學生選擇選項 1（低分組有 19%），這些學生可能不具備在具體情境中，解決先減後除兩步驟問題的能力；也可能誤解題意，將先減後除的兩步驟問題，解讀為先除後減的兩步驟問題。如下所示：$304 \div 4 = 76$，$76 - 28 = 48$，算出邊長是 48 公分。 3. 有 35% 的學生選擇選項 3（低分組有 37%），這些學生可能不具備在具體情境中，解決先減後除兩步驟問題的能力；也可能誤解題意，只算出正方形的邊長是 76 公分。 4. 有 15% 的學生選擇選項 4（低分組有 25%），這些學生可能不具備在具體情境中，解決先減後除兩步驟問題的能力；也可能誤解題意，將先減後除的兩步驟問題，解讀為先加後除的兩步驟問題。如下所示：$304 + 28 = 332$，$332 \div 4 = 83$，算出邊長是 83 公分。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-8 解題：兩步驟應用問題(加、減、乘)。加減混合、加與乘、減與乘之應用解題。不含併式。不含連乘。	N-3-7 解題：兩步驟應用問題(加減與除、連乘)。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。	N-4-3 解題：兩步驟應用問題(乘除、連除)。乘與除、連除之應用解題。
補救教學建議			
1.先除後加(減)的問題，一定是兩步驟的問題；先加(減)後除的問題，可以是兩步驟的問題，也可以是三步驟的問題。建議教師先引入先除後加(減)的兩步驟問題，再引入先加(減)後除的兩步驟問題。 2.以先加後除的兩步驟問題「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人的錢合起來可以買幾枝？」為例，學生可以用兩個算式「$15+25=40$，$40\div5=8$，答：可以買 8 枝」記錄解題活動；也可以用三個算式「$15\div5=3$，$25\div5=5$，$3+5=8$，答：可以買 8 枝」記錄解題活動。剛開始，教師應先接受三步驟的算法，接下來，應透過分段布題或分段解題，限制學生改用兩個算式記錄解題活動，為四年級引入兩步驟問題的併式紀錄及列式鋪路。 3.以「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」為例，教師可透過分段布題的方式幫助學生用兩個算式記錄解題活動。 步驟一：先布問題「甲有 15 元，乙有 25 元，兩人合起來有多少元？」，用算式把做法記下來。幫助學生用算式「$15+25=40$」把做法記下來。 步驟二：再布問題「兩人合起來有 40 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」，用算式把做法記下來。幫助學生用算式「$40\div5=8$」記錄解題活動。 步驟三：最後，再布原問題「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」，用兩個算式把先算什麼，再算什麼的算法記下來。幫助學生用兩個算式「$15+25=40$，$40\div5=8$」把做法記下來。			

題號	21		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。 備註：知道圓心是認識圓的重要定義元素，但是圓心並不屬於圓。		
試題內容	21. 下圖是老師畫出的圓，請問老師畫圓時針尖和筆尖的距離是多少公分？  (單位：公分) ① 1 公分 ② 2 公分 ③ 4 公分 ④ 8 公分		
選答率 選項	答題反應比率 (*表正確答案)		
	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.21	0.08
2*	0.59	0.33	0.83
3	0.17	0.29	0.07
4	0.08	0.16	0.01
未作答	0.01		
通過率	0.59	鑑別度	0.51
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.51，正確答案為選項 2，通過率為 59%，顯示近六成的學生已具備判讀「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」的能力。 2.有 16%的學生選擇選項 1(低分組有 21%)，這些學生可能尚未具備判讀「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」及使用圓規的能力；也可能不理解題意。 3.有 17%的學生選擇選項 3(低分組有 29%)，這些學生可能尚未具備使用圓規的能力，誤解直徑和半徑的意義。 4.有 8%的學生選擇選項 4(低分組有 16%)，這些學生可能尚未具備使用圓規的能力，用交於圓心的 4 條半徑總長作為答案；也可能不理解題意。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-2-2 簡單幾何形體：以操作活動為主。包含平面圖形與立體形體。辨認與描述平面圖形與立體形體的幾何特徵並做分類。	S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。	S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合(幾分之幾圓)。能畫出指定扇形。
補救教學建議			
1. 本學習內容 S-3-3 為 S-2-2 之後續學習概念，故學生應該已經能辨認簡單平面圖形(圓、三角形、正方形、長方形等)。 本學習內容首次引入周界是曲線的平面圖形，幫助學生認識圓的圓心、圓周、半徑與直徑，以及半徑與直徑長度的關係，並幫助學生使用圓規畫圓。 2. 以下圖為例，有下列幾種描述半徑的方法： (1)稱 OA 線段為半徑，此時的半徑是一條線段。 (2)稱 OP 兩點的距離為半徑，此時的半徑是兩點的距離。 (3)稱半徑=5 公分，此時的 5 公分可能是 OA 線段的長度，也可能是 OP 兩點的距離。 (4)半徑是集合，學生必須發現圓心 O 和圓上任意點連成的線段都一樣或發現圓心 O 和圓上任意點的距離都相等，才能掌握所有半徑都等長意義。 這四種描述的方法中，第一種是學生最容易接受的方法，但是用圓規畫圓時，學生看不到線段 OA，只能看到針尖和筆尖兩點的距離，建議在圓規兩腳之間綁上繩子或橡皮筋，讓學生在畫圓時，能看到針尖和筆尖的距離，也能看到連接針尖和筆尖的線段。 3. 能使用圓規畫圓包含下列能力： (1)能使用圓規畫圓。 (2)知道圓規筆尖與針尖的距離就是畫出圓的半徑。 (3)能使用圓規筆尖及針尖的距離為單位，測量線段的長度。 4. 圓規只能畫出與圓心 O 的距離是半徑長的點 P，無法畫出長度是半徑的線段 OP，因此國小學生利用圓規畫線段時，常無法掌握筆尖及針尖的距離與半徑長度的意義。 下面提出兩種幫助學生澄清筆尖及針尖的距離與半徑長度意義的方法： (1)在圓規筆尖及針尖之間綁上繩子或橡皮筋，幫助學生在畫圓時，同時看到筆尖及針尖的距離，以及連接筆尖及針尖兩點長度的線段。			

(2)先畫出一條直線段，與學生溝通如何在直線段上畫出長 a 公分的線段，學生先張開圓規的筆尖及針尖，在直尺上量出筆尖及針尖距離是 a 公分，再以直線段的端點 A 為圓心，畫弧和直線段交於 B 點，最後再要求學生測量 AB 的長度，幫助學生察覺筆尖及針尖的距離為 a 公分時，連接筆尖及針尖的線段長也是 a 公分。

5. 部份三年級學生尚未掌握所有平面圖形所成集合的意義，因此，本學習內容只討論給定圓的直徑長是半徑長的 2 倍，不討論所有圓的直徑長都是半徑長的 2 倍。

6. 有兩種溝通半徑與直徑關係的方法：

方法一：分別量出半徑與直徑的長度，例如半徑長 5 公分，直徑長 10 公分，再利用除法算式 $10 \div 5 = 2$ ，說明直徑長是半徑長的 2 倍。

方法二：在圓上畫出直徑，幫助學生發現直徑是由兩條半徑組成的，所以 2 條半徑接起來的長度和直徑一樣長。

10 是 5 的 2 倍是基準量和比較量關係的描述，指的是以 5 為基準量 1 時，比較量 10 會是 2，三年級學生較無法掌握 10 是 5 的 2 倍的意義。建議教師利用方法二說明半徑與直徑的關係。

題號	22		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過 2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於 1」的意義。 備註：本年級分數教學只用「分數」一詞，不出現「真分數」與「假分數」的名詞，也不含帶分數的教學（N-4-5）。應區分真分數與假分數之教學（例如分開於上、下學期）。初步認識分數的應用時，情境應以連續量為主。若要處理離散量情境，必須與連續模型表徵強烈結合，而且其計數單位須為以整體數量為分母的單位分數（如 1 盒餅乾有 6 塊，則只處理分母 6 之分數，不處理 2 或 3 的情況）。		
試題內容	22. 一袋巧克力有 12 顆，將 1 袋巧克力平均分成 6 份，其中 5 份是多或少袋巧克力？ ① $\frac{5}{12}$ 袋 ② $\frac{5}{6}$ 袋 ③ $\frac{6}{5}$ 袋 ④ $\frac{12}{5}$ 袋		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.45	0.51	0.34
2*	0.39	0.22	0.61
3	0.08	0.13	0.04
4	0.07	0.12	0.02
未作答	0.01		
通過率	0.39	鑑別度	0.39
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.39，正確答案為選項 2，通過率為 39%，顯示近四成的學生已具備在離散量情境真分數命名的能力。 2. 有 45% 的學生選擇選項 1（低分組有 51%），這些學生可能不具備在離散量情境真分數命名的能力；也可能不理解題意，誤將一袋的 12 顆當作平分成 12 份。 3. 有 8% 的學生選擇選項 3（低分組有 13%），這些學生可能不具備在離散量情境真分數命名的能力，將分母與分子寫顛倒了。 4. 有 7% 的學生選擇選項 4（低分組有 12%），這些學生不具備在離散量情境真分數命名的能力。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-10 單位分數的認識：從等分配的活動（如摺紙）認識單部分為全部的「幾分之一」。知道日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的溝通意義。在已等分割之格圖中，能說明一格為全部的「幾分之一」。	N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於1」的意義。	N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。
補救教學建議			
1.只要題目中有兩個或兩個以上的單位，教師教學或評量時應強調處理或運算的是甚麼單位，養成學生注意單位的習慣。 2.分數問題主要包含連續量情境和離散量情境兩部份： 連續量情境：被分割的單位量是連續完整的物件，例如繩子、披薩、果汁、蛋糕等。 離散量情境：被分割驗的的單位量是離散的個物，例如一盒蘋果(6 個)、一袋水餃(10 個)等。 連續量情境真分數命名活動：將 1 條繩子平分剪成 5 段，其中的 2 段是 $\frac{2}{5}$ 條。 離散量情境真分數命名活動：一袋糖果有 10 顆，將 1 袋糖果平分成 10 份，其中的 3 份是 $\frac{3}{10}$ 袋。 在上面的情境中，連續量情境中只有「條」和「段」2 個單位，而離散量情境中有「顆」、「份」和「袋」3 個單位，建議教師先處理連續量情境分數問題，再處理離散量情境分數問題。 3.分數的做數，也包含連續量和離散量兩部份： 連續量情境：給定一條繩子或一塊披薩，要求畫出 $\frac{3}{4}$ 條繩子或 $\frac{3}{4}$ 塊披薩。 離散量情境：一盒蘋果有 4 顆，要求拿出 $\frac{3}{4}$ 盒蘋果。 4.以一盒蘋果有 8 顆為例： 將 1 盒蘋果平分成 8 份，其中的 1 份是 1 顆，其中的 1 份是 $\frac{1}{8}$ 盒。 1 份是 1 顆，我們稱單位分數 $\frac{1}{8}$ 盒的內容物 1 顆為單一個物。			

將 1 盒蘋果平分成 4 份，其中的 1 份是 2 顆，其中的 1 份是 $\frac{1}{4}$ 盒。

1 份是 2 顆，我們稱單位分數 $\frac{1}{4}$ 盒的內容物 2 顆為多個個物。

5. 三年級學生可能無法掌握三個單位計數的意義，單位分數內容物為單一個物時，1 份剛好是 1 顆，學生混淆 1 顆和 1 份兩個單位也能成功的解題。但單位分數內容物為多個個物時，學生常誤認為 1 份為 1 顆。
- 本基本學習內容首次引離散量情境分數問題，故僅處理單位分數內容物單一個物的問題。

題號	23		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過 2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於 1」的意義。 備註：本年級分數教學只用「分數」一詞，不出現「真分數」與「假分數」的名詞，也不含帶分數的教學（N-4-5）。應區分真分數與假分數之教學（例如分開於上、下學期）。初步認識分數的應用時，情境應以連續量為主。若要處理離散量情境，必須與連續模型表徵強烈結合，而且其計數單位須為以整體數量為分母的單位分數（如 1 盒餅乾有 6 塊，則只處理分母 6 之分數，不處理 2 或 3 的情況）。		
試題內容	23. 甲綵帶比乙綵帶長，乙綵帶和丙綵帶一樣長。 大毛說：$\frac{1}{4}$ 條甲綵帶比 $\frac{1}{5}$ 條乙綵帶長 小毛說：$\frac{1}{5}$ 條乙綵帶比 $\frac{1}{4}$ 條丙綵帶長 請問誰的說法一定正確？ ① 只有大毛正確 ② 只有小毛正確 ③ 大毛和小毛都正確 ④ 大毛和小毛都不正確		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1*	0.36	0.16	0.63
2	0.29	0.42	0.13
3	0.12	0.20	0.06
4	0.22	0.19	0.18
未作答	0.02		
通過率	0.36	鑑別度	0.47
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.47，正確答案為選項 1，通過率為 36%，顯示近四成的學生已具備單位分數比較的能力。 2. 有 29% 的學生選擇選項 2 (低分組有 42%)，這些學生可能尚未具備單位分數比較的能力，誤解分母越大的單位分數，值越大。 3. 有 12% 的學生選擇選項 3 (低分組有 20%)，這些學生尚未具備單位分數比較的能力；也可能不理解題意。 4. 有 22% 的學生選擇選項 4 (低分組有 19%)，這些學生可能尚未具備單位分數比較的能力，誤解原始一條的長度如果不同就不能比較。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-10 單位分數的認識：從等分配的活動（如摺紙）認識單分為全部的「幾分之一」。知道日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的溝通意義。在已等分割之格圖中，能說明一格為全部的「幾分之一」。	N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於1」的意義。	N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。
補救教學建議			
1. 本學習內容 N-3-9 為 N-2-10 之後續學習概念，故學生應該已經理解單位分數的意義。本學習內容幫助學生在具體情境中理解真分數的意義，並幫助學生比較兩個同分母分數的大小以及解決同分母分數的加減問題。 2. 分數問題中被分割的對象必須密度均勻，例如一張色紙、一條繩子、一杯水等的密度都均勻。教師不宜分割蘋果或披薩等密度不均勻的物件，例如蘋果的某部份比較鮮紅，或披薩上面有蝦仁等，避免學生將注意力轉移至誰分到比較鮮紅的蘋果，或誰分到比較多的蝦仁。 3. 基本學習內容限制分母不大於 12。 4. 以「將 1 塊蛋糕平分切成 4 份，其中的 1 份是多少塊蛋糕？」為例，有兩種命名 1 份蛋糕的方法： 第一種：透過 1 份蛋糕和 4 份蛋糕的關係來命名，將 4 份蛋糕看成全體， 1 份蛋糕是 4 份裡面的 1 份，稱 1 份為$\frac{1}{4}$塊蛋糕。 第二種：透過 1 份蛋糕和 1 塊蛋糕的關係來命名，1 份蛋糕是從 1 塊蛋糕分出來的，而且是平分成 4 份中的 1 份，稱 1 份為$\frac{1}{4}$塊蛋糕。 第一種命名的方法是比率的關係，將 4 份看成基準量 1，其中的 1 份是$\frac{1}{4}$，不是$\frac{1}{4}$塊。五年級才引入比率問題，教師應透過第二種方法來命名。 5. 分數教學時應強調分割的對象是什麼，相同的分割對象才能比較分割後兩分數的大小。以「有兩個大小不一樣的披薩，一個是海鮮口味，另一個是燒肉口味。哥哥拿了是$\frac{1}{3}$個海鮮口味的披薩，弟弟拿了是$\frac{1}{4}$個燒肉口味的披薩。誰拿的披薩比較大？」為例，因為兩個披薩不一樣大，所以無法比較$\frac{1}{3}$個海鮮口味的披薩和是$\frac{1}{4}$個燒肉口味的披薩誰比較大。			

6. 進行單位分數比大小時，宜從量的情境到數的情境。教師在描述時，應強調被分割的物件要相同。以比較 $\frac{1}{4}$ 塊和 $\frac{1}{3}$ 塊披薩大小的情境為例，建議教師依下列步驟幫助學生解題。

步驟一：拿出 2 塊一模一樣的披薩，教師將其中 1 塊平分成 3 片，另一塊平分成 4 份。

步驟二：透過直接比較，先幫助學生認識 1 片披薩比 1 份披薩大，再說明平分的份數比較少時，分出來的披薩比較大。

步驟三：1 片披薩比 1 份披薩大，也就是 $\frac{1}{3}$ 塊披薩比 $\frac{1}{4}$ 塊披薩大。

步驟四： $\frac{1}{3}$ 塊披薩比 $\frac{1}{4}$ 塊披薩大，也可以說 $\frac{1}{3}$ 比 $\frac{1}{4}$ 大。

題號	24		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 備註：基於 N-3-1 的限制，單位換算公升數限個位數。可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。		
試題內容	24. 甲、乙和丙三個大人調配飲料。 甲：280 毫升的牛奶和 1 公升 20 毫升的紅茶調配出奶茶。 乙：1255 毫升的綠茶和 15 毫升的檸檬汁調配出檸檬綠茶。 丙：3 罐 380 毫升的果汁加入 100 毫升的氣泡水調配出蘋果汽水。 請問哪些大人調配的飲料裝入容量 1500 毫升的空水瓶會滿出來？ ① 只有甲 ② 只有乙 ③ 只有丙 ④ 都不會滿出來		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.15	0.03
2	0.10	0.21	0.02
3	0.17	0.27	0.08
4*	0.62	0.33	0.86
未作答	0.03		
通過率	0.62	鑑別度	0.53
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.53，正確答案為選項 4，通過率為 62%，顯示超過六成的學生已具備容量情境複名數加減和比較多少的能力。 2. 有 8% 的學生選擇選項 1(低分組有 15%)，這些學生可能不具備容量情境複名數加減和比較多少的能力；也可能計算時發生錯誤。 3. 有 10% 的學生選擇選項 2(低分組有 21%)，這些學生可能不具備容量情境複名數加減和比較多少的能力；也可能計算時發生錯誤。 4. 有 17% 的學生選擇選項 3(低分組有 27%)，這些學生可能不具備容量情境複名數加減和比較多少的能力；也可能計算時發生錯誤。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-12 容量、重量、面積：以操作活動為主。此階段量的教學應包含初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。不同的量應分不同的單元學習。	N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。	N-5-15 解題：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。備註：教學中須包含如何以容積的想法求不規則物體的體積。
補救教學建議			
- 建議教師先引入「毫升」單位，待學生能進行毫升單位的實測、估測與加減計算後，再引入「公升」單位。 - 學生必須先學會描述容器中有多少液量，才能夠描述容器中最多裝了多少液體，因此學生先學習如何描述液量後，才能夠溝通容器的容量是多少。例如將容器中的水倒入量杯中，測量出水有 5 毫升，我們稱容器中水的液量是 5 毫升，將容器中裝滿水再倒入量杯中，測量出水有 8 毫升，我們稱容器的容量是 8 毫升。 - 因為「公升、毫公升」單位間是 1000 倍的關係，建議教師先處理大單位化為小單位的問題，再處理小單位聚成大單位的問題，但兩單位間的化聚限制在整數倍，例如「5 公升＝()毫公升」，「3000 毫公升＝()公升」。 - 飲料包裝盒上經常使用「500c.c.」描述瓶中有多少飲料，因此很多人都認為「c.c.」是容量的單位；這是不正確的想法，「c.c.」是英文「cubic centimeter (立方公分)」的簡記，而立方公分是體積的單位，因此「c.c.」是體積的單位，ml(毫公升)才是容量的單位。多數人混淆容量和體積的意義，因此誤認為「c.c.」是容量的單位。 - 進行相鄰二階單位的時間、長度、重量、容量等的複名數加減問題，直式算式只是把兩個相鄰的單位並置進行計算(如圖一)，所以「3 公升 54 毫公升」不宜在直式紀錄中補上「0」。如在直式紀錄中補上「0」，改記成「3 公升 054 毫公升」(如圖二)會將「3 公升 54 毫公升+5 公升 283 毫公升」複名數加減問題轉換成「3054 毫公升+5283 毫公升」(如圖三)毫公升單位的計算問題。如下所示：			

		毫
	公	公
	升	升
	l	ml
	3	54
+	5	283

圖一

		毫
	公	公
	升	升
	l	ml
	3	054
+	5	283

圖二

		毫
	公	公
	升	升
	l	ml
		3054
+		5283

圖三

當我們在報讀 3 公升 54 毫公升時，並不會讀成「3 公升 054 毫公升」(三公升零五十四毫公升)，所以不宜在直式紀錄中補上「0」。

6. 日常生活中我們不會將複名數 3 公升 54 毫公升稱為 3 公升 054 毫公升，但是將複名數 3 公升 54 毫公升改記成單名數時，會稱 3 公升 54 毫公升為 3054 毫公升。

以複名數加法「3 公升 54 毫公升 + 5 公升 283 毫公升 = () 公升 () 毫公升」為例，透過圖一中的直式算式，說明將 3 公升 54 毫公升改記成 3 公升 054 毫公升後，教學的重點不再是複名數的加法，而是單名數的加法。

圖一中的直式算式，將 3 公升和 5 公升看成同一個單位，54 毫公升和 283 毫公升看成一個單位，教學重點是複名數的加法。

圖二中的直式算式，將 3 公升 54 毫公升改記成 3 公升 054 毫公升，目的是將「3 公升 54 毫公升 + 5 公升 283 毫公升」的複名數加法問題，轉換成「3054 毫公升 + 5283 毫公升」的單名數加法問題。

題號	25		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	解題思考
學習內容	S-3-2 正方形和長方形：以邊與角的特徵來定義正方形和長方形。 備註：知道如何判斷斜擺的長方形或正方形依舊是長方形或正方形。		
試題內容	25. 甲說：用 4 根長 10 公分的竹籤，可以排出一個正方形。 乙說：用 4 根長 10 公分的竹籤，可以排出一個不是正方形的圖形。 丙說：用 2 根長 8 公分和 2 根長 10 公分的竹籤，可以排出一個長方形。 丁說：用 2 根長 8 公分和 2 根長 10 公分的竹籤，可以排出一個不是長方形的圖形。 請問哪些人的說法正確？ ① 只有甲和丙正確。 ② 只有乙和丁正確。 ③ 四個人的說法都正確。 ④ 四個人的說法都錯誤。		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.56	0.39	0.67
2	0.12	0.23	0.04
3*	0.19	0.17	0.24
4	0.09	0.16	0.04
未作答	0.04		
通過率	0.19	鑑別度	0.07
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.07，正確答案為選項 3，通過率為 19%，顯示近二成的學生已具備以邊及角的特徵來判斷正方形和長方形的能力。 2. 有 56% 的學生選擇選項 1 (低分組有 39%)，這些學生可能沒有用四根等長線段排成四邊形的操作經驗，也沒有用 2 根長 a 公分和 2 根長 b 公分線段 ($a \neq b$) 排成四邊形的操作經驗，誤以為四根等長的線段只能排成正方形，2 根長 a 公分和 2 根長 b 公分線段 ($a \neq b$) 只能排成長方形。 學生也可能熟悉長方形兩雙對邊等長的性質，認為 2 根長 a 公分和 2 根長 b 公分線段 ($a \neq b$) 只能排成長方形。 3. 有 12% 的學生選擇選項 2 (低分組有 23%)，這些學生可能知道四根等長線段可以排成正方形，也可以排成不是正方形的四邊形；也知道用 2 根長 a 公分和 2 根長 b 公分線段，可以排成長方形，也可以排成不是長方形的四邊形，但是誤解題意，只選擇不常見的排法。			

4.有 9%的學生選擇選項 4(低分組有 16%)，這些學生可能沒有用四根等長線段排成四邊形的操作經驗；也可能不理解題意。

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-2-4 平面圖形的邊長：以操作活動與直尺實測為主。認識特殊幾何圖形的邊長關係。含周長的計算活動。	S-3-2 正方形和長方形：以邊與角的特徵來定義正方形和長方形。	S-4-8 四邊形：以邊與角的特徵(含平行)認識特殊四邊形並能作圖。如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。

補救教學建議

1.教師常混淆「長方形的定義(如何辨識圖形為長方形)」與「長方形的性質(長方形有哪些特徵)」，誤認為一個四邊形要同時滿足「四個角都是直角，對邊等長、對邊互相平行，對角線互相平分且等長」這些條件，才能辨識這個四邊形是長方形。數學上利用最少的條件來辨識長方形，一個四邊形，只要四個角都是直角，就能確認該四邊形為長方形。

各版本都定義四個角都是直角的四邊形為長方形，因此只要一個四邊形的四個角都是直角，該四邊形就是長方形。

定義長方形之後，可以探討長方形還有哪些共同特徵，例如長方形對邊等長、長方形對邊互相平行等，都屬於長方形的性質。

2.各版本的課本都以邊和角的特徵來定義正方形與長方形。

長方形：四個角都是直角的四邊形稱為長方形。

正方形：四個角都是直角且四邊等長的四邊形稱為正方形。

在還沒有定義正方形與長方形之前，教學時討論的都是給定的正方形與長方形，定義正方形與長方形之後，教學時討論的是所有正方形與長方形共同的特徵。

3.學生可能會認為斜擺的長方形或正方形不是長方形或正方形，教師可協助學生利用直尺和三角板檢查斜擺的長方形或正方形依舊是長方形或正方形。

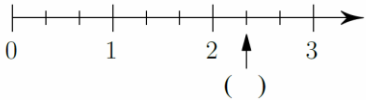
4.長方形哪一邊稱為長邊、哪一邊稱為寬邊常引起爭議。數學上並沒有給長邊或寬邊下定義，日常生活中，常見下面三種定義長邊和寬邊的方式。

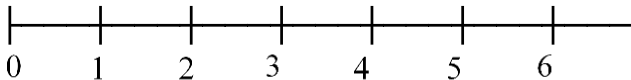
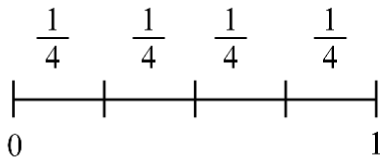
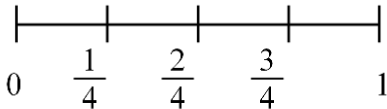
第一種：因為受到「長」這個關鍵字的影響，稱比較長的那一邊為長邊，比較短的那一邊稱為寬邊。

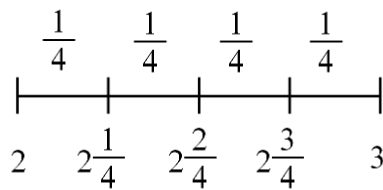
第二種：由長方形擺放的位置決定長邊和寬邊，將長方形擺正後，稱水平方向的那一邊為長邊，鉛直方向的那一邊為寬邊。這種定義的方式有一個缺點，如果兩個人擺放的方式不相同，他們所稱的長邊和寬邊就不相同。

第三種：因為只要確定長邊和寬邊就能決定一個長方形，因此長邊和寬邊是同等的重要，只要約定其中的一邊為長邊，那麼剩下的另一邊就是寬邊。

四年級試題選項分析與教學建議

題號	1		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-n-10 能將簡單分數標記在數線上。		
試題內容	1. 下圖是一條數線，請問 () 內要填入什麼數字？  () ① $3\frac{2}{3}$ ② $2\frac{1}{3}$ ③ $2\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.02	0.05	0.01
2*	0.85	0.73	0.95
3	0.11	0.18	0.04
4	0.02	0.03	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.85	鑑別度	0.21
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.21，正確答案為選項 2，通過率為 85%，顯示八成五的學生已具備將簡單分數標記在數線上的能力。 2. 有 2% 的學生選擇選項 1(低分組有 5%)，這些學生可能不具備將簡單分數標記在數線上的能力，他們先找到整數刻度 3，再由刻度 3 開始往左邊標記分數，故錯誤選擇 $3\frac{2}{3}$。 3. 有 11% 的學生選擇選項 3(低分組有 18%)，這些學生可能不具備將簡單分數標記在數線上的能力，因為數線上刻度 2 到刻度 3 之間有 4 個刻度，這些學生以分數 $\frac{1}{4}$ 為單位，故錯誤選擇 $2\frac{1}{4}$。 4. 有 2% 的學生選擇選項 4(低分組有 3%)，這些學生可能不具備將簡單分數標記在數線上的能力，未留意是標記數線上刻度 2 和刻度 3 之間的分數，而遺漏了整數部分，故錯誤選擇 $\frac{1}{3}$。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-09 由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。	4-n-10 能將簡單分數標記在數線上。	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。
補救教學建議			
1. 教師可以透過下列方法繪製分數數線，幫助學生認識分數數線： 步驟一：先復習整數數線的意義，幫助學生標示出整數數線 0、1、2、...。  步驟二：先建立 0 和 1 間的分數數線。 0 和 1 兩點間的距離是 1，將 1 平分成 4 份，其中的 1 份長 $\frac{1}{4}$，在數線標示每一份的長是 $\frac{1}{4}$。  步驟三：透過和 0 的距離是多少的想法，標示出數線上的分數。 數線上的 $\frac{1}{4}$ 指的是 $\frac{1}{4}$ 和 0 的距離是 $\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$ 指的是 $\frac{2}{4}$ 和 0 的距離是 2 個 $\frac{1}{4}$，也就是 $\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$ 指的是 $\frac{3}{4}$ 和 0 的距離是 3 個 $\frac{1}{4}$，也就是 $\frac{3}{4}$，  步驟四：仿前面建立 0 和 1 間分數數線的步驟，建立其它的分數數線。 下面以建立 2 和 3 之間的分數數線為例說明： 先標示整數數線 0、1、2、3、...。 數線上的 $2\frac{1}{4}$ 指的是 $2\frac{1}{4}$ 和 2 的距離是 $\frac{1}{4}$，$2\frac{2}{4}$ 指的是 $2\frac{2}{4}$ 和 2 的距離是 $\frac{2}{4}$，$2\frac{3}{4}$ 指的是 $2\frac{3}{4}$ 和 2 的距離是 $\frac{3}{4}$。			



步驟五：幫助學生建立其它的分數數線。

4. 先復習整數數線，幫助學生畫出整數數線；0 和 1 兩點間的距離是 1，將 1 平分成 4 份，其中的 1 份長 $\frac{1}{4}$ ，在數線標示每一份的長是 $\frac{1}{4}$ ；再透過和 0 的距離是多少的想法，標示出數線上的分數。再將簡單分數標記在數線上，簡單分數指的是分母為 2、3、4、5、10 的分數。幫助學生認識帶分數的整數部份相當於數線上的整數。

2. 教師應幫助學生認識帶分數的整數部份相當於數線上的整數。

3. 數線是國中學習直角坐標的先備知識，也是統整所有數系及幾何的重要基礎，教師應多提供學生利用數線解題的經驗。

題號	2		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算		
試題內容	2. 下面是「45 乘以三位數」的乘法直式算式，算式中有部分不小心被墨汁弄髒了，請問乘法直式的積是多少？ $ \begin{array}{r} 45 \\ \times 2 \text{ * } 3 \\ \hline 135 \\ 180 \\ \text{* } 0 \\ \hline \text{*****} \end{array} $ ① 8935 ② 9935 ③ 10935 ④ 11935		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.21	0.02
2	0.22	0.30	0.12
3*	0.61	0.36	0.83
4	0.07	0.12	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.61	鑑別度	0.46
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.46，正確答案為選項 3，通過率為 61%，顯示超過六成的學生已具備二位數乘以三位數的乘法直式計算能力。 2.有 10%的學生選擇選項 1(低分組有 21%)，這些學生可能尚未具備乘法直式計算的能力；也可能因為無法掌握乘除互逆的概念而無法解題。 3.有 22%的學生選擇選項 2(低分組有 30%)，這些學生可能尚未具備乘法直式計算的能力；也可能因為無法掌握乘除互逆的概念而無法解題。 4.有 7%的學生選擇選項 4(低分組有 12%)，這些學生可能尚未具備乘法直式計算的能力；也可能因為無法掌握乘除互逆的概念而無法解題。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-04 能熟練三位數乘以一位數的直式計算。	4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

補救教學建議

1. 二位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為二位數乘法直式計算的基礎，也是除數為二位數除法直式計算的基礎。

以 34×678 為例，直式進行 3 次 34 乘以一位數 6、7、8 的計算。

以 $4613 \div 72$ 為例，學生估商時進行 2 次 72 乘以一位數的計算。

三位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為三位數乘法直式計算的基礎，也是除數為三位數除法直式計算的基礎。

以 345×678 為例，直式進行了 3 次 345 乘以一位數 6、7、8 的計算。

以 $4613 \div 172$ 為例，學生估商時進行了 2 次 172 乘以一位數的計算。

2. 有兩種分解 147 的方法，第一種是將 147 分解成 100、40 和 7；第二種是將 147 分解成 1 個百、4 個十和 7 個一。乘法直式計算採用第二種分解方式，使得每一個單位的個數都不超過 10，藉以簡化計算。

下面的圖一是第一種分解方法的乘法直式計算，圖二是第二種分解方法的乘法直式計算。

不易將第一種分解方法的乘法直式計算結果記成一行，學生必須先將 7×6 、 40×6 、 200×6 的計算結果記在心裡，再心算出這三個數的和，才能將圖一的計算結果改記成一行，國小三年級的學生不易做到。

	千	百	十	個
	1000	100	10	1
		2	4	7
$\times$				6
			4	2
		2	4	0
+ 1	2	0	0	
	1	4	8	2

圖 一

	千	百	十	個
	1000	100	10	1
		2	4	7
$\times$				6
			4	2
		2	4	
+ 1	2			
	1	4	8	2

圖 二

下面說明如何幫助學生將乘法直式計算的積摘要的記成一行。

千	百	十	個
1000	100	10	1
	1	4	7
×			6
		4	2
	2	4	
+	6		
	8	8	2

千	百	十	個
1000	100	10	1
	1	4	7
×			6
	8	8	2

因為「4」和「24」都是「十」單位，只要心算出「4+24」，就可以省略記成一行。

因為「2」和「6」都是「百」單位，只要心算出「2+6」，就可以省略記成一行。

因此可以省略記成一行。

3. 以「 307×46 」為例，有三種分解被乘數或乘數的方法。

第一種將「 307×46 」分解成「 $307 \times (40 + 6)$ 」

第二種是將「 307×46 」分解成「 $(300 + 7) \times 46$ 」

第三種是將「 307×46 」分解成「 $(300 + 7) \times (40 + 6)$ 」

建議教師透過第一種方法幫助學生學習乘法直式計算，將「 307×46 」分解成「 307×6 」和「 $307 \times 40 = (37 \times 4) \times 10$ 」後，再進行兩次兩位數乘以一位數的直式計算。

$$\begin{array}{r}
 307 \\
 \times 46 \\
 \hline
 1842 \\
 12280
 \end{array}$$

$1842 \Rightarrow 307 \times 6 = 1842$

$12280 \Rightarrow 307 \times 40 = 12280$

省略個位數的0，直接計算 307×4
 $= 1228$ 後，將8記在十位。

4. 學習乘法直式計算時，不鼓勵利用乘法交換律來解題，因為二位數乘以三位數和三位數乘以二位數直式計算的解題意義不同，但是平常解文字題或計算題時，應鼓勵學生使用自己比較能掌握或計算比較簡單的方法來解題，例如利用乘法交換律來簡化計算。

題號	3		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	4-n-05 能做整數四則混合計算(兩步驟)		
試題內容	3. 請問下列哪些算式的答案相等？ 甲：$630 - 30 \div 3$ 乙：$(630 - 30) \div 3$ 丙：$630 - (30 \div 3)$ ① 只有甲和乙相等 ② 只有甲和丙相等 ③ 只有乙和丙相等 ④ 三個算式都相等		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.26	0.39	0.12
2*	0.62	0.33	0.86
3	0.06	0.13	0.02
4	0.06	0.15	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.62	鑑別度	0.53
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.53，正確答案為選項 2，通過率為 62%，顯示超過六成的學生已掌握「括號先算」、「先乘除後加減」、「由左往右算」運算次序的約定。 2.有 26%的學生選擇選項 1(低分組有 39%)，這些學生可能尚未掌握「括號先算」、「先乘除後加減」、「由左往右算」運算次序的約定，他們可能只知道有括號時括號先算，沒有括號時都左往右算。 3.有 6%的學生選擇選項 3(低分組有 13%)，這些學生這些學生可能尚未掌握「括號先算」、「先乘除後加減」、「由左往右算」運算次序的約定，都由左往右算。 4.有 6%的學生選擇選項 4(低分組有 15%)，這些學生這些學生可能尚未掌握「括號先算」、「先乘除後加減」、「由左往右算」運算次序的約定。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。	4-n-05 能做整數四則混合計算(兩步驟)。	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。
補救教學建議			

1. 「 $2 \times 3 + 7 = 6 + 7 = 13$ 」是利用「先乘除後加減」運算次序的約定，不是利用「由左往右算」運算次序的約定。
2. 「 $12 \div 3 \times 2 = 12 \div 6 = 2$ 」是學生常出現的迷思概念，這些學生混淆「先乘除後加減」運算次序的約定，誤認為乘的運算次序比除優先。教師應說明這些算式都是「乘、除」，要使用「由左往右算」運算次序的約定。
3. 以 $7 + 2 + 2 + 2 + 2$ 為例，學生可以利用加法來解題，如果學生將算式改記成 $7 + 2 \times 4$ ，就表示要先算「 $2 + 2 + 2 + 2 = 2 \times 4$ 」的部份，所以數學上約定乘的部份要先算。
4. 四年級兩步驟計算問題中，只會用到①括號先算、②先乘除後加減、③由左往右算，這三個約定其中的一個約定。

括號先算： $13 - (2 + 5) = 13 - 7 = 6$

$$7 \times (5 - 2) = 7 \times 3 = 21$$

先乘除後加減： $5 + 3 \times 4 = 5 + 12 = 17$

$$12 - 6 \div 2 = 12 - 3 = 9$$

$$5 \times 6 + 2 = 30 + 2 = 32$$

$$60 \div 2 - 9 = 30 - 9 = 21$$

由左往右算： $12 + 3 - 5 = 15 - 5 = 10$

$$12 \div 3 \times 2 = 4 \times 2 = 8$$

建議教師將兩步驟計算問題分成有括號和沒有括號兩類，來幫助學生解題。

第一類：有括號的兩步驟計算問題

括號的部份要先算，簡稱為括號先算。

第二類：沒有括號的兩步驟計算問題

(1)算式中加、減，乘、除都有時，要先算乘、除的部份。

簡稱為先乘除後加減

(2)算式中都是乘、除時，要由左往右算；算式中都是加、減時，也要由左往右算。

簡稱為由左往右算。

5. 對四年級學生而言，「先乘除後加減」的四則混合計算問題最困難，建議教師透過比較下列左右兩個算式的運算次序，幫助學生發現兩個共同的特徵。

(1)這些算式中，「加、減」和「乘、除」這兩類運算符號都有。

(2)左邊的算式有括號，括號的部份要先算，右邊的算式中沒有括號，有乘或除運算的部份要先算。

再說明算式中「加、減」這一類和「乘、除」這一類的運算都有的時候，要先算「乘、除」的部份，稱這種運算次序的約定為「先乘除後加減」。

$$(2 \times 3) + 7 = 6 + 7 \\ = 13$$

$$(30 \div 3) - 7 = 10 - 7 \\ = 3$$

$$20 - (3 \times 4) = 20 - 12 \\ = 8$$

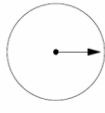
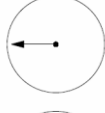
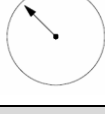
$$8 + (12 \div 3) = 8 + 4 \\ = 12$$

$$2 \times 3 + 7 = 6 + 7 \\ = 13$$

$$30 \div 3 - 7 = 10 - 7 \\ = 3$$

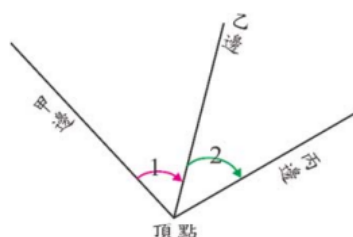
$$20 - 3 \times 4 = 20 - 12 \\ = 8$$

$$8 + 12 \div 3 = 8 + 4 \\ = 12$$

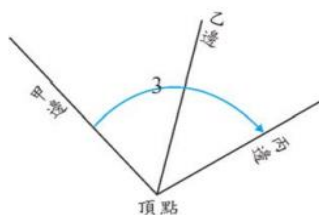
題號	4		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。		
試題內容	4. 下圖是圓形圖卡。  將圖卡內的指針先順時針旋轉 90 度後，再逆時針旋轉 135 度。 下面哪個選項是旋轉後的結果？ ①  ②  ③  ④ 		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.17	0.04
2	0.09	0.18	0.02
3	0.16	0.28	0.05
4*	0.65	0.36	0.88
未作答	0.00		
通過率	0.65	鑑別度	0.52
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.52，正確答案為選項 4，通過率為 66%，顯示六成五的學生已具備理解旋轉角的能力。 2.有 10%的學生選擇選項 1(低分組有 17%)，這些學生可能尚未具備利用旋轉角解題的能力；這些學生可能已具備利用旋轉角解題的能力，但混淆順時針、逆時針旋轉的方向。 3.有 9%的學生選擇選項 2(低分組有 18%)，這些學生可能尚未具備利用旋轉角解題的能力；也可能誤解題意，只找出第一次順時針旋轉 90 度的結果。 4.有 16%的學生選擇選項 3(低分組有 28%)，這些學生可能尚未具備利用旋轉角解題的能力；也可能誤解題意，並混淆順時針、逆時針旋轉的方向，只找出第一次逆時針旋轉 90 度的結果。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-s-04	4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。

補救教學建議

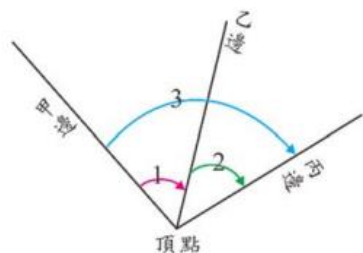
1. 三年級討論的是「張開角」，教學重點是比較兩角張開程度的大小。
四年級討論的是「旋轉角」，教學的重點是結合三年級張開角的概念及旋轉現象，不是將旋轉角當做新的名詞來定義。
2. 「張開角」角度的範圍不能超過 180 度，「旋轉角」角度的範圍可以在 360 度以內(含 360 度)。旋轉角是向量，應要求學生同時說明旋轉的方向及旋轉的度數，例如「順時針旋轉 30 度」或「逆時針旋轉 150 度」，但是不引入旋轉角的記法，例如： -30 度或 $+150$ 度。
3. 可以將旋轉角應用在日常生活中，例如「向右轉」可以看成「順時針旋轉 90 度」，「向左轉」可以看成「逆時針旋轉 90 度」，「向後轉」可以看成「旋轉 180 度」，「轉一圈」可以看成「旋轉 360 度」。
教師可以評量「向右轉」或「向後轉」旋轉了多少度，不宜評量「沿著正方形公園走一圈」旋轉了多少度。前者是旋轉角的概念，後者每次旋轉的端點都不相同。
4. 教師可以利用合成兩次旋轉及一次旋轉的比較活動，幫助學生理解可以用加法算式記錄角度合成結果，以及用減法算式記錄角度分解結果的意義。例如：先進行兩次旋轉的活動，第一次由甲邊順時針方向旋轉至乙邊，用 $\angle 1$ 記錄旋轉的結果；第二次由乙邊順時針方向旋轉至丙邊，用 $\angle 2$ 記錄旋轉的結果，用 $\angle 1 + \angle 2$ 記錄這兩次旋轉活動合成的結果。



再進行一次旋轉的活動，由甲邊直接順時針旋轉至丙邊，用 $\angle 3$ 記錄旋轉的結果。



透過比較「 $\angle 1 + \angle 2$ 」和「 $\angle 3$ 」，幫助學生發現，它們的始邊、終邊、旋轉方向和旋轉大小都相同，是相等的旋轉角，可以記成 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$ 。



題號	5		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質		
試題內容	5. 已知正三角形和正方形的周長都是 24 公分， 請問它們的邊長相差多少公分？ ① 0 ② 2 ③ 12 ④ 24		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.21	0.04
2*	0.56	0.21	0.89
3	0.16	0.34	0.01
4	0.15	0.23	0.06
未作答	0.00		
通過率	0.56	鑑別度	0.68
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.68，正確答案為選項 2，通過率為 56%，顯示近六成的學生已具備利用三角形與四邊形周長定義解題的能力。 2. 有 13% 的學生選擇選項 1 (低分組有 21%)，這些學生可能不具備利用三角形與四邊形周長定義解題的能力；也可能不理解題意，算出兩圖形周長的差。 3. 有 16% 的學生選擇選項 3 (低分組有 34%)，這些學生可能不具備利用三角形與四邊形周長定義解題的能力。 4. 有 15% 的學生選擇選項 4 (低分組有 23%)，這些學生可能不具備利用三角形與四邊形周長定義解題的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-01	4-s-02 能透過操作，認識基	4-s-07

	能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。	本三角形與四邊形的簡單性質。	能認識平行四邊形和梯形。
--	---------------------------	----------------	--------------

補救教學建議

1. 學生常混淆正方形及長方形周長及面積公式解題的意義，教師應多提供學生利用長度單位「1 公分」或「1 公尺」實測的經驗，例如 50 個「1 公分」接起來，剛好和甲繩一樣長，可以稱甲繩的長度是 50 公分；也應該多提供學生利用面積單位「1 平方公分」或「1 平方公尺」實測的經驗，例如將 30 個「1 平方公分」合起來，剛好和色紙一樣大，就可以稱色紙的面積是 30 平方公分。

「1 公分」和「1 平方公分」是兩種不相同的量，當學生有豐富的長度及面積單位實測的經驗，比較不會混淆正方形及長方形周長及面積公式解題的意義。

2. 如果學生混淆正方形及長方形周長及面積公式，教師可以要求學生熟記面積公式即可，評量周長時，學生只要理解正方形邊長、長方形長邊、寬邊，以及圖形周長的意義，並畫出正方形及長方形的圖形，就能順利的解題。

3. 長方形周長有三種解題方式。

第一種：長方形周長＝長＋長＋寬＋寬

第二種：長＋長＝長 $\times$ 2，寬＋寬＝寬 $\times$ 2

長方形周長＝長 $\times$ 2＋寬 $\times$ 2

第三種：長＋寬＋長＋寬＝(長＋寬) $\times$ 2

長方形周長＝(長＋寬) $\times$ 2

第三種解題方式最有效率，所以數學上選擇第三種解題方式為長方形周長的公式。

教師可以將求長方形周長視為先加後乘的兩步驟問題，透過併式的記法引入長方形周長公式。教師不宜透過第二種解題方式，利用乘法對加法的分配律

「長 $\times$ 2＋寬 $\times$ 2＝(長＋寬) $\times$ 2」引入第三種長方形周長公式，基本學習內容五年級才引入乘法對加法的分配律。

題號	6		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	程序執行
學習內容	4-n-14 能以複名數解決量(長度、容量、重量)的計算問題		
試題內容	6. 一條緞帶長 4 公尺，剪掉 1 公尺 65 公分後，還剩下多少公尺多少公分？ ① 2 公尺 35 公分 ② 2 公尺 935 公分 ③ 3 公尺 35 公分 ④ 3 公尺 935 公分		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.62	0.39	0.81
2	0.19	0.25	0.13
3	0.13	0.24	0.05
4	0.05	0.11	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.62	鑑別度	0.42
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.42，正確答案為選項 1，通過率為 62%，顯示超過六成的學生已具備「公尺」、「公分」複名數減法計算的能力。 2.有 19%的學生選擇選項 2(低分組有 25%)，這些學生可能尚未具備「公尺」、「公分」複名數減法計算的能力；也可能誤認為 1 公尺＝1000 公分。 3.有 13%的學生選擇選項 3(低分組有 24%)，這些學生可能尚未具備「公尺」、「公分」複名數減法計算的能力；也可能在計算時退位發生錯誤。 4.有 5%的學生選擇選項 4(低分組有 11%)，這些學生可能尚未具備「公尺」、「公分」複名數減法計算的能力；也可能誤認為 1 公尺＝1000 公分，且在計算時退位發生錯誤。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-14 能認識長度單位「毫米」，及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並作相關的實測、估測與計算。	4-n-14 能以複名數解決量(長度、容量、重量)的計算問題。	5-n-16 能認識重量單位「公噸」及「公噸」、「公斤」間的關係，並做相關計算。

補救教學建議

1. 本評量指標內容強調「公尺、公分」、「公里、公尺」進退位的加減及整數倍乘法計算，這些單位都是 100:1 或 1000:1 的關係。

四年級長度單位引入「公里、公尺、公分及毫米」；開始處理跨單位及雙向化聚的問題。雙向化聚問題評量時以「公里、公尺」及「公尺、公分」為宜。

2. 二位數加減二位數的加減問題，與相鄰二階單位的時間、長度、重量、容量等加減問題，它們的運算方式都相同，例如「 $38+25$ 」、「3 小時 40 分鐘 + 2 小時 50 分鐘」、「3 公尺 60 公分 + 5 公尺 80 公分」、「3 公斤 460 公克 + 5 公斤 860 公克」、「13 公升 780 毫公升 + 23 公升 380 毫公升」等加法運算都相同，只是二位數的加法是逢十進一(10 個①聚成 1 個⑩)。例子中時間的加法是逢六十進一(60 個 1 分鐘聚成 1 小時)，長度的加法是逢一百進一(100 個 1 公分聚成 1 公尺)，重量及容量的加法都是逢一千進一(1000 個 1 公克或毫公升聚成 1 公斤或 1 公升)。教師可以幫助學生發現它們之間運算相同的關係，將長度、容量、重量的複名數加減視為相同的解題方式。

3. 下面以「 $35+58$ 」和「3 公尺 50 公分 + 5 公尺 80 公分」為例，建議教師幫助學生理解這兩個運算相同，二位數的加法是逢十進一(10 個①聚成 1 個⑩)，長度的加法是逢一百進一(100 個 1 公分聚成 1 公尺)。

$\begin{array}{r} \textcircled{10} \quad \textcircled{1} \\ 3 \quad 5 \\ + \quad 5 \quad 8 \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{r} 13 \\ 8 \\ 1 \quad 3 \\ + \quad 8 \\ \hline 9 \quad 3 \end{array}$	$\Rightarrow$ 5 個①加 8 個①是 13 個① $\Rightarrow$ 3 個⑩加 5 個⑩是 8 個⑩ $\Rightarrow$ 13 個①是 1 個⑩3 個① $\Rightarrow$ 合起來是 9 個⑩3 個①
$\begin{array}{r} \text{公尺} \quad \text{公分} \\ 3 \quad 50 \\ + \quad 5 \quad 80 \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{r} 130 \\ 8 \\ 1 \quad 30 \\ + \quad 8 \\ \hline 9 \quad 30 \end{array}$	$\Rightarrow$ 50 公分加 80 公分是 130 公分 $\Rightarrow$ 3 公尺加 5 公尺是 8 公尺 $\Rightarrow$ 130 公分是 1 公尺 30 公分 $\Rightarrow$ 合起來是 9 公尺 30 公分

題號	7		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較		
試題內容	7. 請問 36 個「0.01」和 36 個「0.1」相差多少？ ① 0 ② 0.09 ③ 3.24 ④ 3.34		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.20	0.01
2	0.12	0.26	0.02
3*	0.71	0.39	0.95
4	0.08	0.15	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.71	鑑別度	0.56
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.56，正確答案為選項 3，通過率為 71%，顯示超過七成的學生已具備小數單位化聚和比較大小的能力。 2.有 9%的學生選擇選項 1(低分組有 20%)，這些學生可能不具備小數單位化聚和比較大小的能力；也可能誤解題意，算出兩個單位小數個數的差($36-36=0$)。 3.有 12%的學生選擇選項 2(低分組有 26%)，這些學生可能不具備小數單位化聚和比較大小的能力；也可能誤解題意，算出兩個單位小數的差($0.1-0.01=0.09$)。 4.有 8%的學生選擇選項 4(低分組有 15%)，這些學生可能已具備小數單位化聚和比較大小的能力，但在計算時發生錯誤。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-12 能認識一位小數，並作比較與加減計算。	4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。

補救教學建議

1. 小數是整數十進位系統的延伸，在引入一位小數時，十分位的值必須是個位的 $\frac{1}{10}$ 倍，因此規定「 $0.1 = \frac{1}{10}$ 」。在引入二位小數時，百分位的值必須是個位的 $\frac{1}{100}$ 倍，因此規定「 $0.01 = \frac{1}{100}$ 」。百分位位名的由來是「 $\frac{1}{100} = 0.01$ 」的關係。
2. 透過下列兩組數字，說明小數點的功能。

第一組小數：7.7、77.77、777.777

第二組小數：77.7、777.77、7777.777

就數字本身視覺的觀點，7.7 小數點的左邊及右邊各有一個 7，77.77 小數點的左邊及右邊各有二個 7，777.777 小數點的左邊及右邊各有三個 7，因此以小數點為對稱中心時，第一組小數是左右對稱的。

但是就位值的觀點，第二組小數才是左右對稱的。當我們以個位的 7 為對稱中心，並忽略小數點時，左右兩邊的位值是對稱的，個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，十位的左邊是百位，十分位的右邊是百分位，百位的左邊是千位，百分位的右邊是千分位，十位及十分位，百位及百分位，千位及千分位分別對稱於個位。如下所示：

千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
		7	7.	7		
	7	7	7.	7	7	
7	7	7	7.	7	7	7

因為數字的單位是 1，而記幾個 1 的位置是個位，因此個位才是數字的對稱中心。個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，不會有個分位的位名，而小數點的功能是告訴我們個位在哪裡。

3. 教師常要求學生將計算後的結果 3.0 改記成 3，2.30 改記成 2.3，可以這樣記的原因是 3.0 和 3 等值，2.30 和 2.3 等值，而 3 和 2.3 是最簡小數的概念。六年級引入最簡分數後，我們會要求分數問題最後的答案要用最簡分數來表示，相同的理由，我們也希望小數問題最後的答案要用最簡小數來表示。四年級學生將計算後的結果記成 3.0 或 2.30，教師應先接受，再幫助學生改記成 3 或 2.3。
4. 以二位純小數 0.85 為例，進行位值單位的換算，指的是能將「85 個 0.01」聚成「8 個 0.1、5 個 0.01」，以及將「8 個 0.1、5 個 0.01」化成「85 個 0.01」的雙向化聚。也就是說，0.85 由 85 個 0.01 所組成，也由 8 個 0.1 及 5 個 0.01 所組成。

題號	8		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算		
試題內容	8. 「一箱飲料特價 312 元，班上 8 位同學合買 24 箱飲料送給育幼院，飲料錢 8 位同學平分，請問每位同學要付多少元？」 下面哪個算式可以算出正確的答案？ ① $312 \div 24 \div 8$ ② $312 \div 8 \times 24$ ③ $312 \times 8 \div 24$ ④ $312 \times 8 \times 24$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.20	0.04
2*	0.58	0.33	0.82
3	0.22	0.34	0.10
4	0.08	0.13	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.58	鑑別度	0.50
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.50，正確答案為選項 2，通過率為 58%，顯示近六成的學生已具備兩步驟問題列式的能力。 2.有 11%的學生選擇選項 1(低分組有 20%)，這些學生可能不具備兩步驟問題列式的能力；也可能誤解題意。 3.有 22%的學生選擇選項 3(低分組有 34%)，這些學生可能不具備兩步驟問題列式的能力；也可能誤解題意。 4.有 8%的學生選擇選項 4(低分組有 13%)，這些學生可能不具備兩步驟問題列式的能力；也可能誤解題意。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-n-10 能在具體情境中，解決兩步驟問題(加、減與乘，不含併式)。	4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。

補救教學建議

1. 能在具體情境中，解決兩步驟問題的教學順序如下：

二年級：在具體情境中，解決「加、減」及「加(減)、乘」兩步驟問題。

三年級：在具體情境中，解決「加(減)、除」及「連乘」兩步驟問題。

四年級：在具體情境中，解決「乘、除」及「連除」兩步驟問題。

六年級：分數兩步驟問題及小數兩步驟問題。

2. 乘、除及連除兩步驟問題是兩步驟問題中最困難的題型，學生已熟練先乘後加(減)、先加(減)後乘、先除後加(減)、先加(減)後除、連乘兩步驟問題，並不表示學生也熟練乘、除及連除兩步驟問題。

如果學生無法解乘、除及連除兩步驟問題，教師應透過分段布題的方式，幫助學生用兩個算式記錄解題活動。

3. 以「1 袋餅乾有 30 包，老師買了 5 袋，平分給 25 個人，每個人可以分到多少包餅乾？」為例，教師可透過分段布題的方式，幫助學生用兩個算式記錄解題活動。

步驟一：先布問題「1 袋餅乾有 30 包，老師買了 5 袋，共有多少包？」，用算式把做法記下來。

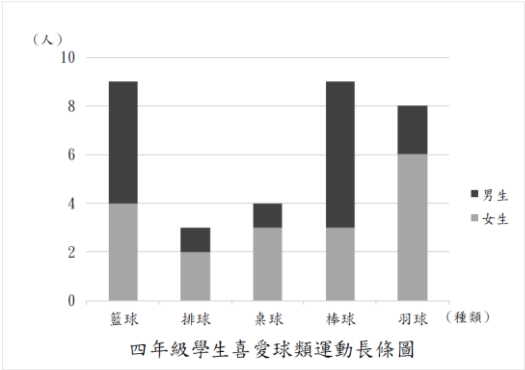
幫助學生用算式「 $30 \times 5 = 150$ 」把做法記下來。

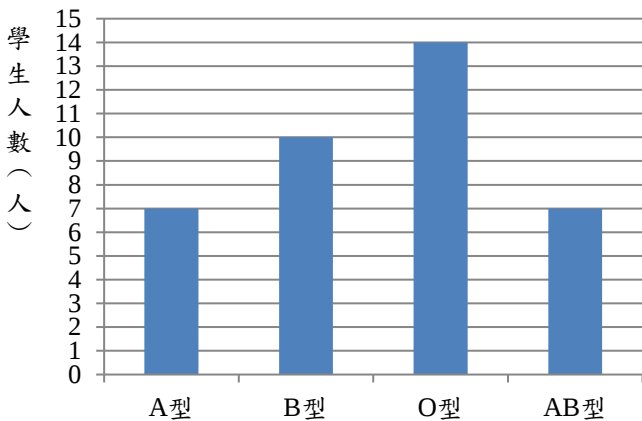
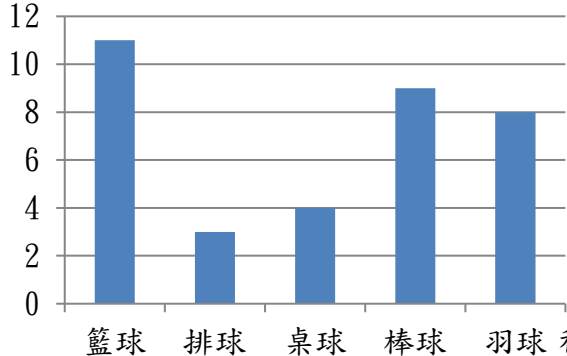
步驟二：再布問題「150 包餅乾，平分給 25 個人，每個人可以分到多少包餅乾？」，用算式把做法記下來。

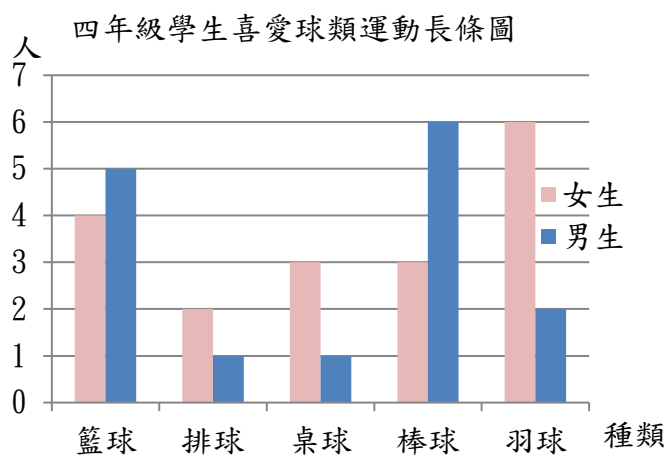
幫助學生用算式「 $150 \div 25 = 6$ 」記錄解題活動。

步驟三：回到原問題「1 袋餅乾有 30 包，老師買了 5 袋，平分給 25 個人，每個人可以得多少包餅乾？」，用兩個算式把先算什麼，再算什麼的算法記下來。

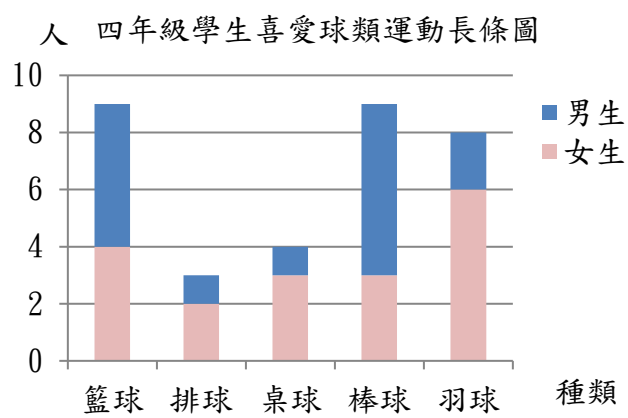
幫助學生用兩個算式「 $30 \times 5 = 150$ ， $150 \div 25 = 6$ 」把做法記下來。

題號	9		
內容領域	統計與機率	認知歷程向度	解題思考
學習內容	4-d-01 能報讀生活中常用的長條圖		
試題內容	9. 下圖是四年級學生喜愛球類運動長條圖。  下列敘述何者正確？ ① 最受女生喜愛的運動是桌球 ② 喜歡籃球的男生和女生一樣多人 ③ 女生喜歡桌球比喜歡棒球的人數少 ④ 男生喜歡籃球比喜歡棒球的人數少		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.03	0.07	0.01
2	0.11	0.21	0.03
3	0.18	0.28	0.10
4*	0.67	0.43	0.87
未作答	0.01		
通過率	0.67	鑑別度	0.44
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.44，正確答案為選項 4，通過率為 67%，顯示近七成的學生已具備報讀長條圖的能力。 2. 有 3% 的學生選擇選項 1 (低分組有 7%)，這些學生可能不具備報讀長條圖的能力。 3. 有 11% 的學生選擇選項 2 (低分組有 21%)，這些學生可能不具備報讀長條圖的能力，他們可能沒有點數男生及女生的個數，看到長度很接近就認為男生及女生的個數一樣多。 4. 有 18% 的學生選擇選項 3 (低分組有 28%)，這些學生可能不具備報讀長條圖的能力，他們可能將女生的人數看成男生的人數。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-d-01 能報讀生活中常見的表格。	4-d-01 能報讀生活中常用的長條圖。	5-d-01 能整理生活中的資料，並製成長條圖。
補救教學建議			
1.由於資料的屬性不同，適用的統計圖形也不相同，若資料項目屬於類別變數，也就是只知道某一個項目和其它的項目不同，這些項目間沒有顯著的關聯性、次序性，數學上經常使用長條圖來溝通。以統計某年級學生血型人數的長條圖為例，當改變類別變數(血型)的位置時，並不會影響長條圖的意義。 2.長條圖很容易看到部份與部份間的差異量關係，但是不容易看到部份與全體間的倍數關係。以圖一為例，我們較容易看到不同血型人數的差異量，例如 A 型的學生比 O 型的學生少 7 人、A 型和 AB 型學生人數和與 O 型學生人數一樣多；較不容易看到不同血型學生人數和全體學生人數間的倍數關係，例如 A 型學生人數佔全體學生人數的幾分之幾。 四年級學生血型人數統計圖  (圖一) 3.本細目要求學生必須有報讀「簡單的長條圖」的能力(如圖二)，有足夠報讀經驗後，才能要求學生報讀「複雜的長條圖」(如圖三和圖四)。 人 四年級學生喜愛球類運動長條圖  (圖二)			



(圖三)



(圖四)

題號	10		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。		
試題內容	10. 已經知道「$25 \times 61 \times 4 \times 5 = 100 \times \text{甲}$」，請問甲 = ？ ① 61 ② 244 ③ 305 ④ 30500		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.17	0.03
2	0.10	0.18	0.04
3*	0.49	0.23	0.77
4	0.30	0.40	0.16
未作答	0.01		
通過率	0.49	鑑別度	0.54
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.54，正確答案為選項 3，通過率為 49%，顯示近五成的學生已具備利用乘法結合律及交換律解題的能力。 2.有 10%的學生選擇選項 1(低分組有 17%)，這些學生可能尚未具備利用乘法結合律及交換律解題的能力；也可能不理解題意。 3.有 10%的學生選擇選項 2(低分組有 18%)，這些學生可能尚未具備利用乘法結合律及交換律解題的能力；也可能不理解題意。 4.有 30%的學生選擇選項 4(低分組有 40%)，這些學生可能尚未具備利用乘法結合律及交換律解題的能力；也可能誤解題意，選擇四數相乘的積為答案。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-a-02 能在具體情境中，認識加法順序改變並不影響其和的性質。	4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

補救教學建議

1. 建議教師在具體情境中，幫助學生理解乘法結合律。

以「一盒蘋果裝 25 顆，12 盒蘋果裝一箱。爸爸進口 20 箱蘋果，請問進口幾顆蘋果？」為例，幫助學生認識先算 1 箱有 25×12 顆蘋果，再算 20 箱有幾顆蘋果，記成 $(25 \times 12) \times 20 = 6000$ ；和先算 20 箱有 12×20 盒蘋果，再算 12×20 盒有幾顆蘋果，記成 $25 \times (12 \times 20) = 6000$ ，因為答案相同，所以 $(25 \times 12) \times 20 = 25 \times (12 \times 20)$ 。

2. 教師應幫助學生從「觀察現象」的層次發展至「預期」的層次，以「一盒蘋果裝 25 顆，12 盒蘋果裝一箱。爸爸進口 20 箱蘋果，請問進口幾顆蘋果？」為例，有兩個認識乘法結合律性質的層次：

層次一：學生必須算出答案，才相信「 $(25 \times 12) \times 20$ 」和「 $25 \times (12 \times 20)$ 」的答案相同。

層次二：學生不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同。教師應幫助層次一的學生提升至層次二。

3. 利用結合律來簡化計算時，計算過程中常同時利用到乘法交換律及乘法結合律。

例如計算 $(25 \times 11) \times 4 = 25 \times (11 \times 4) = 25 \times (4 \times 11) = (25 \times 4) \times 11 = 100 \times 11 =$

1100。教師教學時不必詳細說明上述計算過程，只要透過情境幫助學生認識乘法順序改變並不影響其積的性質。

題號	11		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	4-n-02 能熟練整數加、減的直式計算		
試題內容	11. 最小的五位數和最大的三位數相差多少？ ① 9001 ② 9100 ③ 10112 ④ 10211		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.65	0.35	0.92
2	0.16	0.30	0.04
3	0.13	0.22	0.04
4	0.06	0.12	0.01
未作答	0.01		
通過率	0.65	鑑別度	0.57
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.57，正確答案為選項 1，通過率為 65%，顯示六成五的學生已具備減法直式計算的能力。 2. 有 16% 的學生選擇選項 2(低分組有 30%)，這些學生可能已具備減法直式計算的能力，但在找最小五位數和最大三位數時發生錯誤；也可能正確找出最小五位數和最大三位數，但是計算發生錯誤。 3. 有 13% 的學生選擇選項 3(低分組有 22%)，這些學生可能已具備減法直式計算的能力，但在找最小五位數和最大三位數時發生錯誤；也可能正確找出最小五位數和最大三位數，但是計算發生錯誤。 4. 有 6% 的學生選擇選項 4(低分組有 12%)，這些學生可能已具備減法直式計算的能力，但在找最小五位數和最大三位數時發生錯誤；也可能正確找出最小五位數和最大三位數，但是計算發生錯誤。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-02 能熟練加減直式計算(四位數以內，和 < 10000，含多重退位)。	4-n-02 能熟練整數加、減的直式計算。	7-n-06 能理解負數的特性並熟練數(含小數、分數)的四則混合運算。

補救教學建議

1. 以退位減法計算問題「 $1235-678$ 」為例，進行個位計算時，因為 5 減 8 不夠減，拿 1 個十換 10 個一之後，有兩種解題的方法，第一種是利用基本加減事實來解題，直接利用 $15-8=7$ ，算出和的個位數字是 7，第二種是利用拆十來解題，透過 $10-8=2$ ， $2+5=7$ ，算出和的個位數字是 7。三年級學生應該已熟記基本加減事實，建議教師幫助學生利用第一種方法來解題。
2. 不宜大量練習及評量高位數的直式計算，只要讓學生有處理大數加減的經驗即可，大數加減的處理應與概數結合。

題號	12				
內容領域	幾何	認知歷程向度	程序執行		
學習內容	4-s-01 能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形				
試題內容	12. 下面是測量 A 、 B 、 C 、 D 、 E 這 5 個三角形三條邊邊長或三個角角度的數據。				
	三角形 A	三角形 B	三角形 C	三角形 D	三角形 E
	5 公分	60 度	10 公分	45 度	60 度
	3 公分	30 度	10 公分	90 度	60 度
	5 公分	90 度	10 公分	45 度	60 度
甲說：三角形 A 和三角形 D 都是等腰三角形 乙說：三角形 B 和三角形 D 都是直角三角形 丙說：三角形 C 和三角形 E 都是銳角三角形					
請問哪些人的說法正確？					
① 只有甲和乙正確 ② 只有甲和丙正確 ③ 只有乙和丙正確 ④ 三個人都正確					
選答率	答題反應比率（*表正確答案）				
選項	整體	低分組		高分組	
1	0.26	0.24		0.28	
2	0.21	0.29		0.12	
3	0.24	0.30		0.15	
4*	0.28	0.16		0.45	
未作答	0.00				
通過率	0.28	鑑別度		0.29	
試題品質分析					
1.本題鑑別度為 0.29，正確答案為選項 4，通過率為 28%，顯示近三成的學生已具備運用「角」與「邊」等構成要素辨認三角形的能力。					
2.有 26%的學生選擇選項 1(低分組有 24%)，這些學生可能尚未具備運用「角」與「邊」等構成要素辨認三角形的能力，他們認為正三角形不是銳角三角形。					
3.有 21%的學生選擇選項 2(低分組有 29%)，這些學生可能尚未具備運用「角」與「邊」等構成要素辨認三角形的能力，他們不知道有一個角是 90 度的三角形是直角三角形。					
4.有 24%的學生選擇選項 3(低分組有 30%)，這些學生可能尚未具備運用「角」與「邊」等構成要素辨認三角形的能力，他們可能知道有兩邊等長的三角形是等腰三角形，但是不知道兩底角相等的三角形也是等腰三角形。					

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-s-04 能認識角，並比較角的大小。(同 3-n-17)	4-s-01 能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。
補救教學建議			
1. 以等腰直角三角形 ABC，$\angle A$ 是直角為例，教師可以說明等腰直角三角形 ABC 中有 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 三個角，其中 $\angle A$ 是直角，$\angle A$ 比 $\angle B$ 大，$\angle A$ 也比 $\angle C$ 大，我們說 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 這三個角中，$\angle A$ 最大。 2. 教師不宜直接宣告有 2 條邊一樣長且有一個角是直角的三角形為等腰直角三角形，學生不易同時掌握「有兩邊等長」及「有一個角為直角」這兩個性質。建議教師透過下列兩種方式幫助學生理解等腰直角三角形的意義。 第一種：由等腰三角形中找出直角三角形 教師可以利用扣條等教具先做出等長的兩條邊，也就是先滿足等腰三角形的條件，再旋轉扣條讓兩邊的夾角是直角，最後圍成一個三角形，稱這個做出來的三角形為等腰直角三角形。 第二種：由直角三角形中找出等腰三角形 教師可以先利用三角板畫出直角，也就是先滿足直角三角形的條件，再利用圓規畫出等長的兩邊，最後再連成一個三角形，稱這個畫出來的三角形為等腰直角三角形。當學生有這兩種方法的學習經驗後，較能夠掌握等腰直角三角形同時具備「有兩邊等長」及「有一個角為直角」這兩個性質的意義。 3. 教師可以畫出數個等腰直角三角形，幫助學生察覺這些等腰直角三角形，邊和角都具備下列性質： (1) 邊的性質：三條邊中，都有兩條邊一樣長，另一條不一樣長的邊，比等長的這兩條邊長。 (2) 角的性質：都有一個角是直角，另外的兩個角一樣大，但是都比直角小。如果教師行有餘力，可以幫助學生察覺邊和角都具備下列關係： ① 直角是最大角，對應的邊是最長邊。 ② 兩個一樣大的角，對應的邊都一樣長；兩個一樣長的邊，對應的角都一樣大。 ③ 直角比另一個角大，直角對應的邊比另一個角對應的邊長。 ④ 最長的邊對應的角是直角，比另一邊對應的角大。			

題號	13		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-n-07 能理解分數之「整數相除」的意涵		
試題內容	13. 將一盒巧克力平分給 5 個人，每個人分到 3 顆後，還剩下 3 顆。 請問剩下多少盒巧克力？ ① $\frac{3}{18}$ ② $\frac{3}{15}$ ③ $\frac{1}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.50	0.21	0.78
2	0.28	0.36	0.16
3	0.04	0.09	0.00
4	0.19	0.33	0.06
未作答	0.00		
通過率	0.50	鑑別度	0.56
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.56，正確答案為選項 1，通過率為 50%，顯示有五成的學生已理解分數之「整數相除」的意涵。 2.有 28%的學生選擇選項 2(低分組有 36%)，這些學生可能尚未理解分數之「整數相除」的意涵；也可能已理解分數之「整數相除」的意涵，但是在計算一盒蘋果有幾顆時，漏加餘數 3 顆，算出一盒巧克力有 15 顆，3 顆相當於$\frac{3}{15}$盒。 3.有 4%的學生選擇選項 3(低分組有 9%)，這些學生可能尚未理解分數之「整數相除」的意涵。 4.有 19%的學生選擇選項 4(低分組有 33%)，這些學生可能尚未理解分數之「整數相除」的意涵。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-11 能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。	4-n-07 能理解分數之「整數相除」的意涵。	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

補救教學建議

1. 區分有餘數及沒有餘數問題的意義及記法：

有餘數問題的記法： $a \div b = q \dots r$ ， q 是整數， $0 \leq r < b$ 。

沒有餘數問題的記法： $a \div b = \frac{a}{b}$ ， $b \neq 0$ 。

有餘數的等分除問題：13 個蘋果平分給 5 個人，每人最多分到幾個？剩下幾個蘋果？

$$13 \div 5 = 2 \dots 3$$

答：每人最多分到 2 個，剩下 3 個蘋果。

沒有餘數的等分除問題：13 個蘋果平分給 5 個人，全部分完，每人分到幾個蘋果？

$$13 \div 5 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

答：每人分到 $\frac{13}{5}$ (或 $2\frac{3}{5}$) 個蘋果。

有餘數的包含除問題：13 公分長的繩子，5 公分剪一段，最多可以剪幾段，剩下幾公分？

$$13 \div 5 = 2 \dots 3$$

答：最多可以剪成 2 段，剩下 3 公分。

沒有餘數的包含除問題：13 公分長的繩子，5 公分剪成一段，全部剪完，相當於剪成幾段？

$$13 \div 5 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

答：相當於剪成 $\frac{13}{5}$ (或 $2\frac{3}{5}$) 段。

下列問題的餘數是 0，餘數是 0 的問題也屬於有餘數的問題：15 個蘋果平分給 5 個人，每人最多分到幾個？剩下幾個蘋果？

$$15 \div 5 = 3 \dots 0$$

答：每人最多分到 3 個，剩下 0 個蘋果。

再遇到這個問題時，可以直接利用整數除以整數的算式「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」算出答案。

2. 以包含除問題「一盒蘋果有 5 個，8 個蘋果相當於幾盒？」為例，教師可以透過將「1 盒」及「5 個」同時平分成 5 份的方式，幫助學生解題。

「1 盒」有「5 個」⇒

5 個平分成 5 份，1 份是 1 個

1 盒平分成 5 份，1 份是 $\frac{1}{5}$ 盒

⇒ 1 個是 $\frac{1}{5}$ 盒

⇒ 8 個是 $\frac{8}{5}$ 盒

當學生有一些解題成功的經驗後，教師應要求學生用沒有餘數的除法算式

「 $8 \div 5 = \frac{8}{5}$ 」把問題和答案記下來，並說明以後再遇到這個問題時，可以直接

利用整數除以整數的算式「 $8 \div 5 = \frac{8}{5}$ 」算出答案。

題號	14		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義		
試題內容	14. 甲、乙、丙是平面上三條直線，畫畫看，選出<u>錯誤</u>的選項。 ① 甲和乙互相垂直，乙和丙互相垂直，那麼甲和丙會互相平行 ② 甲和乙互相垂直，乙和丙互相平行，那麼甲和丙會互相平行 ③ 甲和乙互相平行，乙和丙互相垂直，那麼甲和丙會互相垂直 ④ 甲和乙互相平行，乙和丙互相平行，那麼甲和丙會互相平行		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.21	0.05
2*	0.45	0.21	0.75
3	0.23	0.33	0.10
4	0.18	0.24	0.10
未作答	0.01		
通過率	0.45	鑑別度	0.54
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.54，正確答案為選項 2，通過率為 45%，顯示有四成五的學生已具備能依題意畫圖並辨識兩線平行或垂直的能力。。 2.有 13%的學生選擇選項 1(低分組有 21%)，這些學生可能尚未具備能依題意畫圖並辨識兩線平行或垂直的能力；也可能不理解題意。 3.有 23%的學生選擇選項 3(低分組有 33%)，這些學生可能尚未具備能依題意畫圖並辨識兩線平行或垂直的能力；也可能不理解題意。 4.有 18%的學生選擇選項 4(低分組有 24%)，這些學生可能尚未具備能依題意畫圖並辨識兩線平行或垂直的能力；也可能不理解題意。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-s-02 能認識生活周遭中平行與垂直的現象。	4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。	4-s-07 能認識平行四邊形和梯形。 4-s-08 能利用三角板畫出直角與兩平行線段，並用來描繪平面圖形。 6-s-04 能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。

補救教學建議

1. 分年細目 4-s-06 針對平行與垂直下定義，也就是給定一個判斷兩線是否互相平行或互相垂直的方法。

兩線平行：L1 與 L2 同時垂直於 L，稱 L1 與 L2 兩線互相平行。

兩線垂直：L1 與 L2 相交且有一個交角為直角，稱 L1 與 L2 兩線互相垂直。

2. 平面上存在下圖中三種垂直的情境，第一種情境只存在 1 個直角，第二種情境存在 2 個直角，第三種情境存在 4 個直角，這三種情境經常隱藏在幾何圖形中，它們都滿足兩直線互相垂直的關係。建議教師在教學時，這三種情境都要溝通，不能只討論其中一種情境。



3. 兩直線不會相交是平行線的現象，但是不能當作判斷兩線是否平行的方法，因為無法檢驗兩線是否不會有交點。

4. 日常生活中常出現「水平線」和「鉛垂線」的名詞，水平線是伴隨著水平面出現的一條虛擬直線，將一杯水平放在桌面上，水面會是水平面，當我們將注意力放在水平面上的邊時，就能觀察到水平線的現象；日常生活中到處都存在鉛垂線，垂吊的燈飾，懸掛燈籠的繩子等都是鉛垂線。

學生可能混淆「水平線」和「平行線」，以及「鉛垂線」和「垂直線」的意義，誤認為「水平線」就是「平行線」，「鉛垂線」就是「垂直線」。

水平線和鉛垂線是日常生活中自然存在的一條直線，而平行線和垂直線是描述兩條直線間的關係。

題號	15		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-s-01 能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形		
試題內容	15. 下列是甲、乙二人關於「正方形、長方形、平行四邊形」這三種圖形的說法： 甲說：只有正方形和平行四邊形這兩種圖形的 4 個邊一定一樣長 乙說：只有正方形和長方形這兩種圖形沿著對角線剪開，一定能剪出 2 個全等的三角形 請問哪些人的說法正確？ ① 只有甲 ② 只有乙 ③ 甲和乙都正確 ④ 甲和乙都不正確		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.23	0.08
2	0.35	0.33	0.35
3	0.17	0.26	0.08
4*	0.32	0.16	0.49
未作答	0.01		
通過率	0.32	鑑別度	0.33
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.33，正確答案為選項 4，通過率為 32%，顯示超過三成的學生已具備運用角與邊等要素，辨認長方形、平行四邊形、正方形的能力。 2.有 15%的學生選擇選項 1(低分組有 23%)，這些學生可能不具備運用角與邊等要素，辨認長方形、平行四邊形、正方形的能力，他們不知道平行四邊形的四個邊有可能不一樣長。 3.有 35%的學生選擇選項 2(低分組有 33%)，這些學生可能不具備運用角與邊等要素，辨認長方形、平行四邊形、正方形的能力，他們不知道平行四邊形沿對角線剪開，也會剪成兩個全等的三角形。 4.有 17%的學生選擇選項 3(低分組有 26%)，這些學生可能不具備運用角與邊等要素，辨認長方形、平行四邊形、正方形的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-s-07 能由邊長和角的特性來認識正方形和長方形。	4-s-01 能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。	4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。

補救教學建議

1. 運用「角」與「邊」的特徵比對辨認正方形、長方形、菱形，也就是給下列四邊形下定義。

正方形：四邊等長且四個角都是直角的四邊形。

長方形：四個角都是直角的四邊形。

菱形：四邊都等長的四邊形。

2. 運用「有幾雙對邊平行」的特徵比對辨認平行四邊形、梯形，也就是給下列四邊形下定義。

平行四邊形：兩雙對邊都平行的四邊形。

梯形：一雙對邊平行，另一雙對邊不平行的四邊形。

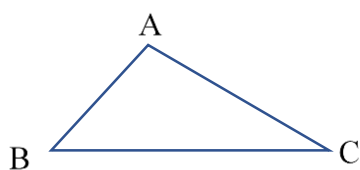
3. 對邊指的是某條邊或某個角相對的邊，一雙對邊(或一組對邊)指的是兩條邊的關係，這兩條邊互為相對的邊，國小學生常混淆對邊和一雙對邊的意義。

以圖一中的三角形 ABC 為例，我們稱邊 AB 為角 C 的對邊，稱角 A 為邊 BC 的對角，也就是說，三角形中，每個角都有對邊，每個邊都有對角。

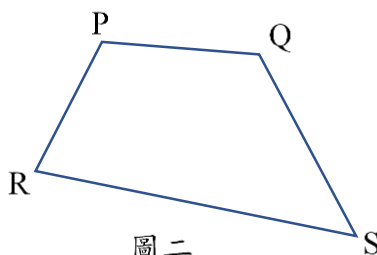
數學上稱大角對大邊、大邊對大角就是這個意思。

以圖二中的四邊形 PQRS 為例，邊 PQ 有兩條相鄰的邊 PS 和邊 QR，邊 PQ 有一條相對的邊 SR，我們稱邊 PS 和邊 QR 為邊 PQ 的鄰邊，稱邊 SR 為邊 PQ 的對邊。相同的方式，邊 SR 也有一條相對的邊 PQ，我們稱邊 PQ 為邊 SR 的對邊。當學生掌握邊 SR 是邊 PQ 的對邊時，邊 PQ 也是邊 SR 的對邊、邊 PQ 是邊 SR 的對邊時，邊 SR 也是邊 PQ 的對邊的關係後，可以引入一雙對邊的名詞，稱邊 PQ 和邊 RS 為一雙對邊。

相同的方式，教師也可以說明角 P 和角 R 為一雙對角。



圖一



圖二

題號	16		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-a-02 能在四則混合計算中，運用數的運算性質		
試題內容	16. 甲、乙、丙、丁四個算式中，哪些算式正確？ 甲：$6533 + 3263 - 4033 = 6533 + 4033 - 3263$ 乙：$8567 - 1436 - 2583 = 8567 - (1436 + 2583)$ 丙：$3600 \div 20 \times 4 = 360 \div (20 \times 4)$ 丁：$379 \times 5 = 379 \times 10 \div 2$ ① 只有甲和丙 ② 只有甲和丁 ③ 只有乙和丙 ④ 只有乙和丁		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.23	0.03
2	0.19	0.27	0.09
3	0.22	0.30	0.12
4*	0.44	0.18	0.76
未作答	0.01		
通過率	0.44	鑑別度	0.57
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.57，正確答案為選項 4，通過率為 44%，顯示超過四成的學生已具備利用數的運算性質解題的能力。 2.有 14%的學生選擇選項 1(低分組有 23%)，這些學生可能尚未具備利用數的運算性質解題的能力，他們誤認為 $a+b-c=a+c-b$、$a \div b \times c = a \div (b \times c)$，也不知道可以算出答案後再比較。 3.有 19%的學生選擇選項 2(低分組有 27%)，這些學生可能尚未具備利用數的運算性質解題的能力，他們不知道可以算出答案後再比較。。 4.有 22%的學生選擇選項 3(低分組有 30%)，這些學生可能尚未具備利用數的運算性質解題的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-a-02 能在具體情境中，認識加法順序改變並不影響其和的性質。	4-a-02 能在四則混合計算中，運用數的運算性質。	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

補救教學建議

1. 數的加減混合運算性質：

(1) 三數相加時，加法順序改變並不影響其和

$$(2) a + b - c = a - c + b$$

$$(3) a - b - c = a - (b + c)$$

國小階段不處理 $a - b + c = a - (b - c)$

2. 以「甲有 80 元，給乙 10 元，給丙 20 元，還剩下多少元？」為例，說明如何幫助學生理解 $a - b - c = a - (b + c)$

步驟一：先提供兩種解題的方法，限制用併式來記錄解題過程

$$\text{方法一：} 80 - 10 - 20 = 50$$

$$\text{方法二：} 80 - (10 + 20) = 50$$

步驟二：幫助學生看到這兩個算式的答案相同

$$\text{可以記成 } 80 - (10 + 20) = 80 - 10 - 20$$

$$\text{或 } 80 - 10 - 20 = 80 - (10 + 20)$$

步驟三：幫助學生察覺這兩種方法都是合理的算法，因此不必算出答案也知道它們的答案一定相等。

3. 數的乘除運算性質：

四年級只處理利用乘法交換律和結合律，以及將數字分解來簡化計算的運算性質。

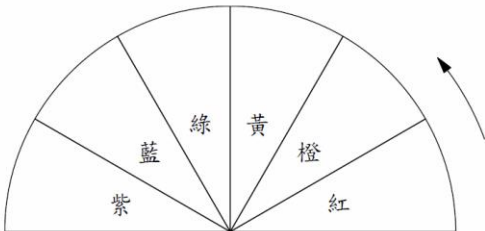
$$\text{例如：} 25 \times 11 \times 12 \times 4 = (25 \times 4) \times 11 \times 12$$

$$20 \times 30 \times 40 = 2 \times 10 \times 3 \times 10 \times 4 \times 10 = (2 \times 3 \times 4) \times (10 \times 10 \times 10) = 24 \times 1000 = 24000$$

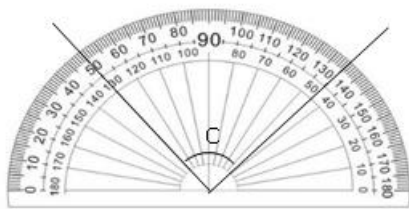
$$37 \times 5 = 37 \times 10 \div 2 = 370 \div 2 = 185$$

四年級不處理下列乘除混合的運算性質，下列運算性質是五年級教學的重點。

$$a \times b \div c = a \div c \times b ; a \div b \div c = a \div (b \times c) ; a \div b \times c = a \div (b \div c)$$

題號	17		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	4-s-04(同 4-n-16) 能認識「度」的角度單位，使用量角器實測角度或畫出指定的角		
試題內容	17. 演唱會的雷射光有六種顏色，雷射光由舞台右邊開始逆時針方向掃射，依序出現紅、橙、黃、綠、藍、紫，紅、橙、黃、... 等顏色變化，每種顏色掃射 30 度，請問雷射光掃射到 118 度時，會出現什麼顏色的雷射光？  ① 黃色 ② 綠色 ③ 藍色 ④ 紫色		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.19	0.22	0.14
2*	0.49	0.25	0.73
3	0.13	0.21	0.04
4	0.19	0.30	0.08
未作答	0.01		
通過率	0.49	鑑別度	0.48
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.48，正確答案為選項 2，通過率為 49%，顯示近五成的學生已具備利用旋轉角解題的能力。 2. 有 19% 的學生選擇選項 1(低分組有 22%)，這些學生可能不具備利用旋轉角解題的能力；這些學生也可能誤解題意，找到順時針旋轉 118 度的顏色。 3. 有 13% 的學生選擇選項 3(低分組有 21%)，這些學生可能不具備利用旋轉角解題的能力。 4. 有 19% 的學生選擇選項 4(低分組有 30%)，這些學生可能不具備利用旋轉角解題的能力。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-17 能認識角，並比較角的大小（同 3-s-04）。	4-s-04(同 4-n-16) 能認識「度」的角度單位，使用量角器實測角度或畫出指定的角。	4-s-05 能理解旋轉角（包括平角和周角）的意義。
補救教學建議			
1.為了方便量角度，量角器都有兩組刻度，其中一組是順時針方向，另一組是逆時針方向，因此，部份學生使用量角器測量角度時，常將 70 度報讀為 110 度。當學生尚未掌握直角、銳角及鈍角的意義前，報讀角度時，應要求同時報讀始邊和終邊兩個刻度，養成先將始邊對齊刻度 0，也就是先找 0 度，再看終邊刻度的習慣，並將刻度 0 到刻度 70 間的角度稱為 70 度。當學生掌握鈍角及銳角的意義，知道被測量角度和直角 90 度大小關係後，面對銳角 70 度時，不會將它讀為 110 度。 2.以「下圖中陰影部份為角 C，求角 C 的角度是多少度？」為例，有兩種幫助學生算出角的兩邊不在量角器 0 度刻度的角度的方法。 (1) 透過點數刻度解題： 先找出角兩邊在量角器上內圈(或外圈)所對應的刻度，例如 50 度和 135 度，再由 50 度開始，往角的另一邊開始 10 度及 1 度一數，10、20、30、40、50、60、70、80，81、82、83、84、85，得到該角角度為 85 度的答案。 (2) 透過旋轉角及減法解題： 先找出角兩邊在量角器上內圈(或外圈)所對應的刻度，例如 50 度和 135 度，先說明可以利用減法算式 $50 - 0 = 50$ 算出由刻度 0 度旋轉到刻度 50 度所夾的角是 50 度，$135 - 0 = 135$ 算出由刻度 0 度旋轉到刻度 135 度所夾的角是 135 度，再說明可以利用減法算式 $135 - 50 = 85$ 算出刻度 50 度旋轉到刻度 135 度所夾的角是 85 度。			



題號	18		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-n-01 能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含「億」、「兆」之位名)，並做位值單位的換算。		
試題內容	18.「2 兆」和多少個「2 百萬」合起來一樣大？ ① 10000000 ② 1000000 ③ 10000 ④ 100		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.18	0.30	0.08
2*	0.43	0.24	0.64
3	0.21	0.26	0.13
4	0.17	0.18	0.14
未作答	0.01		
通過率	0.43	鑑別度	0.40
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.40，正確答案為選項 2，通過率為 43%，顯示超過四成的學生已認識大數，並具備位值單位換算的能力。 2.有 18%的學生選擇選項 1(低分組有 30%)，這些學生可能尚未認識大數，或不具備位值單位換算的能力。 3.有 21%的學生選擇選項 3(低分組有 26%)，這些學生可能尚未認識大數，或不具備位值單位換算的能力。 4.有 17%的學生選擇選項 4(低分組有 18%)，這些學生可能尚未認識大數，或不具備位值單位換算的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-01 能認識 10000 以內的數及「千位」之位名，並進行位值單位換算。	4-n-01 能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含「億」、「兆」之位名)，並做位值單位的換算。	7-n-04 能認識負數，並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。

補救教學建議

1. 進行「萬」及「億」單位教學時，必須進行 1 萬到 9999 萬與 1 億的命名。

以「萬」為單位的教學為例，十進位記數法逢十進一，只要學會 1 萬到 9 萬，10個「萬」就換成 1 個「十萬」，「萬」的個數最多只有 9 個；而萬進位記數法逢萬進一，學生必須學會 1 萬到 9999 萬，10000 個「萬」才會換成 1「億」。

日常生活中大數的讀法都是萬進位的讀法，以 23456789 的讀法為例，我們讀作二千三百四十五「萬」六千七百八十九，不會讀做二「千萬」三「百萬」四「十萬」五「萬」六千七百八十九。教師應透過萬進位記數法的定位板或改記成四位一撇的方法，幫助學生熟悉大數的讀法。

2. 大數的命名包含十進位記數法及萬進位記數法：

十進位記數法將「634567891」這個大數字讀做：六「億」三「千萬」四「百萬」五「十萬」六「萬」七「千」八「百」九「十」一。

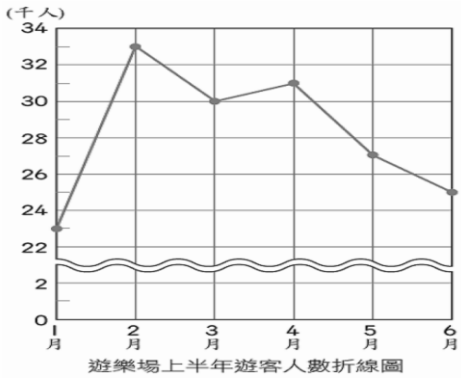
634567891 萬進位記數法先將「634567891」這個大數字由右至左、四位一撇改記成 6,3456,7891 後，讀做：六「億」、三千四百五十六「萬」、七千八百九十一。

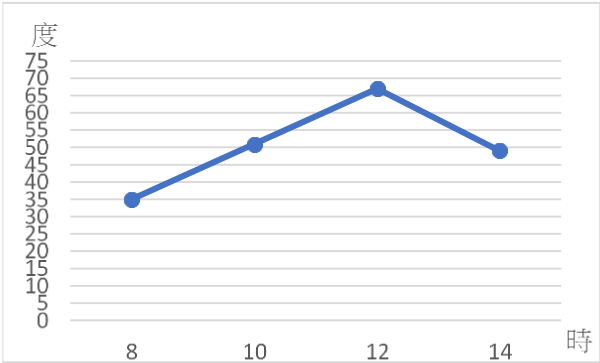
教師應協助學生進行十進位記數法與萬進位記數法的互換。

3. 「5 百萬」、「500 萬」和「5000000」都一樣大，而且讀法都相同，但是這三種記法所表示單位的意義不相同。

「5 百萬」是以「百萬」為單位，指的是 5 個「百萬」合起來的數；「500 萬」是以「萬」為單位，指的是 500 個「萬」合起來的數；5000000 是以「一」為單位，指的是 5000000 個「一」合起來的數。

教師應幫助學生將「個、十、百、千」的關係，類推到「萬、十萬、百萬、千萬」的關係。例如，由 1 個十是 10 個一，類推出 1 個十萬是 10 個萬；由 1 個百是 100 個一、也是 10 個十，類推出 1 個百萬是 100 個萬、也是 10 個十萬；由 1 個千是 1000 個一、也是 100 個十、也是 10 個百，類推出 1 個千萬是 1000個萬、也是 100 個十萬，也是 10 個百萬。

題號	19		
內容領域	統計與機率	認知歷程向度	解題思考
學習內容	4-d-02 能報讀生活中常用的折線圖		
試題內容	19. 下面是遊樂場上半年遊客人數折線圖：  遊樂場上半年遊客人數折線圖 甲說：2 月分的遊客人數最多，有 33000 人 乙說：1 月分的遊客人數最少，有 23000 人 丙說：2 月到 6 月的遊客人數是持續下降 丁說：4 月到 5 月的遊客人數下降最多 請問哪些人的說法正確？ ① 只有甲、乙 ② 只有甲、丙 ③ 只有甲、乙、丁 ④ 只有甲、丙、丁		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.19	0.32	0.07
2	0.06	0.14	0.00
3*	0.64	0.35	0.87
4	0.11	0.18	0.06
未作答	0.01		
通過率	0.64	鑑別度	0.52
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.52，正確答案為選項 3，通過率為 64%，顯示超過六成的學生已具備報讀折線圖的能力。 2.有 19%的學生選擇選項 1(低分組有 32%)，這些學生可能不具備報讀折線圖的能力；這些學生也可能不理解「下降最多」的意思。 3.有 6%的學生選擇選項 2(低分組有 14%)，這些學生可能不具備報讀折線圖的能力，他們可能認為折線圖最左邊和最右邊的點不屬於折線圖報讀的範圍。 4.有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 18%)，這些學生可能不具備報讀折線圖的能力。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-d-01 能報讀生活中常見的表格。	4-d-02 能報讀生活中常用的折線圖。	6-d-02 能整理生活中的有序資料，並繪製成折線圖。
補救教學建議			
1.由於資料的屬性不同，適用的統計圖形也不相同，如果資料項目屬於有序變數，例如時間、成績、身高、體重等，也就是當變數有方向或次序的關係時，數學上經常使用折線圖來溝通。以不同時間太陽高度角測量的折線圖為例，當我們改變有序變數(時間)的位置時，就會失去折線圖原本要傳遞訊息的意義。 一般而言，折線圖是探討資料隨著時間或次序關係增加的變化情形，或用以預測可能的變化趨勢，其橫軸大都是依據時間的先後順序或數字的大小順序排列的，以下圖為例，我們很容易看到由 8 時至 14 時太陽高度角的變化情形。			
			
太陽高度角測量統計圖			
2.本能力指標要求學生必須有報讀折線圖的能力，有足夠的報讀經驗後，才能要求學生解讀。 報讀：看到資料直接讀出數據。 解讀：觀察資料以後，能使用自己的話說出對資料的想法。			

題號	20		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。		
試題內容	20.  上圖的緞帶長是 1 公尺。 請問下圖的緞帶長多少公尺？  ① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $1\frac{2}{7}$ ④ 7		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1*	0.39	0.16	0.68
2	0.10	0.20	0.02
3	0.40	0.44	0.27
4	0.09	0.18	0.02
未作答	0.01		
通過率	0.39	鑑別度	0.52
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.52，正確答案為選項 1，通過率為 39%，顯示近四成的學生已具備連續量情境假分數命名的能力。 2.有 10%的學生選擇選項 2(低分組有 20%)，這些學生可能尚未具備連續量情境假分數命名的能力。 3.有 40%的學生選擇選項 3(低分組有 44%)，這些學生可能尚未具備連續量情境假分數命名的能力；這些學生也可能不知道被分割的單位是 1 公尺，不是 $1\frac{2}{5}$ 公尺，混淆單位分數 $\frac{1}{5}$ 公尺和 $\frac{1}{7}$ 公尺的意義。 4.有 9%的學生選擇選項 4(低分組有 18%)，這些學生可能尚未具備連續量情境假分數命名的能力；也可能誤解題意，或沒有將單位分數看成被計數單位的能力，下圖的緞帶被分割成 7 份，誤認為答案是 7 公尺。			

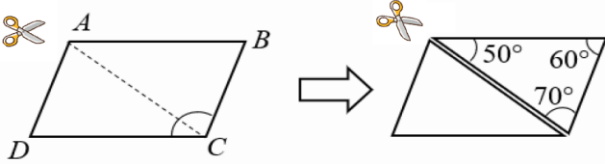
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年 細目	3-n-05 能理解除法的意義，運用 $\div$ 、 $=$ 做橫式紀錄(包括有餘數的情況)，並解決生活中的問題。 4-n-07 能理解分數之「整數相除」的意涵。	4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。
補救教學建議			
1. 「$1=\frac{n}{n}$」是帶分數及假分數互換的先備知識。 學生可以利用加法算式「$1=\frac{7}{7}$，$\frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{4}{7} = \frac{25}{7}$」，或乘法算式「$\frac{7}{7} \times 3 = \frac{21}{7}$，$\frac{21}{7} + \frac{4}{7} = \frac{25}{7}$」，將帶分數 $3\frac{4}{7}$ 換成假分數 $\frac{25}{7}$。 也可以利用減法算式「$\frac{7}{7}=1$，$\frac{25}{7} - \frac{7}{7} - \frac{7}{7} - \frac{7}{7} = \frac{4}{7}$」，或乘法算式「$\frac{7}{7} \times 3 = \frac{21}{7}$，$\frac{25}{7} - \frac{21}{7} = \frac{4}{7}$」，將假分數 $\frac{25}{7}$ 換成假分數 $3\frac{4}{7}$。 2. 以將假分數 $\frac{25}{7}$ 換成帶分數 $3\frac{4}{7}$ 為例，提出兩種解題的方法，說明如何幫助學生利用「$25 \div 7 = 3 \dots 4$」的算法，得到 $\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$。 方法一：以 $\frac{1}{7}$ 為單位，透過減法算式引入除法算式 拿出 1 條黑色積木(長 7 公分)，將黑色積木平分成 7 份，其中的 1 份和 1 個白色積木一樣長，可以用 1 個白色積木代表 $\frac{1}{7}$ 條黑色積木。 $\frac{25}{7}$ 是 25 個 $\frac{1}{7}$，拿出 25 個白色積木代表 25 個 $\frac{1}{7}$，每 7 個白色積木換 1 條黑色積木，先幫助學生用減法算式「$25-7=18$，$18-7=11$，$11-7=4$」，得到可以換 3 條黑色積木，還剩下 4 個白色積木，也就是 $\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$ 的答案。再用除法算式「$25 \div 7 = 3 \dots 4$」，以較有效率的算法得到 $\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$ 的答案。			

方法二：被除數和除數同時換成以 $\frac{1}{7}$ 為單位

「 $25 \div 7 = 3 \dots 4$ 」，算式中的 25 指的是 25 個 $\frac{1}{7}$ ，每次拿走 7 個

$\frac{1}{7}$ 換成 1 後，可以拿走 3 次，還剩下 4 個 $\frac{1}{7}$ ，也就是說，餘數

4 指的是 4 個 $\frac{1}{7}$ ，而不是 4 個 1。

題號	21		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。		
試題內容	21. 如圖，沿著平行四邊形 $ABCD$ 對角線剪開後，變成兩個全等的三角形。  請問平行四邊形 $ABCD$ 中，角 C 的角度是多少度？ ① 70 ② 110 ③ 120 ④ 130		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.35	0.50	0.16
2	0.14	0.18	0.08
3*	0.40	0.18	0.69
4	0.10	0.13	0.06
未作答	0.01		
通過率	0.40	鑑別度	0.51
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.51，正確答案為選項 3，通過率為 40%，顯示有四成的學生已具備利用平面圖形線對稱性質解題的能力。 2. 有 35% 的學生選擇選項 1 (低分組有 50%)，這些學生可能不具備利用平面圖形線對稱性質解題的能力；這些學生也可能不理解題意，誤以為角 C 和 70° 的角是同一個角。 3. 有 14% 的學生選擇選項 2 (低分組有 18%)，這些學生可能不具備利用平面圖形線對稱性質解題的能力，直觀的認為角 C 的角度大約是 110°。 4. 有 10% 的學生選擇選項 4 (低分組有 13%)，這些學生可能不具備利用平面圖形線對稱性質解題的能力，直觀的認為角 C 的角度大約是 130°。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	1-s-04 能依給定圖示，將簡單形體作平面鋪設與立體堆疊。	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。

補救教學建議

1. 將一個圖形平移、旋轉或翻轉後，該圖形的形狀和大小不會改變，討論的是圖形形狀的保留概念；將一個圖形平移、旋轉或翻轉後，會和另一個圖形完全疊合，討論的是兩個圖形的全等關係。學生必須掌握圖形形狀的保留概念，才能透過疊合判斷兩圖形是否全等。

當學生掌握兩圖形全等的意義後，可以開始討論全等關係的對稱性及遞移性。

全等的對稱性：圖形甲和圖形乙全等，圖形乙也會和圖形甲全等。

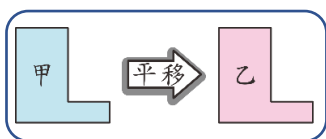
全等的遞移性：若圖形甲和圖形乙全等，圖形乙和圖形丙全等，則圖形甲和圖形丙全等。

2. 甲圖形經過平移、旋轉或翻轉後，和乙圖形完全疊合，稱甲、乙兩個圖形全等。下面以圖一、圖二及圖三為例說明。

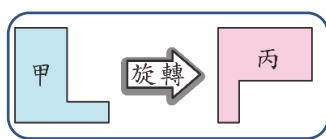
在圖一中，只要將左邊的圖形平移至右邊，就能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等。

在圖二中，必須先將左邊的圖形平移至右邊，再將左邊的圖形順時針旋轉 90 度，或逆時針旋轉 270 度，才能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等。

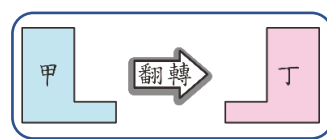
在圖三中，將左邊的圖形平移至右邊，不論如何旋轉，這兩個圖形都無法完全疊合，必須將左邊的圖形翻轉，才能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等。



圖一



圖二



圖三

3. 全等圖形不受顏色干擾，教師應強調「形狀、大小」相同，兩個圖形能完全疊合，釐清學生迷思概念。
4. 教師應透過平移、旋轉或翻轉圖形，幫助學生理解圖形的性質，在全等的操作下不會改變。例如將等腰三角形橫放、直放、斜放或翻轉，兩腰等長或兩底角相等的性質不會改變。
5. 四年級引入全等圖形、五年級引入線對稱圖形、六年級引入放大與縮小圖，這些教材討論的重點都是兩個圖形之間的關係。

全等是最容易溝通的關係，教師應透過操作，幫助學生認識兩圖形間構成要素的對應關係，例如三角形 ABC 和三角形 DEF 全等，將兩圖形疊合後，邊 AB 和邊 DE 重合，稱邊 AB 的對應邊為邊 DE，也稱邊 AB 和邊 DE 互為對應邊； $\angle A$ 和 $\angle D$ 重合，稱 $\angle A$ 的對應角為 $\angle D$ ，也稱 $\angle A$ 和 $\angle D$ 互為對應角；A 點和 D 點重合，稱 A 點的對應點為 D 點，也稱 A 點和 D 點互為對應點，為五年級及六年級學習相關教材鋪路。

題號	22		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	4-n-06 能在具體情境中，對大數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減之估算。		
試題內容	22. 根據網路資料，截至 110 年 8 月 31 日，<u>美國</u>新冠肺炎確診人數為 39198131 人，<u>印度</u>新冠肺炎確診人數為 32810845 人，兩國確診人數相差約多少萬人？(先用四捨五入法取概數到萬位再計算) ① 637 ② 638 ③ 639 ④ 640		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.14	0.02
2	0.25	0.33	0.13
3*	0.43	0.26	0.68
4	0.22	0.26	0.16
未作答	0.02		
通過率	0.43	鑑別度	0.42
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.42，正確答案為選項 3，通過率為 43%，顯示超過四成的學生已具備利用四捨五入法取概數的能力。 2.有 8%的學生選擇選項 1(低分組有 14%)，這些學生可能尚未具備利用四捨五入法取概數的能力。 3.有 25%的學生選擇選項 2(低分組有 33%)，這些學生可能尚未具備利用四捨五入法取概數的能力，他們可能直接利用無條件捨去法或利用無條件進位法進行解題。 4.有 22%的學生選擇選項 4(低分組有 26%)，這些學生可能尚未具備利用四捨五入法取概數的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-10 能做簡單的三位數加減估算。	4-n-06 能在具體情境中，對大數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減之估算。	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。

補救教學建議

1. 估算與取概數都無法精確地描述個數，因而容忍少量的差異，只做大概的描述，但是它們最後描述的單位並不相同。

估算是計算的問題，例如「 $402+299$ 」中的 402 很接近 400，299 很接近 300， $400+300=700$ ，所以「 $402+299$ 」估算的答案是 700，估算的答案必須以「1」為單位來描述。

概算是先進行單位量轉換後再計算的問題，例如「 $402+299$ 」中的 402 很接近 4 個百，299 很接近 3 個百，4 個百加 3 個百是 7 個百，所以「 $402+299$ 」概算的答案是 7 個百，概算的答案不是以「1」為單位來描述。

二年級及三年級的教學重點是估算，四年級才引入取概數及加減概算的問題。

2. 教師應幫助學生在日常生活中自然產生的無條件進位法和無條件捨去法情境中取概數。

無條件進位法取概數的例子：

(1)計程車 1 輛限搭 4 人，14 人搭計程車，最少要搭幾輛計程車？

(2)全縣運動會選手有 5246 人，要為這些選手準備帽子(一人一頂)。如果帽子 10 頂(或 12 頂)裝成一包，最少要準備多少包帽子才夠？也就是多少頂帽子？

無條件捨去法取概數的例子：

(1)300c.c.的果汁裝 1 瓶，5000c.c.的果汁最多能裝滿幾瓶？

(2)玩具工廠今天生產 1249 件相同的玩具，要將這些玩具裝箱放進倉庫。

如果每 100 件(或 80 件)裝成一箱，最多能裝成多少箱？也就是多少件玩具？

3. 日常生活中常見利用無條件進位法或無條件捨去法取概數的問題，但是它們取概數時不一定都是以十、百、千或萬為單位。

不論是否以十、百、千或萬為單位，都可以透過除法算式來解決問題，建議教師透過除法算式，幫助學生理解利用無條件進位法或無條件捨去法取概數的意義。

(1)不是以十為單位取概數的問題「14 人搭計程車，每輛計程車只能坐 4 人，至少要幾輛計程車才夠？」：教師可以透過除法算式「 $14\div 4=3\cdots 2$ 」，幫助學生理解只有 3 輛計程車時，還有 2 人沒車坐，必須要 4 輛計程車才夠。

(2)以百為單位取概數的問題「全市運動會路跑參賽選手有 5246 人，一人戴一頂帽子，要為這些選手準備帽子，如果帽子 100 頂裝成一包，至少要準備多少包帽子才夠？也就是多少頂帽子？」：教師也可以透過除法算式「 $5246\div 100=52\cdots 46$ 」，幫助學生理解只準備 52 包時，還有 46 人沒分到帽子，必須要準備 53 包才夠，也就是 5300 頂帽子。

題號	23		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-n-07 能理解分數之「整數相除」的意涵		
試題內容	23. 一袋米重 5 公斤，將 7 袋米全部平分給 5 戶家庭，請問每戶家庭分到多少米？ ① $\frac{7}{5}$ 袋 ② $\frac{5}{7}$ 袋 ③ $\frac{7}{5}$ 公斤 ④ $\frac{5}{7}$ 公斤		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.24	0.15	0.40
2	0.30	0.34	0.23
3	0.20	0.21	0.21
4	0.23	0.28	0.15
未作答	0.02		
通過率	0.24	鑑別度	0.25
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.25，正確答案為選項 1，通過率為 24%，顯示超過二成的學生已理解分數之「整數相除」的意涵。 2.有 30%的學生選擇選項 2(低分組有 34%)，這些學生可能不理解分數之「整數相除」的意涵，他們可能認為分數一定比 1 小，因此選擇真分數為答案。 3.有 20%的學生選擇選項 3(低分組有 21%)，這些學生可能不理解分數之「整數相除」的意涵；這些學生也可能混淆答案的單位，沒有注意到被平分的是 7 袋米，不是 5 公斤的米。 4.有 23%的學生選擇選項 4(低分組有 28%)，這些學生可能不理解分數之「整數相除」的意涵。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-11 能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。	4-n-07 能理解分數之「整數相除」的意涵。	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

補救教學建議

1. 「整數除以整數，商數是分數，且沒有餘數問題」的題型包含等分除情境、包含除情境和測量情境三類問題。

等分除情境：3 個(或 13 個)蘋果平分給 5 個人，全部分完，每人分到幾個蘋果？

包含除情境：一盒蘋果有 5 個，3 個(或 13 個)蘋果相當於幾盒？

測量情境：一條繩子長 5 公分，3 公分(或 13 公分)相當於幾條？

本題是等分除情境的問題。

2. 以等分除問題「5 公升果汁，平分裝成 3 瓶，全部裝完，每瓶裝幾公升？」為，可以有兩種解題的策略，第一種是回到整數除以整數，商數是整數，餘數是 0 的舊經驗；第二種是回到分數命名的舊經驗(每次拿 1 公升來分)，建議教師 必須引入第二種解題策略，幫助學生擴展分數的意義。

下面分別說明這兩種解題策略。

第一種：回到整數除以整數，商數是整數，餘數是 0 的舊經驗

$$5 \text{ 公升} = \frac{15}{3} \text{ 公升} (15 \text{ 個 } \frac{1}{3}), 15 \div 3 = 5 (5 \text{ 個 } \frac{1}{3} \text{ 公升}),$$

答：每瓶裝 $\frac{5}{3}$ 公升

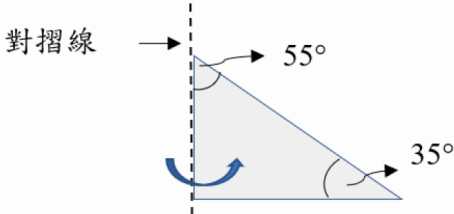
第二種：回到分數命名的舊經驗(每次拿 1 公升來分)

$$1 \div 3 = \frac{1}{3} (1 \text{ 公升果汁平分成 3 份，其中的 1 份是 } \frac{1}{3} \text{ 公升})$$

$$5 \text{ 公升是 5 個 1 公升} \Rightarrow \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3} (\text{公升}), \text{ 答：每瓶裝 } \frac{5}{3} \text{ 公升}$$

當學生有一些解題成功的經驗後，應要求學生用沒有餘數的除法算式「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」

把問題和答案記下來，並說明以後再遇到這個問題時，可以直接利用整數除以整數的算式「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」算出答案。

題號	24		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質		
試題內容	24. 下圖是三角形甲沿著對摺線對摺後所成的圖形。  太毛說：三角形甲是直角三角形 二毛說：三角形甲是鈍角三角形 三毛說：三角形甲是銳角三角形 小毛說：三角形甲是等腰三角形 請問哪些人的說法正確？ ① 只有<u>三毛</u> ② 只有<u>小毛</u> ③ 只有<u>二毛</u>和<u>小毛</u> ④ 只有<u>三毛</u>和<u>小毛</u>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.25	0.29	0.16
2	0.18	0.25	0.11
3*	0.36	0.22	0.56
4	0.19	0.22	0.16
未作答	0.02		
通過率	0.36	鑑別度	0.34
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.34，正確答案為選項 3，通過率為 36%，顯示近四成的學生已具備辨認三角形的能力。 2.有 25%的學生選擇選項 1(低分組有 29%)，這些學生尚未具備辨認三角形的能力；也可能不理解題意，直接回答題目中呈現的三角形為直角三角形。 3.有 18%的學生選擇選項 2(低分組有 25%)，這些學生尚未具備辨認三角形的能力，他們知道三角形甲是等腰三角形，但是忘記三角形甲也是鈍角三角形。 4.有 19%的學生選擇選項 4(低分組有 22%)，這些學生尚未具備辨認三角形的能力。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-01 能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。	4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。
補救教學建議			
1. 有兩種定義正三角形的方法： 第一種：三邊都等長的三角形。 第二種：三邊都等長且三個角都一樣大的三角形。 建議教師在四年級時引入第一種定義，因為只要知道三角形三邊等長，就能確定該三角形為正三角形。 五年級引入正多邊形的定義，例如 n 邊都一樣長，n 個角都一樣大的 n 邊形，稱為正 n 邊形($n \geq 3$)，正三角形成為正多邊形的一種，此時才能引入第二種定義，稱三邊形都等長且三個角都一樣大的三角形為正三角形。 2. 有三種定義直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形的方法： 第一種方法：直角三角形：有一個角是直角、其它二個角是銳角的三角形。 鈍角三角形：有一個角是鈍角、其它二個角是銳角的三角形。 銳角三角形：三個角都是銳角的三角形。 第二種方法：直角三角形：有一個角是直角的三角形。 鈍角三角形：有一個角是鈍角的三角形。 銳角三角形：三個角都是銳角的三角形。 第三種方法：直角三角形：最大角是直角的三角形。 鈍角三角形：最大角是鈍角的三角形。 銳角三角形：最大角是銳角的三角形。 因為五年級才引入三角形內角和為 180° 的性質，學生不知道一個角是直角或鈍角時，其它兩個角一定是銳角，因此本基本學習內容限制使用第一種方法定義直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形。 3. 有兩種定義等腰三角形的方法： 第一種：有兩邊等長的三角形。 第二種：兩邊等長或三邊都等長的三角形。 數學上將正三角形也看成等腰三角形，因此第一種定義中的「有」，指的是「最少有」，學生可能不理解其意義，建議教師引入第二種定義。 教師不宜過度評量正三角形是等腰三角形的問題。			

4. 教師不宜直接宣告有 2 條邊一樣長且有一個角是直角的三角形為等腰直角三角形，學生不易同時掌握「有兩邊等長」及「有一個角為直角」這兩個性質。建議教師透過下列兩種方式幫助學生理解等腰直角三角形的意義。

第一種：由等腰三角形中找出直角三角形

教師可以利用扣條等教具先做出等長的兩條邊，也就是先滿足等腰三角形的條件，再旋轉扣條讓兩邊的夾角是直角，最後圍成一個三角形，稱這個做出來的三角形為等腰直角三角形。

第二種：由直角三角形中找出等腰三角形

教師可以先利用三角板畫出直角，也就是先滿足直角三角形的條件，再利用圓規畫出等長的兩邊，最後再連成一個三角形，稱這個畫出來的三角形為等腰直角三角形。當學生有這兩種方法的學習經驗後，較能夠掌握等腰直角三角形同時具備「有兩邊等長」及「有一個角為直角」這兩個性質的意義。

題號	25		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	4-n-15 能認識長度單位「公里」，及「公里」與其他長度單位的關係，並做相關計算。		
試題內容	25. 請問「3 公里 20 公分」和多少公分一樣長？ (1公里 = 1000公尺，1公尺 = 100公分) ① 300020 ② 30200 ③ 30020 ④ 3200		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.48	0.25	0.75
2	0.13	0.21	0.05
3	0.19	0.24	0.12
4	0.16	0.27	0.05
未作答	0.03		
通過率	0.48	鑑別度	0.51
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.51，正確答案為選項 1，通過率為 48%，顯示近五成的學生已具備將幾公里幾公分化成多少公分的能力。 2.有 13%的學生選擇選項 2(低分組有 21%)，這些學生可能誤認為 1 公里=10000 公分，3 公里=30000 公分， $30000+20=30020$ ，得到 30020 公分的答案。 3.有 19%的學生選擇選項 3(低分組有 24%)，這些學生可能誤認為 1 公里=10000 公分，3 公里=30000 公分，又誤將 20 公分看成 200 公分， $30000+200=30200$ ，得到 30200 公分的答案。 4.有 16%的學生選擇選項 4(低分組有 27%)，這些學生可能誤認為 1 公里=1000 公分，3 公里=3000 公分，又誤將 20 公分看成 200 公分， $3000+200=3200$ ，得到 3200 公分的答案。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-n-15 能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。	4-n-15 能認識長度單位「公里」，及「公里」與其他長度單位的關係，並做相關計算。	6-n-14 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-s-03)

補救教學建議

1. 長度大單位 1 公里的量感不易引入，但可透過下列方式認識 1 公里大約有多長。

(1) 1 公里學生大約走 30 分鐘，成人大約走 15 分鐘。

(2) 操場跑道一圈長 200 公尺，1 公里大約走 5 圈。

2. 教師應檢查學生是否掌握複名數的命名活動。

當學生認識公里及公分單位後，例如認識 3 公里和 20 公分的意義後，就可以透過下列的問話「我們已經認識 3 公里，也認識 20 公分，我們如何稱呼 3 公里和 20 公分合起來的長度？名稱中要看到 3 公里和 20 公分，還要看到 3 公里和 20 公分合起來」，幫助學生將 3 公里和 20 公分合起來的長度稱為 3 公里 20 公分。再透過下列的問話「3 公里和 20 公分中，是否看到 3 公里和 20 公分，是否看到 3 公里和 20 公分合起來」，幫助學生理解 3 公里 20 公分指的是 3 公里和 20 公分合起來的長度。

3. 公制單位

「公制單位」是十進位制的單位，全世界通用，而且方便記憶。國小課本中出現的單位是社會上較常使用的「公制單位」，稱之為「常用單位」。

在測量長度、重量、容量、...時，公制單位都先選擇一個基準單位，並使用一組形容詞來描述各單位與基準單位間的十進關係。以「長度」單位為例，公制單位選擇「米」當做長度的基本單位，然後在米前面加上「十、百、千、...、百萬、...、十億、...」等形容詞表示這些單位與米的「十倍、百倍、千倍、...百萬倍、...、十億倍、...」的關係，例如千米表示和 1000 個 1 米接來一樣長。在米前面加上「分、厘、毫、...、微、...奈、...」等形容詞表示這些單位與米的「十分之一倍、百分之一倍、千分之一倍、百萬分之一倍、...、十億分之一倍、...」的關係，例如：厘米表示百分之一米，毫米表示千分之一米，微米表示百萬分之一米，奈米表示十億分之一米。

相同的，公制單位選擇了「公升」當做「容量」的基準單位，分公升表示十分之一公升，毫公升表示千分之一公升，微公升表示百萬分之一公升，有時也將分公升、毫公升等簡稱為分升、毫升。因此，當我們知道不同單位的基準單位之後，只要記憶一組形容詞，就能夠掌握單位間的倍數關係，對解決單位間的化聚有很大的幫助。

下面提供長度及容量不同單位對應的表格，第三行的描述方式和第二行英文公制單位的描述方式一致。

長度單位	公里	公引	公丈	公尺	公寸	公分	公釐
	Km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	千米	百米	十米	米	分米	厘米	毫米

容量單位	公秉	公石	公斗	公升	公合	公勺	公撮
	Kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
	千公米	百公升	十公升	公升	分公升	厘公升	毫公升

97 年頒布九年一貫課程綱要，數學學習領域附錄三的度量衡列表中，出現的單位並不完全是公制單位的記法，例如長度單位出現公里、公尺、公分與毫米；容量單位出現公升及毫公升，重量單位出現公噸、公斤及公克。

4.常用單位

以長度的單位為例，我國每十倍就有一個單位的名稱，例如公里、公引、公丈、公尺、公寸、公分、公厘都是長度的單位；公制單位每十倍也有一個單位的名稱，例如 km(千米)、hm(百米)、dam(十米)、m(米)、dm(分米)、cm(厘米)、mm(毫米)等都是長度的單位，但是日常生活中，並不需要用到這麼多的單位。

以公制長度的基本單位「米」為例，西方人認為 1000 以內的數量都是可以掌握的，因此 13 個「1 米」稱為 13 米即可，並不需要引入新的單位「十米」，將 13 米稱為 1「十米」3「米」；278 個「1 米」稱為 278 米即可，並不需要引入新的單位「百米」和「十米」，將 278 米稱為 2「百米」7「十米」8「米」。當「1 米」的個數超過 1000 個時，才需要引入新的單位「千米」，並將 2465 個「1 米」稱為 2「千米」465「米」。

公制單位是西方人發明的，延伸西方人三位一撇的概念，在長度單位中，經常使用的單位是「千米」、「米」、「毫米」、「微米」、「奈米」，其中「千米」是「米」的 1000 倍，「米」是「毫米」的 1000 倍、「毫米」是「微米」的 1000 倍、「微米」是「奈米」的 1000 倍，也就是說，經常使用的單位間都滿足 1000 倍的關係。

轉換成課本中出現的單位，課本中出現的長度單位是「公里」、「公尺」、「公分」、「毫米」，重量單位是「公噸」、「公斤」、「公克」，容量單位是「公秉」、「公升」、「毫升」，如果將公分拿走，相鄰兩個單位間都是 1000 倍的關係。

換句話說，只要能掌握三位一撇的概念，再記憶 1 公尺=100 公分、1 公分=10 毫米的倍數關係，就可以掌握國小階段長度、重量和容量不同單位間的倍數關係。

五年級試題選項分析與教學建議

題號	1		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算		
試題內容	1. 算算看， $302 \times 570 = ?$ ① 17214 ② 36240 ③ 171114 ④ 172140		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.07	0.12	0.03
2	0.07	0.12	0.04
3	0.03	0.06	0.01
4*	0.83	0.71	0.92
未作答	0.00		
通過率	0.83	鑑別度	0.22
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.22，正確答案為選項 4，通過率為 83%，顯示超過八成的學生已具備大數乘法直式計算的能力。 2.有 7%的學生選擇選項 1(低分組有 12%)，這些學生可能不具備大數乘法直式計算的能力，為了簡化計算，直接以 302×57 來計算，最後忘了再加一個 0。 3.有 7%的學生選擇選項 2(低分組有 12%)，這些學生可能尚未具備大數乘法直式計算的能力。 4.有 3%的學生選擇選項 3(低分組有 6%)，這些學生可能尚未具備大數乘法直式計算的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。

補救教學建議

1. 多位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為多位數乘法直式計算的基礎，也是除數為多位數除法直式計算的基礎。

以 345×678 為例，直式進行了 3 次 345 乘以一位數 6、7、8 的計算。

再以 $4613 \div 172$ 為例，學生估商時進行了 2 次 172 乘以一位數的計算。

教師應要求學生在三年級熟練二位及三位數乘以一位數的乘法直式計算，並將計算的結果記成一行。

2. 以「 457×38 」為例，有三種分解被乘數或乘數的方法。

第一種是將「 457×38 」分解成「 $457 \times (30 + 8)$ 」

第二種是將「 457×38 」分解成「 $(400 + 50 + 7) \times 38$ 」

第三種是將「 457×38 」分解成「 $(400 + 50 + 7) \times (30 + 8)$ 」

建議教師透過第一種方法幫助學生學習乘法直式計算。

3. 以「 457×38 」為例，說明如何幫助學生解題。

步驟一：檢查學生是否已熟練三位乘以一位的乘法直式計算，並能將計算的結果記成一行。

步驟二：幫助學生認識下表中左右兩組算式的關係。

左、右兩組算式的被乘數都相同。右邊算式的乘數都是左邊算式乘數的 10 倍，右邊算式的積也是左邊算式積的 10 倍。

左、右兩組算式的被乘數都相同。右邊算式的乘數都比左邊算式的乘數多 1 個 0，右邊算式的積也比左邊算式的積多 1 個 0。

$7 \times 8 =$	56	$7 \times 80 =$	560
$8 \times 5 =$	40	$8 \times 50 =$	400
$13 \times 4 =$	52	$13 \times 40 =$	520
$35 \times 4 =$	140	$35 \times 40 =$	1400
$457 \times 3 =$	1371	$457 \times 30 =$	13710
$325 \times 4 =$	1300	$325 \times 40 =$	13000

步驟三：先算出 $457 \times 8 = 3656$ ， $457 \times 30 = 13710$ ，再記成下面的直式

	10000	1000	100	⑩	①	
			4	5	7	⇒ 4 個「百」5 個「十」7 個「一」
×				3	8	⇒ $30 + 8$
		3	6	5	6	⇒ 457 的 8 倍是 3656
+ 1	3	7	1	0		⇒ 457 的 30 倍是 13710
1	7	3	6	6		⇒ 合起來是 17366

步驟四：由上面直式的個位「 $6+0=6$ 」中，可以知道 13710 的 0 省略不記時，個位數字的和還是 6。

因為 $457 \times 3 = 1371$ ， $457 \times 30 = 13710$ ，因此只要算出 $457 \times 3 = 1371$ ，並將 1371 右邊的 1 記在十位，就可以算出積是 17366。

步驟五：先算出 $457 \times 8 = 3656$ ， $457 \times 3 = 1371$ ，再記成下面的直式

10000	1000	100	⑩	①	
		4	5	7	⇒ 4 個「百」，5 個「十」，7 個「一」
×			3	8	⇒ $30+8$
	3	6	5	6	⇒ 457 的 8 倍是 3656
+ 1	3	7	1		⇒ $457 \times 30 = 13710$ ， $457 \times 3 = 1371$ ，省略 13710 的「0」
1	7	3	6	6	⇒ 合起來是 17366

(4)以「 $24000 \times 300 = ()$ 」為例，說明如何幫助學生解題。

步驟一：透過列出乘數都是 3 的算式 $24 \times 3 = 72$ 和 $24000 \times 3 = 72000$ ，幫助學生認識

「被乘數 24000 比被乘數 24 後面多 3 個 0」、「 24000×3 的積比 24×3 的積後面也多 3 個 0」。

步驟二：透過列出被乘數都是 24 的算式 $24 \times 3 = 72$ 和 $24 \times 300 = 7200$ ，幫助學生認識「乘數 300 比乘數 3 後面多 2 個 0」、「 24×300 的積比 24×3 的積後面也多 2 個 0」。

步驟三：透過列出 $24 \times 3 = 72$ 和 $24000 \times 300 = 7200000$ ，幫助學生認識「被乘數 24000 比被乘數 24 後面多 3 個 0、乘數 300 比乘數 3 後面多 2 個 0」，「 24000×300 的積比 24×3 的積後面多 $(3+2)$ 個 0，也就是多 5 個 0」。

題號	2		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。		
試題內容	2. 下面是 $38 \div 7$ 的直式計算。 $ \begin{array}{r} 5.42 \\ 7 \overline{)38} \\ \underline{35} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 6 \end{array} $ 已知 $38 \div 7$ 的商是 5.42，請問餘數是多少？ ① 6 ② 0.6 ③ 0.06 ④ 0.006		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.33	0.52	0.12
2	0.05	0.09	0.01
3*	0.58	0.33	0.85
4	0.04	0.06	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.58	鑑別度	0.52
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.52，正確答案為選項 3，通過率為 58%，顯示近六成的學生已具備整數除以整數、商為二位小數直式計算的能力。 2. 有 33% 的學生選擇選項 1 (低分組有 52%)，這些學生可能不具備整數除以整數、商為二位小數直式計算的能力，他們不理解餘數位值的意義，選擇直式計算中的餘 6 為答案。 3. 有 5% 的學生選擇選項 2 (低分組有 9%)，這些學生可能不具備整數除以整數、商為二位小數直式計算的能力，在求餘數位值時發生錯誤。 4. 有 4% 的學生選擇選項 4 (低分組有 6%)，這些學生可能不具備整數除以整數、商為二位小數直式計算的能力，在求餘數位值時發生錯誤。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。
補救教學建議			
1. 本學習指標為 5-n-01 之後續學習概念，故學生應該已經能熟練整數除法的直式計算。而本學習指標則將被除數及商數的範圍由整數延伸至小數。 2. 教師可以先布小數除以整數，商數是小數且有餘數的問題，例如：「$17.5 \div 4$」。再布整數除以整數，商數是小數且有餘數的等分除問題，例如：「$17 \div 4$」。「$17.5 \div 4$」的被除數是一位小數，學生較容易類比整數除法直式計算，將整數位的餘數 1 轉換成 10 個 0.1，再加上原有的 0.5 後繼續運算。而「$17 \div 4$」的被除數是整數，學生不易自行加上小數點，再將整數位的餘數 1 轉換成 10 個 0.1。 3. 以「將 231.8 公升果汁，平分裝成 14 瓶，每瓶最多可以裝幾公升，剩下幾公升？(商數算到小數第一位)」為例，說明如何幫助學生解小數除以整數除法直式計算。 步驟一：將 231.8 分解為 2 個「100」、3 個「10」、1 個「1」和 8 個「0.1」。 步驟二：先分 2 個「100」，2 個「100」平分成 14 份不夠分；將 2 個「100」換成 20 個「10」，加上原有的 3 個「10」，合起來是 23 個「10」。23 個「10」平分成 14 份，每份是 1 個「10」。 步驟三：還剩下 9 個「10」不夠分，9 個「10」再換成 90 個「1」，加上原有的 1 個「1」，合起來是 91 個「1」。 步驟四：91 個「1」平分成 14 份，每份是 6 個「1」，分掉 84 個「1」。 步驟五：還剩下 7 個「1」不夠分，7 個「1」換成 70 個「0.1」，加上原有的 8 個「0.1」，合起來是 78 個「0.1」。 步驟六：78 個「0.1」平分成 14 份，每份是 5 個「0.1」，分掉 70 個「0.1」。 步驟七：剩下 8 個「0.1」。 步驟八：每瓶分到 1 個「10」、6 個「1」和 5 個「0.1」，剩下 8 個「0.1」，也就是每瓶分到 16.5 公升，剩下 0.8 公升。			

上述的解題活動，可以使用下列直式來記錄：

				1 6. 5	⇒ 步驟八
1 4	)	2 3 1. 8			⇒ 步驟一
		1 4			⇒ 步驟二
		9 1			⇒ 步驟三
		8 4			⇒ 步驟四
		7 8			⇒ 步驟五
		7 0			⇒ 步驟六
		8			⇒ 步驟七

4. 最簡分數的分母是 $2^m \times 5^n$ 的樣式，其中 m 、 n 都是非負整數，才能轉換成有限小數。

例如： $\frac{3}{8}$ 的分母是 $2^3 \times 5^0$ ，可以透過下列算式將 $\frac{3}{8}$ 改記成有限小數。

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{8 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{10 \times 10 \times 10} = \frac{375}{1000} = 0.375。$$

題號	3		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。		
試題內容	3. 算算看， $12 + 18 \div 6 \times 3 - 1 = ?$ ① 20 ② 14 ③ 12 ④ 10		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.61	0.32	0.88
2	0.26	0.45	0.08
3	0.11	0.19	0.04
4	0.02	0.04	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.61	鑑別度	0.56
試題品質分析			
1.本題鑑別度為0.56，正確答案為選項1，通過率為61%，顯示超過六成的學生已具備整數四則混合計算的能力。 2.有25%的學生選擇選項2(低分組有45%)，這些學生可能不具備整數四則混合計算的能力；也可能只知道「由左往右」的運算次序約定，學生可能的計算過程如下： $ \begin{aligned} &12 + 18 \div 6 \times 3 - 1 \\ &= 30 \div 6 \times 3 - 1 \\ &= 5 \times 3 - 1 \\ &= 15 - 1 \\ &= 14 \end{aligned} $ 3.有11%的學生選擇選項3(低分組有19%)，這些學生可能不具備整數四則混合計算的能力；也可能知道「由左往右」和「先乘除後加減」的運算次序約定，但誤以為「先乘除」的意思是「先乘、再除」，學生可能的計算過程如下： $ \begin{aligned} &12 + 18 \div 6 \times 3 - 1 \\ &= 12 + 18 \div 18 - 1 \\ &= 12 + 1 - 1 \\ &= 12 + 0 \\ &= 12 \end{aligned} $ 4.有2%的學生選擇選項4(低分組有4%)，這些學生可能不具備整數四則混合計算的能力，先處理加減的計算，再處理乘除的計算。學生可能的計算過程如下：			

$$\begin{aligned}
 &12+18\div6\times3-1 \\
 &=30\div6\times3-1 \\
 &=30\div6\times2 \\
 &=5\times2 \\
 &=10
 \end{aligned}$$

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-05 能做整數四則混合計算(兩步驟)。	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。 6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

補救教學建議

- 1.本學習指標為1-a-01、1-a-02、2-a-03、4-a-01及5-a-01之後續學習概念的統整，故學生應該已經能在具體情境中，認識加法交換律、加法結合律、乘法交換律、乘法結合律、乘法對加(減)法的分配律。而本指標旨在幫助學生熟練運用四則運算的性質，簡化整數四則混合計算。
- 2.有關數的運算性質指的是：加法交換律：「 $a+b=b+a$ 」；加法結合律：「 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 」乘法交換律：「 $a\times b=b\times a$ 」；乘法結合律：「 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ 」乘法對加法的分配律：「 $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$ (右分配)； $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ (左分配)」。
- 3.四年級兩步驟計算問題中，只會用到①括號先算、②先乘除後加減、③由左往右算，這三個約定其中的一個約定。建議教師將兩步驟計算問題分成有括號和沒有括號兩類，來幫助學生解題。
 第一類：有括號的兩步驟計算問題
 括號的部份要先算，簡稱為括號先算。
 第二類：沒有括號的兩步驟計算問題
 (1)算式中加、減，乘、除都有時，要先算乘、除的部份。
 簡稱為先乘除後加減。
 (2)算式中都是乘、除時，要由左往右算；算式中都是加、減時，也要由左往右算。簡稱為由左往右算。
- 4.五年級引入三步驟計算問題，學生只要知道第一步要算什麼，三步驟計算問題，就能簡化成二步驟計算問題。四年級將兩步驟計算問題分成有括號和沒有括號兩類，來幫助學生解題的約定，也能適用於三步驟問題及更多步驟的問題。
 第一類：有括號的三步驟計算問題
 括號的部份要先算，簡稱為括號先算。

第二類：沒有括號的三步驟計算問題

(1)算式中加、減，乘、除都有時，要先算乘、除的部份。簡稱為先乘除後加減。

(2)算式中都是乘、除時，要由左往右算；算式中都是加、減時，也要由左往右算。簡稱為由左往右算。

題號	4		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。		
試題內容	4. 今天汽油每公升的售價是 30.8 元，爸爸共加了 32.5 公升的汽油，請問爸爸要付多少元？ ① 1001 ② 1235 ③ 10010 ④ 12350		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.55	0.29	0.81
2	0.07	0.14	0.02
3	0.34	0.47	0.17
4	0.04	0.10	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.55	鑑別度	0.52
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.52，正確答案為選項 1，通過率為 55%，顯示五成五的學生已具備小數乘法直式計算的能力。 2.有 7%的學生選擇選項 2(低分組有 14%)，這些學生可能不具備小數乘法直式計算的能力；也可能在進行整數乘法時計算發生錯誤。 3.有 34%的學生選擇選項 3(低分組有 47%)，這些學生可能不具備小數乘法直式計算的能力，在小數點移位時發生錯誤。 4.有 4%的學生選擇選項 4(低分組有 10%)，這些學生可能不具備小數乘法直式計算的能力；也可能在進行整數乘法時計算及小數點移位都發生錯誤。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。 5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。

補救教學建議

1. 以二位小數乘以一位小數「 2.38×6.7 」為例，說明如何幫助學生理解小數乘以小數乘法直式計算的意義。

步驟一：複習整數乘以整數的乘法直式計算

學生能算出「 $238 \times 67 = 15946$ 」。

步驟二：複習分數乘以分數的分數乘法計算

學生能算出 $\frac{238}{100} \times \frac{67}{10} = \frac{238 \times 67}{100 \times 10} = \frac{15946}{1000}$ 。

步驟三：幫助學生看到整數除以 10、100、1000、10000 等數時，被除數和商小數點位置移位的關係。

因為 15946 中沒有小數點，教師應先說明小數點可以告訴我們個位數字在哪裡，將「15946」改記成「15946.」後，再說明小數點移位的關係。

$15946 \div 10 = 1594.6$ ，（除以 10，小數點向左移一位）

$15946 \div 100 = 159.46$ ，（除以 100，小數點向左移二位）

$15946 \div 1000 = 15.946$ ，（除以 1000，小數點向左移三位）

$15946 \div 10000 = 1.5946$ ，（除以 10000，小數點向左移四位）

步驟四：透過比對小數乘以小數乘法直式算式和改記成分數乘以分數逐次減項的算式，幫助學生理解小數乘以小數乘法直式計算的意義。

2.38×6.7

$= \frac{238}{100} \times \frac{67}{10}$ （將小數 $\times$ 小數，改記成分數 $\times$ 分數）

$= \frac{238 \times 67}{100 \times 10}$ （分數乘法算則：分子乘以分子、分母乘以分母）

$= \frac{15946}{1000}$

$= 15946 \div 1000$

$= 15946 \div 1000$ （在個位右邊加上小數點）

$= 15.946$ （小數點往左移 3 位）

步驟五：將步驟四的解題活動改記成直式

列出直式		算出 238×67 的乘		小數點往左移 3 位
$\begin{array}{r} 2.38 \\ \times 6.7 \\ \hline \end{array}$	$\Rightarrow$	$\begin{array}{r} 238 \\ \times 67 \\ \hline 1666 \\ 1428 \\ \hline 15946 \end{array}$	$\Rightarrow$	$\begin{array}{r} 2.38 \\ \times 6.7 \\ \hline 1666 \\ 1428 \\ \hline 15.946 \end{array}$

2. 當學生掌握小數乘以小數乘法直式算則解題的意義後，教師應幫助學生理解小數乘法中，積的小數位數＝被乘數的小數位數＋乘數的小數位數。

以「 $4.3 \times 1.5 = ?$ 」為例，「4.3」是一位小數，「1.5」也是一位小數，在計算一位小數乘以一位小數時，先算出「 $43 \times 15 = 645.$ 」，再將乘積的小數點向左移 $(1+1)$ 位，也就是移2位，就能得到「 $4.3 \times 1.5 = 6.45$ 」。

再以「 $2.38 \times 1.6 = ?$ 」為例，「2.38」是二位小數，「1.6」是一位小數，計算二位小數乘以一位小數時，先算出「 $238 \times 16 = 3808.$ 」，再將乘積的小數點向左移 $(2+1)$ 位，也就是移3位，就能得到「 $2.38 \times 1.6 = 3.808$ 」。

題號	5		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。		
試題內容	5.「哈密瓜每公斤售價都一樣，爺爺買了 2 顆哈密瓜，一顆重 10 公斤，另一顆重 5 公斤。爺爺付 1000 元，找回 550 元，哈密瓜 1 公斤賣多少元？」 下列哪個算式可以算出正確答案？ ① $1000 - 550 \div 10 + 5$ ② $1000 - 550 \div (10 + 5)$ ③ $(1000 - 550) \div 10 + 5$ ④ $(1000 - 550) \div (10 + 5)$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.10	0.00
2	0.21	0.33	0.08
3	0.12	0.23	0.02
4*	0.62	0.34	0.90
未作答	0.00		
通過率	0.62	鑑別度	0.56
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.56，正確答案為選項 4，通過率為 62%，顯示超過六成的學生已具備三步驟問題列式的能力。 2.有 4%的學生選擇選項 1(低分組有 10%)，這些學生可能不具備三步驟問題列式的能力，沒有注意「括號先算」、「先乘除後加減」運算次序的約定，沒有將先減的兩數、相加的兩數分別加上括號。 3.有 21%的學生選擇選項 2(低分組有 33%)，這些學生可能不具備三步驟問題列式的能力，沒有注意「括號先算」運算次序的約定，沒有將先減的兩數加上括號。 4.有 12%的學生選擇選項 3(低分組有 23%)，這些學生可能不具備三步驟問題列式的能力，沒有注意「先乘除後加減」運算次序的約定，沒有將相加的兩數加上括號。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。
補救教學建議			

1.本指標首次引入三步驟問題，三步驟問題的教學順序如下：

(1)能在具體情境中，解決三步驟問題。

(2)能用一個併式，記錄三步驟問題的解題活動，並認識「括號先算」、「先乘除後加減」及「由左往右算」運算次序的約定。

(3)能先列式，再用逐次減項的記法記錄三步驟問題的解題過程。

2.下面以「小洋以「小洋原本有100元，買了2個25元的麵包後，爸爸又給他48元，請問小洋現在有多少元？」為例，說明三步驟問題的教學流程。

(1)用一個併式及一個算式記錄解題活動

$$100 - 25 \times 2 = 50, 50 + 48 = 98, \text{答：現在有 } 98 \text{ 元}$$

(2)將一個併式及一個算式改記成併式的記法

$$\text{將「} 100 - 25 \times 2 = 50, 50 + 48 = 98 \text{」改記成「} 100 - 25 \times 2 + 48 = 98 \text{」}$$

(3)用併式記錄解題活動

$$100 - 25 \times 2 + 48 = 98, \text{答：現在有 } 98 \text{ 元}$$

(4)用算式填充題來列式

$$100 - 25 \times 2 + 48 = (\quad)$$

(5)先列式，再用逐次減項的記法記錄解題活動

$$100 - 25 \times 2 + 48 = (\quad)$$

$$100 - 25 \times 2 + 48$$

$$= 100 - 50 + 48$$

$$= 50 + 48$$

$$= 98, \text{答：現在有 } 98 \text{ 元}$$

3.以逐次減項的記法「 $5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10 = 100 - 10 = 90$ 」為例，逐次減項是以下解題過程的摘要記法：

$$5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10,$$

$$5 \times 20 - 10 = 100 - 10, 100 - 10 = 90$$

$$\text{因為等號滿足遞移性}(A=B, B=C, C=D, \text{所以 } A=D), \text{所以 } 5 \times (12 + 8) - 10 = 90$$

逐次減項記法中除了把重複出現的算式「 $5 \times 20 - 10$ 」和「 $100 - 10$ 」只記一次之外，還把解題過程最重要的部份「因為等號滿足遞移性，所以 $5 \times (12 + 8) - 10 = 90$ 」也省略了。教師可以透過詢問為什麼「 $5 \times (12 + 8) - 10$ 」的答案是90，檢查學生是否掌握利用等號遞移性記錄的意義。

4.學生面對沒有見過的多步驟問題時，只能用多個算式來記錄解題活動，學生解題成功後，教師應要求學生將多個算式改記成併式。以後再遇到相同的問題時，應要求學生先用併式來列式，再利用逐次減項的記法記錄解題活動。儘量要求學生以併式的方法思考與演算，這是代數列式的前置經驗。

題號	6		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數		
試題內容	6. 已經知道 12 是 4 和 6 的公倍數， 請問下面哪個數也是 4 和 6 的公倍數？ ① 16 ② 18 ③ 28 ④ 48		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.03	0.07	0.00
2	0.04	0.09	0.00
3	0.03	0.07	0.00
4*	0.91	0.76	0.99
未作答	0.00		
通過率	0.91	鑑別度	0.23
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.23，正確答案為選項 4，通過率為 91%，顯示超過九成的學生已理解公倍數的意義，並具備利用「某兩數的公倍數是兩數最小公倍數的倍數」性質解題的能力。 2.有 3%的學生選擇選項 1(低分組有 7%)，這些學生可能不理解公倍數的意義，也不具備利用「某兩數的公倍數是兩數最小公倍數的倍數」性質解題的能力。 3.有 4%的學生選擇選項 2(低分組有 9%)，這些學生可能不理解公倍數的意義，也不具備利用「某兩數的公倍數是兩數最小公倍數的倍數」性質解題的能力。 4.有 3%的學生選擇選項 3(低分組有 7%)，這些學生可能不理解公倍數的意義，也不具備利用「某兩數的公倍數是兩數最小公倍數的倍數」性質解題的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-04 能理解因數和倍數。	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解。 (質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100)。

補救教學建議

1. 以「求 60 的因數和倍數」為例，五年級的教學重點是看著數字 60 找出 60 的因數及倍數，六年級的教學重點是看著 60 質因數分解的算式 $2 \times 2 \times 3 \times 5$ 找出 60 的因數及倍數。本基本學習內容限制五年級只能透過嘗試錯誤的方式，尋找兩數的公因數和最大公因數，以及公倍數和最小公倍數。

教師不宜引入短除法求最大公因數及最小公倍數的方法，利用短除法求最大公因數及最小公倍數是六年級的教學重點。

2. 教師應幫助學生區分「倍數」與「幾倍」的意義。

學生可能混淆「倍數」與「幾倍」的意義，誤認為 2 是 0.1 的倍數。

正確的說法是：2 不是 0.1 的倍數，但 2 是 0.1 的 20 倍。

- (1) 倍數的意義：

數學上只在整數的情境討論因數與倍數，因此，不論透過乘法 $b = a \times q$ 或除法 $b \div a = q \dots 0$ ，判斷 a 是否為 b 的因數時， a 、 b 和 q 都必須是整數。0.1 不是整數，因此 0.1 不是 2 的因數，2 也不是 0.1 的倍數。

- (2) 幾倍的意義：

a 是 b 的 $\frac{a}{b}$ 倍，指的是將 b 視為基準量 1 時，比較量 a 是 $\frac{a}{b}$ 。

將 0.1 視為基準量 1，比較量 2 是 20 個 0.1，因此 2 是 0.1 的 20 倍。

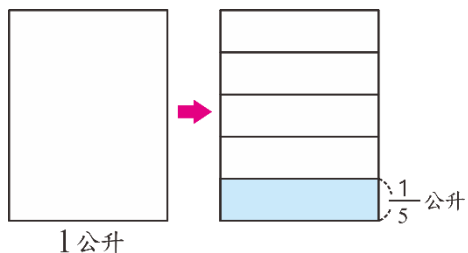
- (3) 以求 8 和 12 的公倍數為例，教師可以先求出 12 部份的倍數 12、24、36、48、60、72、84、96 等，再判斷這些數是否為 8 的倍數，例如 24、48、72、96 也是 8 的倍數，所以 24、48、72、96 是 8 和 12 的公倍數，幫助學生簡化求公倍數的解題過程。

- (4) 以求「8 和 12 的公倍數」為例，當學生求出 24、48、72、96 等是 8 和 12 的公倍數，24 是 8 和 12 的最小公倍數後，教師應幫助學生認識公倍數 24、48、72、96 等都是最小公倍數 24 的倍數，為六年級利用短除法解公倍數的文字題鋪路。六年級利用短除法解題時，只能求出最小公倍數，無法求出其它的公倍數。

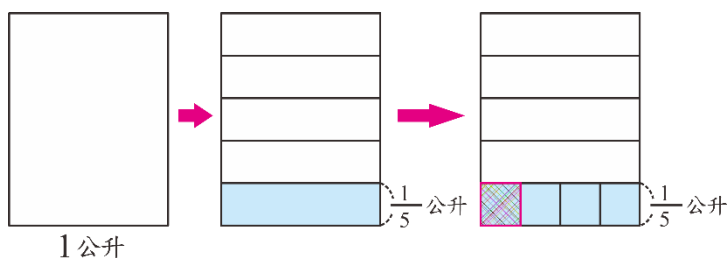
題號	7		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題		
試題內容	7. 將長 $6\frac{9}{12}$ 公尺的彩帶平分成 3 段，其中 1 段長多少公尺？ ① $6\frac{3}{4}$ ② $2\frac{3}{4}$ ③ $2\frac{9}{12}$ ④ $2\frac{3}{12}$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.22	0.02
2	0.24	0.36	0.09
3	0.06	0.13	0.01
4*	0.58	0.29	0.87
未作答	0.00		
通過率	0.58	鑑別度	0.58
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項 4，通過率為 58%，顯示近六成的學生已具備利用帶分數除以整數計算解題的能力。 2.有 12%的學生選擇選項 1(低分組有 22%)，這些學生可能尚未具備利用帶分數除以整數計算解題的能力，將被除數的分母分子同除以除數。如下所示： $6\frac{9}{12} \div 3 = 6\frac{9 \div 3}{12 \div 3} = 6\frac{3}{4}。$ 3.有 24%的學生選擇選項 2(低分組有 36%)，這些學生可能尚未具備利用帶分數除以整數計算解題的能力，將被除數的整數、分母和分子同除以除數。如下所示： $6\frac{9}{12} \div 3 = (6 \div 3) \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = 2\frac{3}{4}。$ 4.有 6%的學生選擇選項 3(低分組有 13%)，這些學生能尚未具備利用帶分數除以整數計算解題的能力，將被除數的整數除以除數。如下所示： $6\frac{9}{12} \div 3 = (6 \div 3) \frac{9}{12} = 2\frac{9}{12}。$			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-07 理解分數之「整數相除」的意涵。	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。
補救教學建議			
1.四年級(4-n-07)分數除法教學重點是整數除以整數，商是分數的等分除及包含除問題；五年級(5-n-09)分數除法教學重點是分數除以整數，商是分數的等分除問題；六年級(6-n-04)才引入除數是分數。 2.教師應先引入被除數的分子是除數整數倍的問題(見問題 1)，再引入被除數的分子不是除數整數倍的問題(見問題 2)。 問題 1：「將$\frac{12}{5}$ 公升漂白水全部平分成 4 杯，其中的一杯是幾公升？」 問題 2：「將$\frac{3}{5}$ 公升漂白水全部平分成 4 杯，其中的一杯是幾公升？」 問題 1 中的$\frac{1}{5}$ 公升並沒有被分割，將問題 1 中的$\frac{12}{5}$ 公升解讀為 12 個$\frac{1}{5}$ 公升，就能利用整數除法 $12 \div 4 = 3$，算出$\frac{12}{5}$ 公升漂白水全部平分成 4 杯，其中的一杯是$\frac{3}{5}$ 公升。而問題 2 中的$\frac{1}{5}$ 公升被分割成 4 等份。 3.以「將$\frac{1}{5}$公升漂白水全部平分成 4 杯，其中的一杯是幾公升？」為例，說明如何幫助學生解題。 教師<u>不宜</u>先畫出一個長方形代表$\frac{1}{5}$公升，再將長方形平分成 4 份，透過算式「$\frac{1}{5} \div 4 = \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{20}$(公升)」說明其中的 1 份是$\frac{1}{20}$公升，因為在圖中看不到$\frac{1}{20}$公升。 教師應先強調題目最後問的單位是什麼，題目最後問的單位是「公升」，因此先畫出一個長方形代表 1 公升，再將 1 公升平分成 5 大份，得到其中的 1 大份			

是 $\frac{1}{5}$ 公升。

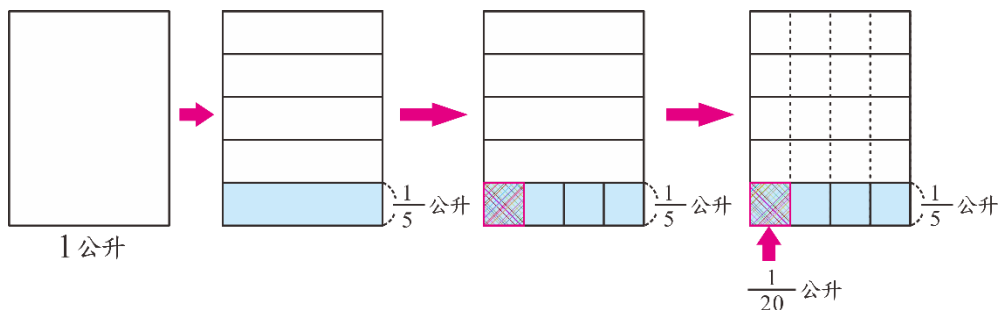


再將 $\frac{1}{5}$ 公升平分成 4 小份。



因為看不到 1 小份和 1 公升的關係，因此將平分成 4 小份的線延長，就能看到 1 公升被分割成 20(5×4)小份，並透過算式

「 $\frac{1}{5} \div 4 = \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{20}$ (公升)」，說明其中的 1 小份是 $\frac{1}{20}$ 公升。



4. 以「 $\frac{5}{8}$ 公升果汁，平分裝成 3 瓶，全部裝完，每瓶裝多少公升？」為例，說明如何幫助學生解題。有兩種幫助學生解題的方法，第一種是利用整數除以整數，等分除問題的舊經驗幫助解題；第二種是利用連續量情境單位分數再分割的概念幫助學生解題。

方法一：整數除法

步驟一：將 $\frac{5}{8}$ 公升分割成可以平分成 3 瓶的情境。

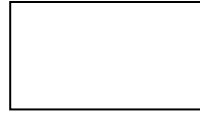
$$\frac{5}{8} \text{ 公升} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24} \text{ 公升。}$$

步驟二： $15 \div 3 = 5$ (5 個 $\frac{1}{24}$ 公升)，5 個 $\frac{1}{24}$ 公升是 $\frac{5}{24}$ 公升。

步驟三：得到全部裝完，每瓶裝 $\frac{5}{24}$ 公升的答案。

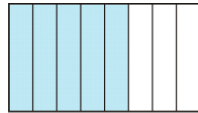
方法二：單位分數再分割

步驟一：教師先強調題目要求回答的是「多少公升」，因此先畫出一個長方形代表 1 公升。



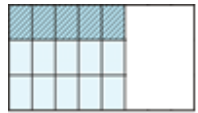
1 公升

步驟二：將 1 公升平分成 8 份，其中的 5 份是 $\frac{5}{8}$ 公升。

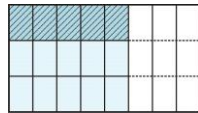


$\frac{5}{8}$ 公升

步驟三：再將 $\frac{5}{8}$ 公升平分成 3 瓶。



步驟四：因為看不到 1 瓶和 1 公升的關係，因此將平分成 3 瓶的線延長，就能看到 1 公升被分割成 24(8×3)份，而 1 瓶是 24 份中的 5 份，也就是 $\frac{5}{24}$ (公升)。得到全部裝完，每瓶裝 $\frac{5}{24}$ 公升的答案。



$\frac{5}{24}$ 公升

步驟五：可以把做法記成 $\frac{5}{8} \div 3 = \frac{5}{8 \times 3} = \frac{5}{24}$ (公升)。

題號	8		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題		
試題內容	8. 爸爸進行體能訓練，他每天花 1 小時 20 分鐘跑步，請問多少天後他跑步的時間會累積到 24 小時？ ① 20 ② 19 ③ 18 ④ 17		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.23	0.36	0.08
2	0.09	0.16	0.02
3*	0.63	0.36	0.89
4	0.06	0.11	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.63	鑑別度	0.53
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.53，正確答案為選項 3，通過率為 63%，顯示超過六成的學生已掌握時間情境乘除互逆的概念，並具備利用包含除情境時間複名數除法計算解題的能力。 2.有 23%的學生選擇選項 1(低分組有 36%)，這些學生可能已掌握時間問題乘除互逆的概念，也具備利用包含除情境時間複名數除法計算解題的能力，但是誤認為 1 小時=100 分鐘。 3.有 9%的學生選擇選項 2(低分組有 16%)，這些學生可能無法掌握時間問題乘除互逆的概念，也不具備利用包含除情境時間複名數除法計算解題的能力。 4.有 6%的學生選擇選項 4(低分組有 11%)，這些學生可能無法掌握時間問題乘除互逆的概念，也不具備利用包含除情境時間複名數除法計算解題的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題(不含除法)。	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

1. 以 $\frac{2}{5}$ 小時 = () 分鐘為例，提出二種幫助學生解題的方法。

方法一：單位量轉換

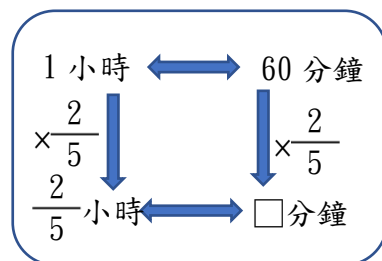
$$\frac{2}{5} \text{ 小時是 } \frac{2}{5} \text{ 個 } 1 \text{ 小時}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \text{ 小時是 } \frac{2}{5} \text{ 個 } 60 \text{ 分鐘} (1 \text{ 小時} = 60 \text{ 分鐘})$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \text{ 小時是 } 60 \text{ 分鐘的 } \frac{2}{5} \text{ 倍 (可以記成 } 60 \times \frac{2}{5} \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \text{ 小時是 } 24 \text{ 分鐘} (60 \times \frac{2}{5} = 24)$$

方法二：透過比的想法，利用關係式來解題



$$60 \times \frac{2}{5} = 24, \text{ 所以 } \frac{2}{5} \text{ 小時} = 24 \text{ 分鐘}$$

2. 以 12 分鐘 = () 小時為例，說明如何幫助學生解題。

方法一：單位量轉換

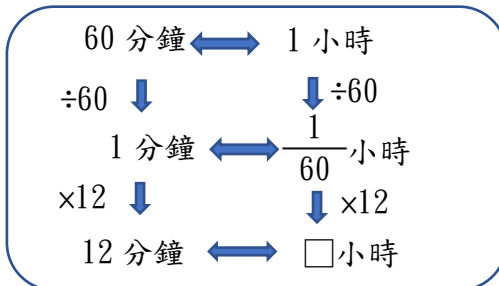
$$12 \text{ 分鐘是 } 12 \text{ 個 } 1 \text{ 分鐘}$$

$$\Rightarrow 12 \text{ 分鐘是 } 12 \text{ 個 } \frac{1}{60} \text{ 小時} (1 \text{ 分鐘} = \frac{1}{60} \text{ 小時})$$

$$\Rightarrow 12 \text{ 分鐘是 } \frac{1}{60} \text{ 小時的 } 12 \text{ 倍 (可以記成 } \frac{1}{60} \times 12 \text{)}$$

$$\Rightarrow 12 \text{ 分鐘是 } \frac{1}{5} \text{ 小時} (\frac{1}{60} \times 12 = \frac{1}{5})$$

方法二：透過比的想法，利用關係式來解題



$$\frac{1}{60} \times 12 = \frac{1}{5}, \text{ 所以 } 12 \text{ 分鐘} = \frac{1}{5} \text{ 小時}$$

3. 以包含除情境時間量問題「機器完成一件成品要 3 日 8 小時 50 分鐘，14 日 19 小時 15 分鐘最多可完成幾件成品，剩下多少時間？」為例，提出兩種幫助學生解題的方法：

方法一：被除數和除數都換成「幾分鐘」策略

$$24 \times 3 = 72, 72 + 8 = 80 \text{ (小時)}$$

$$60 \times 80 = 4800, 4800 + 50 = 4850 \text{ (分鐘)}$$

$$24 \times 14 = 336, 336 + 19 = 355 \text{ (小時)}$$

$$60 \times 355 = 21300, 21300 + 15 = 21315 \text{ (分鐘)}$$

$$21315 \div 4850 = 4 \text{ (件)} \dots 1915 \text{ (分鐘)}$$

$$1915 \div 60 = 31 \text{ (小時)} \dots 55 \text{ (分鐘)}$$

$$31 \div 24 = 1 \text{ (日)} \dots 7 \text{ (小時)}$$

答：最多可以完成 4 件成品，剩下 1 日 7 小時 55 分鐘。

方法二：先乘後減策略：

$$3 \text{ 日 } 8 \text{ 小時 } 50 \text{ 分鐘} \times 4 = 13 \text{ 日 } 11 \text{ 小時 } 20 \text{ 分鐘}$$

$$14 \text{ 日 } 19 \text{ 小時 } 15 \text{ 分鐘} - 13 \text{ 日 } 11 \text{ 小時 } 20 \text{ 分鐘} = 1 \text{ 日 } 7 \text{ 小時 } 55 \text{ 分鐘}$$

	日	小時	分鐘
	3	8	50
×			4
	12	32	200
	13	11	20

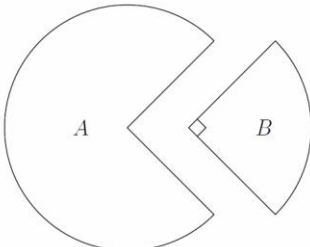
	日	小時	分鐘
	14	19	15
—	13	11	20
	1	7	55

■ 答：最多可以完成 4 件成品，剩下 1 日 7 小時 55 分。

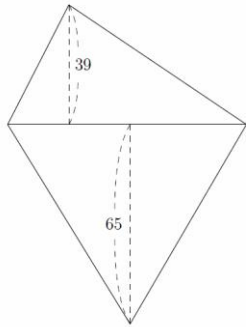
4. 上面所舉等分除及包含除情境時間量的計算問題，都出現三個時間單位，主要是提供給教師參考，希望較詳細的說明兩種方法解題的意義。
- 為了不要讓計算的數字太大，評量時不宜出現三個時間單位的複名數除法問題，只能評量二個相鄰時間單位的複名數除法問題。
- 例如：「13 小時 35 分鐘 $\div$ 5」、「13 小時 35 分鐘 $\div$ 3 小時 15 分鐘」等問題。
- 上面分別提供等分除及包含除情境時間量計算問題兩種解題方法，其中第一種方法概念比較簡單，但是計算比較複雜，第二種方法概念比較困難，但是計算比較簡單。
- 教學時可以嘗試說明這兩種解題方法，但是評量時學生只要解題成功即可，不宜限制學生使用某種方法解題。

題號	9		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。		
試題內容	9. 下面三個算式中，哪些算式正確？ A：$18 \times 7 \div 6 = 18 \div 6 \times 7$ B：$84 \div 6 \div 2 = 84 \div (6 \div 2)$ C：$60 \div (4 \times 3) = 60 \div 4 \div 3$ ① 只有 A 和 B ② 只有 A 和 C ③ 只有 B 和 C ④ A、B、C 都正確		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.24	0.03
2*	0.58	0.29	0.89
3	0.19	0.31	0.06
4	0.09	0.16	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.58	鑑別度	0.59
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.59，正確答案為選項 2，通過率為 58%，顯示近六成的學生已理解「先乘再除與先除再乘的結果相同」及「連除兩數相當於除以此兩數之積」。部分學生可能先計算出等號兩側算式的答案，再判斷哪個算式正確。 2.有 14%的學生選擇選項 1(低分組有 24%)，這些學生可能理解「先乘再除與先除再乘的結果相同」，但尚未理解「連除兩數相當於除以此兩數之積」，誤以為 $A \div B \div C = A \div (B \div C)$。 3.有 19%的學生選擇選項 3(低分組有 31%)，這些學生可能尚未完全理解「連除兩數相當於除以此兩數之積」。 4.有 9%的學生選擇選項 4(低分組有 16%)，這些學生可能已理解「先乘再除與先除再乘的結果相同」，但尚未「理解連除兩數相當於除以此兩數之積」。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。	6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性(同 6-n-13)。
補救教學建議			
1.現行教材在五年級引入「先乘再除與先除再乘的結果相同」、「連除兩數相當於除以此兩數之積」，多以生活情境布題，透過兩種不同的列式方式進行解題，讓學生「發現」兩種列式皆可求出正確答案，因而「宣告」「先乘再除與先除再乘的結果相同」、「連除兩數相當於除以此兩數之積」。 2.對學生來說，每個數學問題都是一個「特例」，學生必須看過、計算過、經驗夠多的特例後，才能發現這些特例當中的通則，形成概念的「集合」。但多數教材只布下一至二個問題後，便宣告這些性質，學生沒有足夠的先備知識、經驗協助他們理解時，就只能以背誦的方式將之強記，也因此容易遺忘、記錯、誤用。 3.建議教師在進行此部分的教學時，應該要提供學生足夠多的解題經驗後，再協助學生整理、歸納出「先乘再除與先除再乘的結果相同」、「連除兩數相當於除以此兩數之積」這兩個性質，協助他們能從「例題的特例」形成「概念的集合」。 4.學童學完此單元後，解題時部分學生仍習慣不使用這些性質，還是可以正確。此時教師可以嘗試布下一些特殊數字、數字較大的題型，讓學生不得不使用，使之發現這些運算性質的確有其便利性，能增加計算的速度與正確性。			

題號	10		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形		
試題內容	10. 將一張圓形色紙，剪成下圖中的扇形 A 和扇形 B。  下面是甲、乙二人關於扇形 A 和扇形 B 的說法。 甲：扇形 A 和扇形 B 的圓心角相差 180 度。 乙：扇形 A 是 $\frac{3}{4}$ 圓 請問哪些人的說法正確？ ① 只有甲正確 ② 只有乙正確 ③ 兩個都正確 ④ 兩個都不正確		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.15	0.03
2	0.56	0.54	0.46
3*	0.27	0.16	0.48
4	0.08	0.14	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.27	鑑別度	0.32
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.32，正確答案為選項 3，通過率為 27%，顯示近三成的學生已具備利用圓心角及扇形概念解題的能力。 2.有 8%的學生選擇選項 1(低分組有 15%)，這些學生能夠正確的算出兩個扇形的圓心角，但是無法描述優扇形是幾分之幾圓。 3.有 56%的學生選擇選項 2(低分組有 54%)，這些學生能正確的描述優扇形是幾分之幾圓，但是無法的算出兩個扇形的圓心角。 4.有 8%的學生選擇選項 4(低分組有 14%)，這些學生無法描述優扇形是幾分之幾圓，也無法算出兩個扇形的圓心角。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-s-03 能使用圓規畫圓，認識圓的「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。 4-s-04 能認識角度單位「度」，並使用量角器實測角度或畫出指定的角度。	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。	6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。
補救教學建議			
1.本學習指標為3-s-03之後續學習概念，故學生應該已經認識圓的「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。而本指標旨在幫助學生認識扇形及圓心角。 2.圓的圓心角是周角，周角的角度是360 度，而扇形的圓心角是周角的部份，$\frac{1}{2}$圓的圓心角是周角的$\frac{1}{2}$，可以利用$360 \times \frac{1}{2} = 180(\text{度})$，算出$\frac{1}{2}$圓的圓心角是180度。相同的方式，可以透過$360 \times \frac{1}{n}$，算出$\frac{1}{n}$圓的圓心角是多少度。 3.部份學生誤認為半徑比較長的$\frac{1}{n}$圓，它的圓心角比較大，半徑比較短的$\frac{1}{n}$圓，它的圓心角比較小。教師可以透過下圖，幫助學生理解，半徑比較長的$\frac{1}{6}$圓，扇形面積比較大，圓心角對應的圓弧比較長，但是它們的圓心角都是60度，都一樣大。			

題號	11		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。		
試題內容	11. 下圖是由兩個底邊相同、高不相同的三角形組合成的圖形。 已知底邊為 78 公分，高分別是 39 公分和 65 公分。 下列哪個算式可以算出這兩個三角形的面積和是多少平方公分？  (單位：公分) ① $39 + 65 \times 78 \div 2$ ② $78 \times 39 + 78 \times 65 \div 2$ ③ $78 \times (39 + 65)$ ④ $(39 + 65) \times 78 \div 2$		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.20	0.03
2	0.19	0.28	0.09
3	0.13	0.23	0.04
4*	0.56	0.29	0.83
未作答	0.00		
通過率	0.56	鑑別度	0.54
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.53，正確答案為選項 4，通過率為 58%，顯示近六成的學生已具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力。 2. 有 11% 的學生選擇選項 1 (低分組有 21%)，這些學生可能已具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力，但是忘記「先乘除後加減」及「由左往右算」運算次序的約定，忘記在兩個高相加的算式中加上括號。 3. 有 20% 的學生選擇選項 2 (低分組有 28%)，這些學生可能不具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力，也忘記「先乘除後加減」及「由左往右算」運算次序的約定，忘記在兩個三角形面積相加的算式中加上括號。 4. 有 11% 的學生選擇選項 3 (低分組有 20%)，這些學生可能已具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力，但是誤將三角形面積公式記為「底×高」。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-n-10 能在具體情境中，解決兩步驟問題（加、減與乘，不含併式）。 3-n-03 能用併式記錄加減兩步驟的問題。 4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。	6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，
補救教學建議			
1. 以「豆漿一杯 20 元，奶茶一瓶 40 元，媽媽各買了 6 杯，要付多少元？」為例，說明如何幫助學生理解乘法對加法的分配律。 教學時應出現下面兩種解題的方法，如果學生只出現其中一種解法，教師應提供另一種解法讓學生討論。 方法一：分別計算 6 杯豆漿和 6 瓶奶茶的錢，再算合起來是多少錢。 $20 \times 6 = 120$，$40 \times 6 = 240$，$120 + 240 = 360$，並改用併式「$20 \times 6 + 40 \times 6 = 360$」來記錄。 方法二：將 1 杯豆漿和 1 瓶奶茶看成 1 份，先算 1 份的錢，再算 6 份的錢。 $20 + 40 = 60$，$60 \times 6 = 360$，並改用併式「$(20 + 40) \times 6 = 360$」來記錄。 理解乘法對加法的分配有兩個層次： 層次一：學生必須分別算出方法一的答案「$20 \times 6 + 40 \times 6 = 360$」和方法二的答案「$(20 + 40) \times 6 = 360$」，發現這兩種方法算出的答案相同，才可以記成「$20 \times 6 + 40 \times 6 = (20 + 40) \times 6$」。 層次二：學生知道它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同，可以記成「$20 \times 6 + 40 \times 6 = (20 + 40) \times 6$」 教師應幫助層次一的學生提升至層次二。 2. 部份學生無法利用乘法對加法的分配律來簡化「$35 \times 99 + 35$」的計算，下面提供三種解題的方法。 方法一：教師直接宣告將 35 改記成 35×1 $35 \times 99 + 35 = 35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times (99 + 1) = 35 \times 100 = 3500$ 部份教師習慣利用方法一來教學，學生不理解為何要將 35 改記成 35×1，很快就會忘記。			

方法二：給定「一枝筆賣 35 元，甲先買 99 枝，再買 1 枝，共花多少元？」的情境，再提供三種解法，幫助學生理解 35 是 35×1 的省略記法。

(1) $35 \times 99 + 35 \times 1$

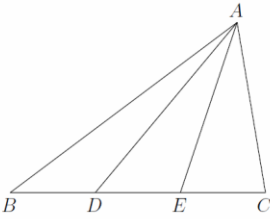
(2) $35 \times 99 + 35$

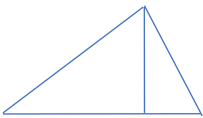
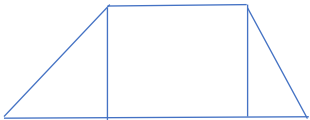
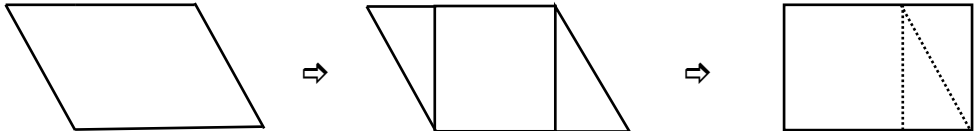
(3) $35 \times (99 + 1)$

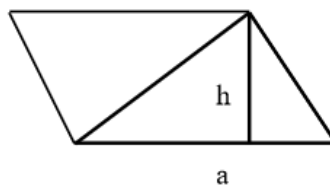
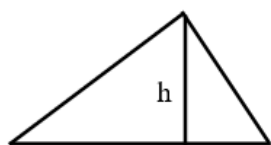
方法三：乘法對加法的分配律是兩種算法答案一定相等的關係，學生可能將乘法對加法的分配律解讀成運算。

學生比較熟悉 $35 \times (99 + 1) \Rightarrow 35 \times 99 + 35 \times 1$ 的乘法運算，比較不熟悉 $35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times (99 + 1)$ 提公因數的運算。

教師可以透過「 $35 \times (99 + 1) = 35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times 99 + 35$ 」，幫助學生理解 35 是 35×1 的省略記法，必須將 35 改記成 35×1 ，才能利用乘法對加法的分配律來解題。

題號	12		
內容領域	幾何	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-s-05(同 5-n-18) 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式		
試題內容	12. 如圖，已知 $\overline{BD}$、$\overline{DE}$ 和 $\overline{EC}$ 的長度相等，且三角形 ABC 的面積為 45 平方公分，請問三角形 ADC 的面積為多少平方公分？  ① 45 ② 30 ③ 20 ④ 15		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.22	0.35	0.07
2*	0.48	0.25	0.77
3	0.10	0.17	0.04
4	0.19	0.23	0.12
未作答	0.00		
通過率	0.48	鑑別度	0.52
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.52，正確答案為選項 2，通過率為 48%，顯示近五成的學生已具備利用「等底同高三角形面積相等」性質解題的能力。 2. 有 22% 的學生選擇選項 1(低分組有 35%)，這些學生可能不具備利用「等底同高三角形面積相等」性質解題的能力；也可能不理解題意，選出原三角形的面積。 3. 有 10% 的學生選擇選項 3(低分組有 17%)，這些學生可能不具備利用「等底同高三角形面積相等」性質解題的能力。 4. 有 19% 的學生選擇選項 4(低分組有 23%)，這些學生已具備利用「等底同高三角形面積相等」性質解題的能力，但是誤解題意，只算出 1 個小三角形的面積。			

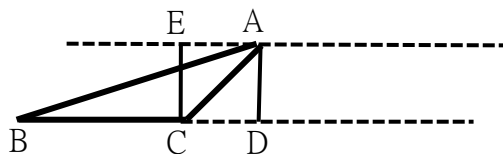
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-1 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-s-09) 4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。	5-s-05(同 5-n-18) 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。	6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-s-05)
補救教學建議			
1. 建議教師先透過將平行四邊形切割再重組成長方形的方式，引入平行四邊形的面積公式。再透過將兩個三角形拼成平行四邊形，以及將兩個梯形拼成平行四邊形的方式，引入三角形及梯形面積公式。 這種引入三角形、平行四邊形與梯形面積公式的方法，其優點是只要操弄圖形就能導出公式，不涉及代數式的運算，缺點是解法不自然，學生無法自發性的解題，必須透過教師的引導才能導出公式。 2. 學生已學過長方形面積公式，也知道沿著長方形的對角線剪開，會剪出兩個全等的直角三角形，因此剪成的直角三角形面積是長方形面積的一半。 如下圖，教師<u>不宜</u>將三角形、平行四邊形與梯形分別切割成長方形和直角三角形，再將它們面積相加的方式，引入面積公式，這種方法雖然能算出三角形、平行四邊形與梯形的面積，但是五年級學生不易將這些算式併式後引入公式。    3. 下面概略說明如何引入平行四邊形、三角形的面積公式 (1)將平行四邊形先切割再重組(如下圖)，將平行四邊形轉換成等積異形的長方形，其中長方形的長邊就是平行四邊形的底邊，長方形的寬邊就是平行四邊形的高。平行四邊形面積＝長方形面積＝長×寬＝底×高。  教師應強調長方形的長邊和寬邊互相垂直，因此平行四邊形的底邊和高也互相垂直，為以後找不同形狀平行四邊形給定底邊求對應高的問題鋪路。 (2)透過將兩個全等的三角形拼成平行四邊形的方式，導出三角形面積公式，其中三角形的底就是拼成平行四邊形的底，三角形的高就是拼成平行四邊形的高。三角形面積＝平行四邊形面積÷2＝(底×高)÷2。			



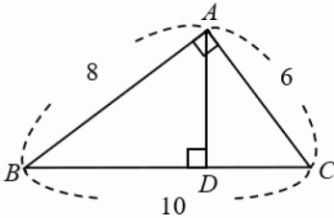
學生並不知道兩個全等三角形拼成的四邊形一定是平行四邊形，教師應要求學生檢查拼成的四邊形是平行四邊形；也要強調平行四邊形的底和高互相垂直，所以三角形的底和高也互相垂直，為以後找不同形狀三角形給定底邊求對應高的問題鋪路。

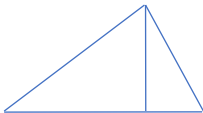
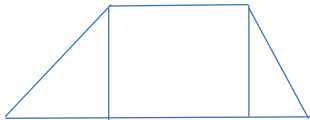
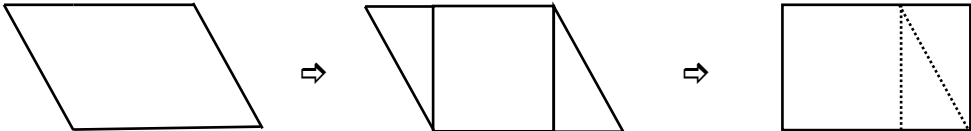
4. 以「下圖是三角形 ABC，畫出以 BC 為底邊的高」為例，說明如何幫助學生畫高。

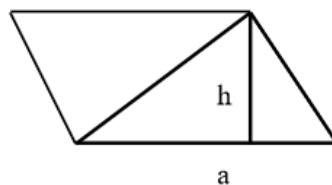
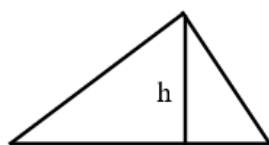
四年級已有給定一直線 L 及線外一點 P，要求學生畫出過 P 且平行 L 直線的解題經驗，也認識兩平行線間的距離處處相等。教師可以透過上述性質，先將三角形底邊延長，再過頂點 A 畫出和底邊 BC 平行的直線，幫助學生理解兩平行線間的距離相等，所以 EC 和 AD 都是三角形 ABC 的高。



透過畫高的活動，教師可以引導學生察覺等底同高的三角形面積相等。

題號	13		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-s-05(同 5-n-18) 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式		
試題內容	13. 如圖，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 上的高，請問 $\overline{AD}$ 長多少公分？  (單位：公分) ① $\frac{48}{10}$ ② $\frac{24}{10}$ ③ $\frac{60}{8}$ ④ $\frac{80}{6}$		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.46	0.28	0.66
2	0.27	0.32	0.21
3	0.16	0.22	0.08
4	0.10	0.17	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.46	鑑別度	0.38
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.38，正確答案為選項 1，通過率為 46%，顯示近五成的學生已具備用三角形面積公式解題的能力。 2. 有 27% 的學生選擇選項 2(低分組有 32%)，這些學生可能已具備用三角形面積公式解題的能力，這些學生先利用 $6 \times 8 \div 2 = 24$ 算出直角三角形的面積是 24，再利用 $10 \times \text{高} = 24$ 算出高的長度是 $\frac{24}{10}$ 時，忘記三角形的面積是 $10 \times \text{高} \div 2$。 3. 有 16% 的學生選擇選項 3(低分組有 22%)，這些學生可能不具備用三角形面積公式解題的能力，無法求出給定三邊長直角三角形的面積。 4. 有 10% 的學生選擇選項 4(低分組有 17%)，這些學生可能不具備用三角形面積公式解題的能力，無法求出給定三邊長直角三角形的面積。			

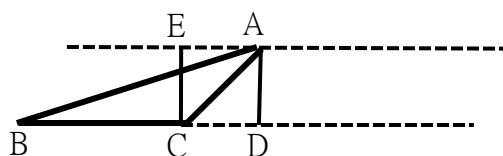
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-1 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-s-09) 4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。	5-s-05(同 5-n-18) 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。	6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-s-05)
補救教學建議			
(1)建議教師先透過將平行四邊形切割再重組成長方形的方式，引入平行四邊形的面積公式。再透過將兩個三角形拼成平行四邊形，以及將兩個梯形拼成平行四邊形的方式，引入三角形及梯形面積公式。 這種引入三角形、平行四邊形與梯形面積公式的方法，其優點是只要操弄圖形就能導出公式，不涉及代數式的運算，缺點是解法不自然，學生無法自發性的解題，必須透過教師的引導才能導出公式。 (2)學生已學過長方形面積公式，也知道沿著長方形的對角線剪開，會剪出兩個全等的直角三角形，因此剪成的直角三角形面積是長方形面積的一半。 如下圖，教師<u>不宜</u>將三角形、平行四邊形與梯形分別切割成長方形和直角三角形，再將它們面積相加的方式，引入面積公式，這種方法雖然能算出三角形、平行四邊形與梯形的面積，但是五年級學生不易將這些算式併式後引入公式。    (3)下面概略說明如何引入平行四邊形、三角形的面積公式 (1)將平行四邊形先切割再重組(如下圖)，將平行四邊形轉換成等積異形的長方形，其中長方形的長邊就是平行四邊形的底邊，長方形的寬邊就是平行四邊形的高。平行四邊形面積＝長方形面積＝長×寬＝底×高。  教師應強調長方形的長邊和寬邊互相垂直，因此平行四邊形的底邊和高也互相垂直，為以後找不同形狀平行四邊形給定底邊求對應高的問題鋪路。 (2)透過將兩個全等的三角形拼成平行四邊形的方式，導出三角形面積公式，其中三角形的底就是拼成平行四邊形的底，三角形的高就是拼成平行四邊形的高。三角形面積＝平行四邊形面積÷2＝(底×高)÷2。			



學生並不知道兩個全等三角形拼成的四邊形一定是平行四邊形，教師應要求學生檢查拼成的四邊形是平行四邊形；也要強調平行四邊形的底和高互相垂直，所以三角形的底和高也互相垂直，為以後找不同形狀三角形給定底邊求對應高的問題鋪路。

(4)以「下圖是三角形 ABC，畫出以 BC 為底邊的高」為例，說明如何幫助學生畫高。

四年級已有給定一直線 L 及線外一點 P，要求學生畫出過 P 且平行 L 直線的解題經驗，也認識兩平行線間的距離處處相等。教師可以透過上述性質，先將三角形底邊延長，再過頂點 A 畫出和底邊 BC 平行的直線，幫助學生理解兩平行線間的距離相等，所以 EC 和 AD 都是三角形 ABC 的高。



題號	14		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-n-04 能理解因數和倍數		
試題內容	14. 下列哪個數，其因數的個數是奇數個？ ① 18 ② 16 ③ 15 ④ 12		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.05	0.08	0.03
2*	0.23	0.11	0.49
3	0.66	0.70	0.46
4	0.05	0.10	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.23	鑑別度	0.39
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.39，正確答案為選項 2，通過率為 23%，顯示超過二成的學生已能理解題意，且能正確找出給定數所有的因數。 2.有 5%的學生選擇選項 1(低分組有 8%)，這些學生可能不理解完全平方數的因數個數是奇數個，他們可能正確列出 18 的所有因數，但誤解題意，18 的因數中屬於奇數的有 1，3，9，共 3 個，所以選答 1。 3.有 66%的學生選擇選項 3(低分組有 70%)，這些學生可能不理解完全平方數的因數個數是奇數個，他們可能誤解題意，認為 15 是奇數，所以直接選此答。 4.有 5%的學生選擇選項 4(低分組有 10%)，這些學生可能不理解完全平方數的因數個數是奇數個。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-n-08 能理解九九乘法。 3-n-05 能理解除法的意義，運用 $\div$ 、 $=$ 做橫式紀錄(包括有餘數的情況)，並解決生活中的問題。	5-n-04 能理解因數和倍數。	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解(質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100)。

補救教學建議

1. 以「求 60 的因數和倍數」為例，五年級的教學重點是看著數字 60 找出 60 的因數及倍數，六年級的教學重點是看著 60 質因數分解的算式 $2 \times 2 \times 3 \times 5$ 找出 60 的因數及倍數。

教師應限制五年級的學生只能透過嘗試錯誤的方式，尋找兩數的公因數和最大公因數，以及公倍數和最小公倍數。

教師不宜引入短除法求最大公因數及最小公倍數的方法，利用短除法求最大公因數及最小公倍數是六年級的教學重點。

2. 國小五年級引入因數問題時，給定的數字多在九九乘法的範圍，因此部份教師喜歡透過乘法算式幫助學生認識因數。建議教師必須提供學生利用除法判斷因數的解題經驗，因為當數字變大時，無法直接利用乘法算式找出因數，以「23 是否為 12581 的因數」為例，學生不易透過乘法算式「 $23 \times () = 12581$ 」來判斷，必須透過除法算式「 $12581 \div 23$ 」來判斷。

3. 當學生求出 1、2、3、6 是 18 和 24 的公因數，6 是 18 和 24 的最大公因數後，教師應幫助學生認識公因數 1、2、3、6 是最大公因數 6 的因數，為六年級利用短除法解公因數的文字題鋪路。六年級利用短除法解題時，只能求出最大公因數，無法求出所有的公因數。

4. 區分「倍數」與「幾倍」的意義。

學生可能混淆「倍數」與「幾倍」的意義，誤認為 2 是 0.1 的倍數。

正確的說法是：2 不是 0.1 的倍數，但 2 是 0.1 的 20 倍。

(1) 倍數的意義：

數學上只在整數的情境討論因數與倍數，因此，不論透過乘法 $b = a \times q$ 或除法 $b \div a = q \dots 0$ ，判斷 a 是否為 b 的因數時， a 、 b 和 q 都必須是整數。0.1 不是整數，因此 0.1 不是 2 的因數，2 也不是 0.1 的倍數。

(2) 幾倍的意義：

a 是 b 的 $\frac{a}{b}$ 倍，指的是將 b 視為基準量 1 時，比較量 a 是 $\frac{a}{b}$ 。

將 0.1 視為基準量 1，比較量 2 是 20 個 0.1，因此 2 是 0.1 的 20 倍。

題號	15		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊		
試題內容	15. 有一塊三角形公園，已知其中兩邊的長度為 500 公尺和 800 公尺，請問下面哪個選項可能是第三邊的長度？ ① 250 公尺 ② 300 公尺 ③ 1200 公尺 ④ 1300 公尺		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.15	0.07
2	0.29	0.39	0.15
3*	0.36	0.18	0.62
4	0.23	0.28	0.16
未作答	0.01		
通過率	0.36	鑑別度	0.44
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.44，正確答案為選項 3，通過率為 36%，顯示近四成的學生已具備利用三角形任意兩邊和大於第三邊性質解題的能力。 2.有 11%的學生選擇選項 1(低分組有 15%)，這些學生可能不具備利用三角形任意兩邊和大於第三邊性質解題的能力，直接將兩數相減。 3.有 29%的學生選擇選項 2(低分組有 39%)，這些學生可能不具備利用三角形任意兩邊和大於第三邊性質解題的能力。 4.有 23%的學生選擇選項 4(低分組有 28%)，這些學生可能不具備利用三角形任意兩邊和大於第三邊性質解題的能力，直接將兩數相加。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	1-s-1 能認識直線與曲線。 4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。	5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。	6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。

補救教學建議

1. 五年級學生應該已能掌握連接兩點的繩子，以直線為最短。教師可以利用這個性質，幫助學生理解三角形任意兩邊和大於第三邊。以三角形 ABC 為例，連接 A、B 兩點的繩子，以線段 AB 為最短，所以 $AC+BC>AB$ ；連接 A、C 兩點的繩子，以線段 AC 為最短，所以 $BC+AB>AC$ ；連接 B、C 兩點的繩子，以線段 BC 為最短，所以 $AB+AC>BC$ ，也就是三角形任意兩邊和大於第三邊。
2. 「三角形任兩邊的和的大於第三邊」與「三角形比較短的兩邊和的大於最長邊」是等價的定義。假設三角形三邊的長度是 a 、 b 、 c ， $a\geq b\geq c$ ，如果 $b+c>a$ 成立，那麼 $a+b>c$ 、 $a+c>b$ 一定也會成立。所以當「三角形比較短的兩邊和的大於最長邊」成立時，「三角形任兩邊的和的大於第三邊」也會成立。
建議教師教學時必須說明「三角形任兩邊的和的大於第三邊」的性質，但是在判斷是否能圍成三角形時，只要判斷「比較短的兩邊和是否大於最長邊」即可。學生只要掌握「比較短的兩邊和的大於最長邊」時，就能圍成三角形，就能發展出「比較短的三邊和的大於最長邊」時，就能圍成四邊形，以及「比較短的 $n-1$ 邊和的大於最長邊」時，就能圍成 n 邊形的性質。
3. 判斷給定的三線段是否能拼成三角形時，不必檢查任意兩邊和的大於第三邊，只要檢查較短的兩邊和是否大於最長邊即可。
如左下圖，較短的兩邊和的大於最長邊，因此可以圍成一個三角形。
如右下圖，較短的兩邊和的小於最長邊，因此不可以圍成一個三角形



題號	16		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。		
試題內容	16. 「888.888」中，十分位數字「8」所代表的值是十位數字「8」所代表的值的多少倍？ ① 0.001 ② 0.01 ③ 0.1 ④ 10		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.25	0.30	0.19
2*	0.41	0.26	0.60
3	0.20	0.25	0.14
4	0.14	0.18	0.07
未作答	0.00		
通過率	0.41	鑑別度	0.34
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.34，正確答案為選項 2，通過率為 41%，顯示超過四成的學生已具備利用「左邊數字所代表的值都是相鄰右邊數字的十倍」位值概念解題的能力。 2.有 25%的學生選擇選項 1(低分組有 30%)，這些學生可能尚未具備利用「左邊數字所代表的值都是相鄰右邊數字的十倍」位值概念解題的能力，認為小數點後第一位是「個分位」、小數點後第二位是「十分位」。因此，他們認為十分位的數字「8」代表 8 個 0.01，也就是 0.08；十位的數字「8」代表 8 個 10，也就是 80。而 0.08 是 80 的 $\frac{1}{1000}$ 倍，也就是 0.001 倍。 3.有 20%的學生選擇選項 3(低分組有 25%)，這些學生可能尚未具備利用「左邊數字所代表的值都是相鄰右邊數字的十倍」位值概念解題的能力。 4.有 14%的學生選擇選項 4(低分組有 18%)，這些學生可能尚未具備利用「左邊數字所代表的值都是相鄰右邊數字的十倍」位值概念解題的能力。			

教材地位分析																															
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識																												
分年細目	4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。																												
補救教學建議																															
1.小數是整數十進位系統的延伸，在引入一位小數時，十分位的值必須是個位的$\frac{1}{10}$倍，因此規定「$0.1=\frac{1}{10}$」。 在引入二位小數時，百分位的值必須是個位的$\frac{1}{100}$倍，因此規定「$0.01=\frac{1}{100}$」。 百分位位名的由來是「$\frac{1}{100}=0.01$」的關係。 相同的理由，千分位的值必須是個位的$\frac{1}{1000}$倍，因此規定「$0.001=\frac{1}{1000}$」，以此類推。 2.透過下列兩組數字，說明小數點的功能。 第一組數字： 7.7 77.77 777.777 第二組數字：77.7 777.77 7777.777 就數字本身視覺的觀點，7.7小數點的左邊及右邊各有一個7，77.77小數點的左邊及右邊各有二個7，777.777小數點的左邊及右邊各有三個7，因此以小數點為對稱中心時，第一組小數是左右對稱的。 但是就位值的觀點，第二組小數才是左右對稱的。當我們以個位的7為對稱中心，並忽略小數點時，左右兩邊的位值是對稱的，個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，十位的左邊是百位，十分位的右邊是百分位，百位的左邊是千位，百分位的右邊是千分位，十位及十分位，百位及百分位，千位及千分位分別對稱於個位。如下所示：																															
<table><tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td><td>十分位</td><td>百分位</td><td>千分位</td></tr><tr><td></td><td></td><td>7</td><td>7.</td><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>7</td><td>7.</td><td>7</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>7.</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td></tr></table>				千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位			7	7.	7				7	7	7.	7	7		7	7	7	7.	7	7	7
千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位																									
		7	7.	7																											
	7	7	7.	7	7																										
7	7	7	7.	7	7	7																									

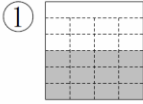
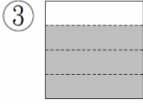
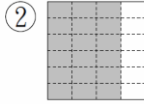
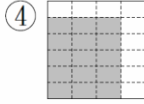
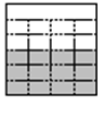
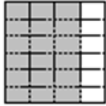
因為數字的單位是1，而記幾個1的位置是個位，因此個位才是數字的對稱中心。個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，不會有個分位的位名，而小數點的功能是告訴我們個位在哪裡。

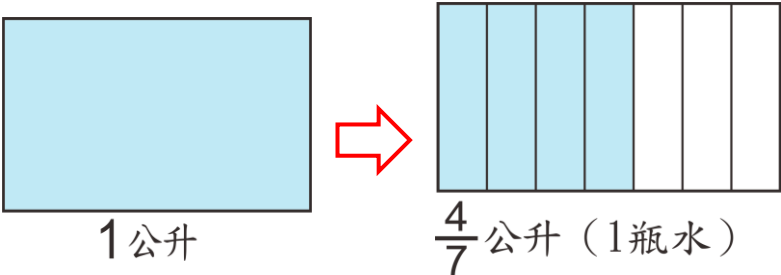
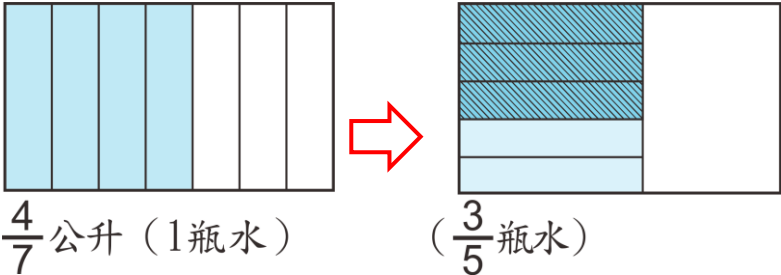
3.教師宜透過「先比較整數部份，再比較小數部份」的方法，幫助學生比較多位小數的大小。先比較整數部份，再類比整數比較大小的經驗，進行小數部份的大小比較，依序比較十分位、百分位、千分位的數字。

下面以「12.5、5.21、5.2099哪一個數最大？哪一個數最小？」為例，說明如何幫助學生解題。建議教師依下列步驟幫助學生解題：

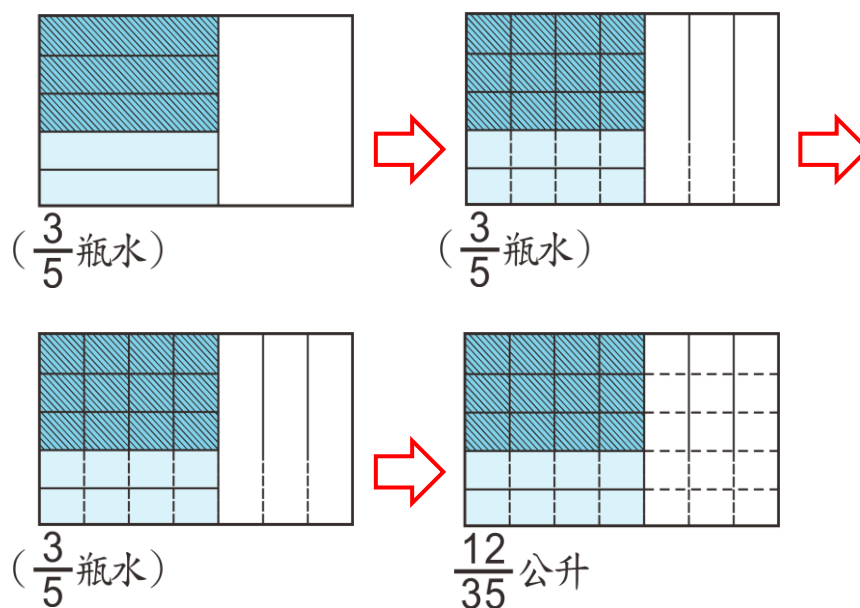
步驟一：先比較整數部份。「12.5」、「5.21」、「5.2099」整數部份的數字分別是12、5、5，12比5大，所以，「12.5」最大。

步驟二：再比較小數部份。「5.21」、「5.2099」整數部份的數字都是5，所以依序比較十分位、百分位、千分位的數字。「5.21」、「5.2099」的十分位數字都是2，表示有2個0.1。「5.21」、「5.2099」的百分位數字分別是1和0，分別表示1個0.01和0個0.01，0個比1個小，所以「5.2099」最小。

題號	17		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題		
試題內容	17.  是 1 張色紙，下列哪個選項塗色部分是 $\frac{5}{6}$ 張色紙的 $\frac{3}{4}$ 倍？ ①  ③  ②  ④ 		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.16	0.07
2	0.24	0.29	0.15
3	0.20	0.32	0.08
4*	0.44	0.22	0.70
未作答	0.00		
通過率	0.44	鑑別度	0.48
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.48，正確答案為選項 4，通過率為 44%，顯示超過四成的學生已理解分數乘以分數問題解題的意義。 2.有 12%的學生選擇選項 1(低分組有 16%)，這些學生可能尚未掌握分數乘以分數問題解題的意義。只留意 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ 算式中，$\frac{3}{4}$ 的 3，選出  作為答案。 3.有 24%的學生選擇選項 2(低分組有 29%)，這些學生可能尚未掌握分數乘以分數問題解題的意義。只留意 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ 算式中的 $\frac{3}{4}$，平分成 4 份中的 3 份，選出  作為答案。 4.有 20%的學生選擇選項 3(低分組有 32%)，這些學生可能尚未掌握分數乘以分數問題解題的意義。只留意 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ 算式中的 $\frac{3}{4}$，平分成 4 份中的 3 份，選出  作為答案。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。
補救教學建議			
1. 下面以「一瓶水有$\frac{4}{7}$公升，$\frac{3}{5}$瓶水有多少公升？」為例，說明為什麼可以透過「分子乘以分子，分母乘以分母」的方式算出答案。 步驟一：題目問「水有多少公升？」，先畫一個長方形表示 1 公升，接著畫出$\frac{4}{7}$公升表示 1 瓶水，如下圖：  1 公升 $\frac{4}{7}$ 公升 (1 瓶水) 步驟二：以 1 瓶水 ($\frac{4}{7}$ 公升) 為單位，平分成 5 份，再取出其中的 3 份，並在這 3 份畫上斜線，斜線部份就是$\frac{3}{5}$瓶水，如下圖：  $\frac{4}{7}$ 公升 (1 瓶水) ($\frac{3}{5}$ 瓶水) 步驟三：「和 1 公升 (原來的長方形) 比比看，1 公升被分割成幾小份？」，可以用算式「$7 \times 5 = 35$」算出 1 公升被分割成 35 小份，其中的 1 小份是$\frac{1}{35}$公升。再算算看，斜線部份有幾小份，用算式「$4 \times 3 = 12$」			

算出有 12 小份，這 12 小份合起來是 $\frac{12}{35}$ 公升。如下圖：



步驟四：看著算式「 $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{7 \times 5}$ 」說說看：「分母乘以分母(7×5)」是否記錄了將 1 公升(原來的長方形)先平分成 7 份、每 1 份再平分成 5 小份？也就是將 1 公升平分成 35(7×5)小份，而其中的 1 小份是 $\frac{1}{7 \times 5}$ 公升。」

「分子乘以分子(3×4)」是否記錄了有 12 個 $\frac{1}{7 \times 5}$ 公升？也就是 12 個 $\frac{1}{35}$ 公升。」

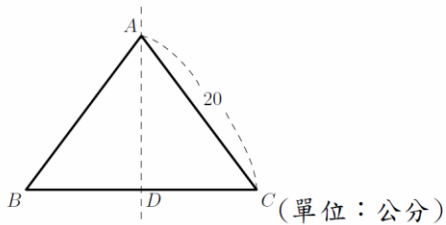
2. 以「一桶果汁 $\frac{5}{6}$ 公升， $\frac{3}{4}$ 桶有多少公升？」為例，學生利用「 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ 」解題

時，不宜要求學生將被乘數的分母 6 和乘數的分子 3 直接約分，因為 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{3}{4}$ 兩個數字的單位不一樣。

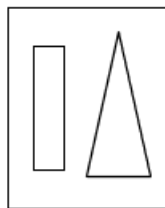
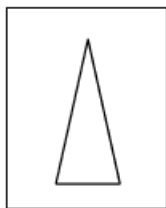
當學生算出「 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ 」之後， $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ 是一個數字，因為分母的 6 和分子的 3 有公因數 3，所以可以將(6×4)和(5×3)同時除以 3，得到

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{5 \times 1}{2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

教師也可以比對先約分和算出積後再約分的算式，幫助學生認識最後的結果都一樣，因此可以先約分後算出答案。

題號	18		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。		
試題內容	18. 下圖是一個線對稱圖形，虛線 $\overline{AD}$ 是對稱軸。 已知三角形 ABC 的周長是 64 公分，請問 $\overline{BD}$ 長多少公分？  (單位：公分) ① 10 ② 12 ③ 20 ④ 24		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.18	0.26	0.07
2*	0.50	0.25	0.79
3	0.14	0.25	0.03
4	0.18	0.24	0.11
未作答	0.00		
通過率	0.50	鑑別度	0.54
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.54，正確答案為選項 2，通過率為 50%，顯示有五成的學生已具備利用平面圖形線對稱性質解題的能力。 2.有 18%的學生選擇選項 1(低分組有 26%)，這些學生可能已具備利用平面圖形線對稱性質解題的能力，但無法正確求出線段 BC 的長度，而以目測直觀的方式判定線段 BC=線段 AC=20 公分，然後利用對稱邊相等的性質，所以線段 BD=$20 \div 2=10$ 公分。 3.有 14%的學生選擇選項 3(低分組有 25%)，這些學生可能尚未已具備利用平面圖形線對稱性質解題的能力，且誤解題意，只以目測直觀的方式判定線段 BC=線段 AC=20 公分，又忽略了題意要求的是線段 BD，逕直以 20 公分為答案。 4.有 18%的學生選擇選項 4(低分組有 24%)，這些學生已具備利用平面圖形線對稱性質解題的能力，先利用對稱邊相等的性質，知道線段 AB=線段 AC=20 公分，線段 BC=$64-20 \times 2=24$ 公分，但此時解題發生錯誤，或是忽略了題意要求的是線段 BD，而直接以 24 公分為答案。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。
補救教學建議			
1. 國小階段線對稱圖形教學的重點是「判斷給定的一個圖形是否為線對稱圖形」，下圖中三角形 ABC 沿著 L 對折後，L 兩側的圖形完全重合，我們稱三角形 ABC 是線對稱圖形，稱 L 為對稱軸。 對折後 AB 邊和 AC 邊完全重合，數學上稱 AB 邊的對稱邊是 AC 邊，AC 邊的對稱邊是 AB 邊，也稱 AB 邊和 AC 邊為對稱邊。 對折後角 B 和角 C 完全重合，數學上稱角 B 的對稱角是角 C，角 C 的對稱角是角 B，也稱角 B 和角 C 為對稱角。 對折後 B 點和 C 點完全重合，數學上稱 B 點的對稱點是 C 點，C 點的對稱點是 B 點，也稱 B 點和 C 點為對稱點。 2. 國小階段線對稱圖形教學的重點不是「判斷給定的兩圖形是否對稱於 L」，下圖中的三角形甲和三角形乙是兩個不同的圖形，國小階段不討論兩個圖形是否為線對稱圖形。 3. 以判斷等腰三角形是否為線對稱圖形問題為例，下面呈現三種布置圖形的方式： 第一種(下圖左)：給定一個等腰三角形的圖卡。 第二種(下圖中)：給定一張正方形紙張，將等腰三角形畫在給定正方形紙張的正中央。 第三種(下圖右)：給定一張正方形紙張，將等腰三角形畫在給定正方形紙張的一邊，另一邊可能還有其它的圖形。			



第一種對摺的對象一定是這個等腰三角形的圖卡，學生可以透過對摺後圖形兩邊完全疊合的現象，判斷該等腰三角形是線對稱圖形。

第二種及第三種對摺的對象可能是等腰三角形(略過正方形)，也可能是正方形，並將等腰三角形視為正方形紙張中的圖像。

建議教師先用第一種方式來布題，在與學生溝通評量對象是畫在紙上的等腰三角形後，才能用第二種及第三種方式來布題。

4.部份學生在尋找線對稱圖形有幾條對稱軸時，常遺漏一些對稱軸，下面提出一種幫助學生能找出所有對稱軸的方法。

教師可以先拿出一些已畫出所有對稱軸的線對稱圖形，例如下圖中的七個線對稱圖形，要求學生將這些圖形，依對稱軸和對稱圖形交點間的關係進行分類，幫助學生將對稱圖形的對稱軸分成下列三類。

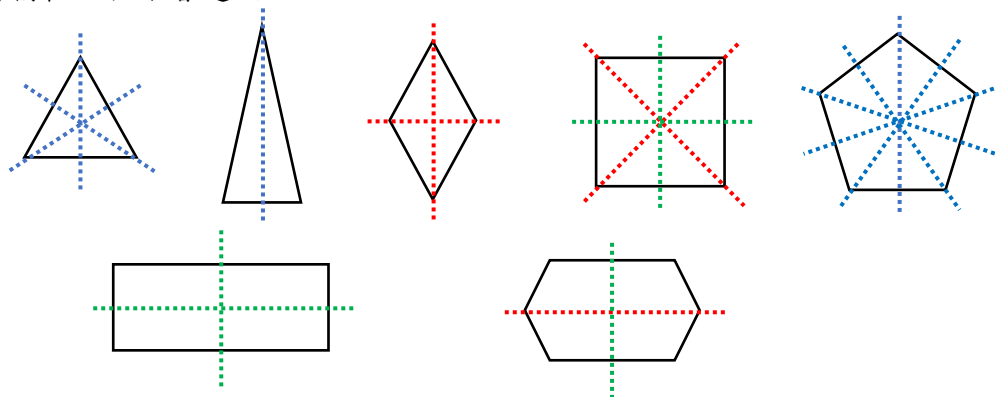
第一類：對稱軸通過對稱圖形的兩個頂點。

例如：菱形、正方形、六邊形

第二類：對稱軸通過對稱圖形的一個頂點和一邊的中點。

第三類：對稱軸通過對稱圖形兩邊的中點。

當學生理解對稱軸和對稱圖形間只有這三類關係後，只要依這三類關係分別找出對稱軸，就不會遺漏。

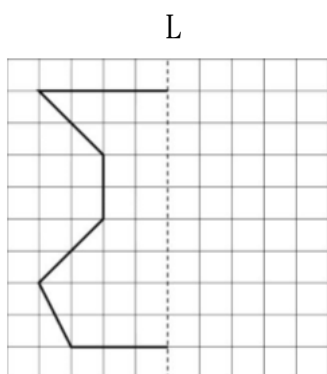


5.國小線對稱圖形的教材中，都出現給定一條對稱軸及對稱軸某一邊的圖形，要求學生畫出另一邊圖形的問題，如下圖，L 是對稱軸，左邊是給定的圖形，要求學生畫出右邊的圖形。教師們常出現下列兩種不同解讀題意的的方法：

第一種：將左邊的圖形視為圖形甲，要求學童畫出圖形甲對 L 的對稱圖形乙。

第二種：將全部的圖形視為一個線對稱圖形，左邊的圖形只是線對稱圖形的一部份，要求學生畫出完整的線對稱圖形。

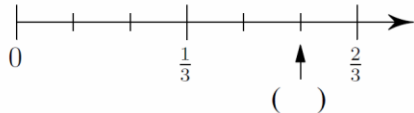
國小階段的教學重點不是第一種，國小階段的教學重點是第二種。



教師可以拿出一個線對稱圖形，要求學生觀察對稱圖形對稱點的連線和對稱軸的關係，幫助學生察覺對稱軸是這些對稱點連線的垂直平分線後，再要求學生自行畫出完整的線對稱圖形。

國小階段不宜引入垂直平分線的名詞，學生只要察覺對稱軸分別垂直於對應點的連線，且對應點到對應點連線和對稱軸交點的長度一樣長。

6.在進行「給定對稱圖形及對稱軸，要求學生找出線對稱圖形中給定邊長的對稱邊邊長、給定角角度的對稱角角度。」的解題時，學生如果無法解題，教師宜透過對摺來說明對稱邊一樣長、對稱角一樣大，並請學生實際操作、對摺，藉以觀察、理解。

題號	19		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上		
試題內容	19. 下圖是一條數線，請問 () 內要填入哪個數？  ① $\frac{2}{6}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{5}{12}$		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.34	0.44	0.16
2	0.23	0.28	0.16
3*	0.33	0.15	0.60
4	0.09	0.11	0.07
未作答	0.01		
通過率	0.33	鑑別度	0.45
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.45，正確答案為選項 3，通過率為 33%，顯示超過三成的學生已認識分數數線，並具備利用兩次分割的性質將分數標記在數線上的能力。 2.有 34%的學生選擇選項 1(低分組有 44%)，這些學生可能不具備利用兩次分割的性質將分數標記在數線上的能力，他們將$\frac{1}{3}$到$\frac{2}{3}$的$\frac{1}{3}$分割成 2 等分(因為中間有 2 個點)，得到一等分是$\frac{1}{6}$，而且不管數線是從$\frac{1}{3}$延伸過來，所以直接以$\frac{1}{6}$為單位計數兩格，得到$\frac{2}{6}$。 3.有 23%的學生選擇選項 2(低分組有 28%)，這些學生可能不具備利用兩次分割的性質將分數標記在數線上的能力，以 0 到$\frac{1}{3}$中間的 2 個點來進行分割，得到一份是$\frac{1}{6}$，從頭開始數得到$\frac{5}{6}$。			

4.有 9%的學生選擇選項 4(低分組有 11%)，這些學生可能不具備利用兩次分割的性質將分數標記在數線上的能力，以 0 到 $\frac{1}{3}$ 的 4 個點來進行分割，得到一份是 $\frac{1}{12}$ ，從頭開始數得到 $\frac{5}{12}$ 。

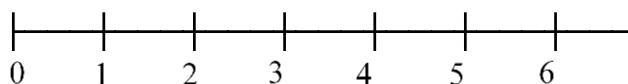
教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-10 能將簡單分數標記在數線上。	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。	N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a-b $ 表示數線上兩點 a,b 的距離。 備註：絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。

補救教學建議

(1) 教師可以透過下列方法繪製分數數線，幫助學生認識分數數線：

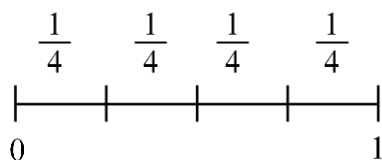
步驟一：先復習整數數線的意義，幫助學生標示出整數數線 0、1、2、...。



步驟二：先建立 0 和 1 間的分數數線。

0 和 1 兩點間的距離是 1，將 1 平分成 4 份，其中的 1 份長 $\frac{1}{4}$ ，

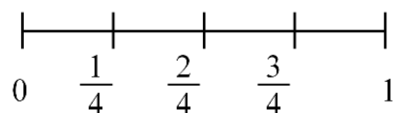
在數線標示每一份的長是 $\frac{1}{4}$ 。



步驟三：透過和 0 的距離是多少的想法，標示出數線上的分數。

數線上的 $\frac{1}{4}$ 指的是 $\frac{1}{4}$ 和 0 的距離是 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{2}{4}$ 指的是 $\frac{2}{4}$ 和 0 的距離是

2 個 $\frac{1}{4}$ ，也就是 $\frac{2}{4}$ ， $\frac{3}{4}$ 指的是 $\frac{3}{4}$ 和 0 的距離是 3 個 $\frac{1}{4}$ ，也就是 $\frac{3}{4}$ ，

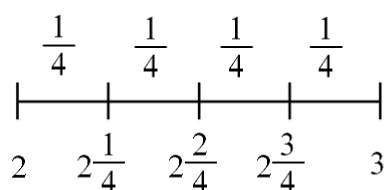


步驟四：仿前面建立 0 和 1 間分數數線的步驟，建立其它的分數數線。

下面以建立 2 和 3 之間的分數數線為例說明：

先標示整數數線 0、1、2、3、...。

數線上的 $2\frac{1}{4}$ 指的是 $2\frac{1}{4}$ 和 2 的距離是 $\frac{1}{4}$ ， $2\frac{2}{4}$ 指的是 $2\frac{2}{4}$ 和 2 的距離是 $\frac{2}{4}$ ， $2\frac{3}{4}$ 指的是 $2\frac{3}{4}$ 和 2 的距離是 $\frac{3}{4}$ 。



步驟五：幫助學生建立其它的分數數線。

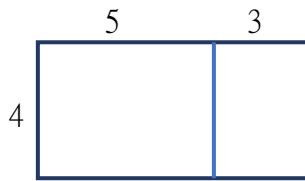
(2) 教師應幫助學生認識帶分數的整數部份相當於數線上的整數。

數線是國中學習直角坐標的先備知識，也是統整所有數系及幾何的重要基礎，教師應多提供學生利用數線解題的經驗。

題號	20		
內容領域		認知歷程向度	
學習內容	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算		
試題內容	20. 甲 = $\frac{1}{3} - 0.33333$，乙 = $\frac{2}{3} - 0.66666$，丙 = $1 - 0.99999$。 大毛說：甲、乙和丙一樣大 二毛說：乙是甲的 2 倍、丙是甲的 3 倍 三毛說：乙是甲的 2 倍、丙是甲的 6 倍 小毛說：乙是甲的 3 倍、丙是甲的 6 倍 請問誰的說法正確？ ① 大毛 ② 二毛 ③ 三毛 ④ 小毛		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.30	0.22	0.44
2*	0.44	0.35	0.46
3	0.14	0.22	0.06
4	0.11	0.20	0.04
未作答	0.01		
通過率	0.44	鑑別度	0.11
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.11，正確答案為選項 2，通過率為 44%，顯示超過四成的學生已具備利用乘法對減法分配律解題的能力。 2.有 30%的學生選擇選項 1(低分組有 22%)，這些學生可能尚未具備利用乘法對減法分配律解題的能力，或是誤解題意，觀察到甲和乙的數字中，$\frac{2}{3}$是$\frac{1}{3}$的 2 倍，0.66666 也是 0.33333 的 2 倍。被減數雖然放大為 2 倍，但減數也是 2 倍，誤認為如此一來一往，減完後的差相等，所以甲=乙，並以此類推，甲=丙。 3.有 14%的學生選擇選項 3(低分組有 22%)、有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 20%)，這些學生尚未具備利用乘法對減法分配律解題的能力，或是無法理解題意。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-a-02 能在四則混合計算中，運用數的運算性質。	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算
補救教學建議			
1.本題需要使用乘法對減法的分配律來解題，而學童是否能將算式視為一個數、一個運算單元，以及是否熟練利用分配律觀察兩數間的倍數關係，實為本題的解題核心。建議教師在學童學習完分配律後，教學間的複雜運算，能多利用分配律進行簡化、速算者要盡量要求學生多使用，以熟練之。例如六年級圓周率相關的運算，包含兩圓圓周長和圓面積的比較、或是圓的複合圖形面積計算等，都是使用分配律簡化運算的好時機。 2.以下先說明乘法對加法的分配律的教學建議；當學生掌握乘法對加法的分配律，再延伸至乘法對減法的分配律。 以「豆漿一杯 20 元，奶茶一瓶 40 元，媽媽各買了 6 杯，要付多少元？」為例，說明如何幫助學生理解乘法對加法的分配律。 教學時應出現下面兩種解題的方法，如果學生只出現其中一種解法，教師應提供另一種解法讓學生討論。 方法一：分別計算 6 杯豆漿和 6 瓶奶茶的錢，再算合起來是多少錢。 $20 \times 6 = 120$，$40 \times 6 = 240$，$120 + 240 = 360$， 並改用併式「$20 \times 6 + 40 \times 6 = 360$」來記錄。 方法二：將「1 杯豆漿和 1 瓶奶茶」看成 1 份，先算 1 份的錢，再算 6 份的錢。 $20 + 40 = 60$，$60 \times 6 = 360$， 並改用併式「$(20 + 40) \times 6 = 360$」來記錄。 理解乘法對加法的分配有兩個層次： 層次一：學生必須分別算出方法一的答案「$20 \times 6 + 40 \times 6 = 360$」和方法二的答案「$(20 + 40) \times 6 = 360$」，發現這兩種方法算出的答案相同，才可以記成「$20 \times 6 + 40 \times 6 = (20 + 40) \times 6$」。 層次二：學生知道它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同，可以記成「$20 \times 6 + 40 \times 6 = (20 + 40) \times 6$」 教師應幫助層次一的學生提升至層次二。 3.可以透過面積模型幫助學生記憶乘法對加法分配律的意義，為國中利用長方形面積記憶乘法公式鋪路。 有兩種計算下列兩個長方形面積和的方法： 方法一：$5 \times 4 + 3 \times 4 = 32$ 方法二：$(5 + 3) \times 4 = 32$			

它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同，可以記成「 $5 \times 4 + 3 \times 4 = (5 + 3) \times 4$ 」。



4.部份學生無法利用乘法對加法的分配律來簡化「 $35 \times 99 + 35$ 」的計算，下面提供三種解題的方法。

方法一：教師直接宣告將 35 改記成 35×1

$$35 \times 99 + 35 = 35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times (99 + 1) = 35 \times 100 = 3500$$

部份教師習慣利用方法一來教學，學生不理解為何要將 35 改記成 35×1 ，很快就會忘記。

方法二：給定「一枝筆賣 35 元，甲先買 99 枝，再買 1 枝，共花多少元？」的情境，再提供三種解法，幫助學生理解 35 是 35×1 的省略記法。

1. $35 \times 99 + 35 \times 1$

2. $35 \times 99 + 35$

3. $35 \times (99 + 1)$

方法三：乘法對加法的分配律是兩種算法答案一定相等的關係，學生可能將乘法對加法的分配律解讀成運算。

學生比較熟悉 $35 \times (99 + 1) \Rightarrow 35 \times 99 + 35 \times 1$ 的乘法運算，比較不熟悉 $35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times (99 + 1)$ 提公因數的運算。

教師可以透過「 $35 \times (99 + 1) = 35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times 99 + 35$ 」，幫助學生理解 35 是 35×1 的省略記法，必須將 35 改記成 35×1 ，才能利用乘法對加法的分配律來解題。

5.延伸至乘法對減法的分配律

「帽子一頂 99 元，老師向謝老闆訂購 101 頂，謝老闆減免 1 頂的錢，只收 100 頂的錢，要付多少元？」，有了之前乘法對加法的分配律的經驗，引導學生發現：「先算原本 101 頂要付的錢再扣掉減免 1 頂的錢」和「最後要付（101 - 1）頂的錢」結果一樣；可以記成「 $99 \times 101 - 99 \times 1 = 99 \times (101 - 1)$ 」。

題號	21		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。		
試題內容	21. 已知 $\frac{\text{甲}}{21} = \frac{\text{乙}}{27}$，$\frac{\text{甲}}{21}$ 和 $\frac{\text{乙}}{27}$ 都是真分數，且甲和乙兩數相差 2，請問甲是多少？ ① 1 ② 3 ③ 7 ④ 9		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.15	0.08
2	0.28	0.37	0.15
3*	0.43	0.27	0.64
4	0.18	0.20	0.13
未作答	0.01		
通過率	0.43	鑑別度	0.36
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.36，正確答案為選項 3，通過率為 43%，顯示超過四成的學生已具備利用約分、擴分解決等值分數問題的能力。 2.有 11%的學生選擇選項 1(低分組有 15%)，這些學生可能不具備利用約分、擴分解決等值分數問題的能力。 3.有 28%的學生選擇選項 2(低分組有 37%)，這些學生可能不具備利用約分、擴分解決等值分數問題的能力，以 21 和 27 的最大公因數為答案。 4.有 18%的學生選擇選項 4(低分組有 20%)，這些學生可能不具備利用約分、擴分解決等值分數問題的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。	5-n-07 能用通分作簡單異分母分數的比較與加減。

補救教學建議

1. 四年級已幫助學生在量的情境中理解等值分數，例如 $\frac{1}{2}$ 條繩子和 $\frac{4}{8}$ 條繩子一樣長，一袋水餃有 40 個， $\frac{1}{2}$ 袋水餃和 $\frac{4}{8}$ 袋水餃一樣多。

本基本學習內容幫助學生透過約分和擴分，將一個分數改記成它的等值分數，例如將 $\frac{4}{8}$ 改記成 $\frac{1}{2}$ ，或將 $\frac{1}{2}$ 改記成 $\frac{4}{8}$ ，為用通分作簡單異分母分數的比較與加減鋪路。

2. 區分等值分數和約分、擴分與通分的意義：

等值分數：在選取相同單位量的情境下，兩分數雖然等分割的份數與合成的份數不同，但是兩分數所代表的量(值)一樣多。

例如： $\frac{1}{2}$ 條繩子和 $\frac{4}{8}$ 條繩子一樣長，可以記成 $\frac{1}{2}$ 條 $=\frac{4}{8}$ 條。

$\frac{2}{5}$ 盒蘋果和 $\frac{4}{10}$ 盒蘋果一樣多，可以記成 $\frac{2}{5}$ 盒 $=\frac{4}{10}$ 盒。

約分、擴分：將一個分數轉換成它的等值分數稱之為約分或擴分。分割份數由

少變多稱為擴分，例如 $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ ；分割份數由多變少稱為約分，例如 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ 。

通分：透過約分或擴分，讓兩個分數分母相等的活動稱為通分。

3. 約分與擴分教學時，因為分割的份數不同，因此要選用不同的量詞來描述，以將圓形色紙 3 等分及 6 等分為例，教師應說明將 1 張圓形色紙平分成 3 大塊，將另一張一樣大的圓形色紙平分成 6 小塊。

教師不可以說將 1 張圓形色紙平分成 3 塊，將另一張一樣大的圓形色紙平分成 6 塊，因為 3 塊中的「1 塊」和 6 塊中的「1 塊」大小不一樣，學生會混淆量詞「塊」的意義。

建議教學方式如下：



平分成 3 大塊



平分成 6 小塊

擴分： $\frac{1}{3}=\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{2}{6}$ (1 大塊可以換成 2 小塊，3 大塊可以換成 6 小塊)

約分： $\frac{2}{6}=\frac{2\div 2}{6\div 2}=\frac{1}{3}$ (2 小塊可以換成 1 大塊，6 小塊可以換成 3 大塊)

題號	22		
內容領域		認知歷程向度	
學習內容	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。		
試題內容	22. 三角形甲三個角都不一樣大，且三個角的角度都是整數。 已經知道最小角的角度是 50 度，請問下列敘述何者正確？ ① 三角形甲一定是銳角三角形 ② 三角形甲一定是直角三角形 ③ 三角形甲一定是鈍角三角形 ④ 無法判斷三角形甲是直角、鈍角或銳角三角形		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.34	0.26	0.40
2	0.12	0.20	0.04
3	0.17	0.27	0.08
4	0.36	0.26	0.48
未作答	0.01		
通過率	0.34	鑑別度	0.13
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.13，正確答案為選項 1，通過率為 34%，顯示超過三成的學生已具備利用三角形內角和為 180 度解題的能力。 2.有 12%的學生選擇選項 2(低分組有 20%)，這些學生可能無法理解題意；或是利用三角形內角和為 180 度，扣除已知角的 50 度，再扣除直角的 90 度後，還有 40 度，認為 50 度、90 度、40 度可形成一個三角形，因而選擇此答案。 3.有 17%的學生選擇選項 3(低分組有 27%)，這些學生可能知道三角形內角和為 180 度，利用最小角為 50 度，求出其餘兩角的角度和為 130 度，受到 130 度為鈍角的影響，所以判定此三角形必定為鈍角三角形。 4.有 36%的學生選擇選項 4(低分組有 26%)，這些學生可能無法理解題意；或是知道三角形內角和為 180 度，利用最小角為 50 度，求出其餘兩角的角度和為 130 度，但忽略了 50 度為最小角，認為剩餘兩個角可以任意取一個鈍角搭配一個銳角，或是取一個直角搭配一個銳角，或是取一個銳角搭配一個銳角，所以可形成鈍角三角形、直角三角形或銳角三角形，因此此題無法判斷。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-s-04 能認識角，並比較角的大小。	5-s-01 能透過操作，理解三	8-s-10 能理解三角形的基本性質。

		角形三內角和為 180 度。	
--	--	----------------	--

補救教學建議

- 1.本題的解題過程中，學生不知要知道三角形內角和為 180 度，更要能掌握銳角、直角、鈍角三角形的形成條件：

鈍角三角形：由一個鈍角和二個銳角組成，最大角為鈍角，大於 90 度。

直角三角形：由一個直角和二個銳角組成，最大角為直角，等於 90 度。

銳角三角形：由三個銳角組成，最大角小於 90 度。

因此，三角形中，只要求出最大角的度數，就可以判定該三角形是鈍角、直角或銳角三角形。

- 2.四年級教師教學時，不宜透過「有一個角是鈍角的三角形」來定義鈍角三角形，四年級教師應透過「有一個角是鈍角、其它二個角是銳角的三角形」來定義鈍角三角形。因為五年級才引入「三角形三內角和為 180 度」的性質，四年級學生不知道有一個角是鈍角的三角形，其他兩個角一定是銳角。

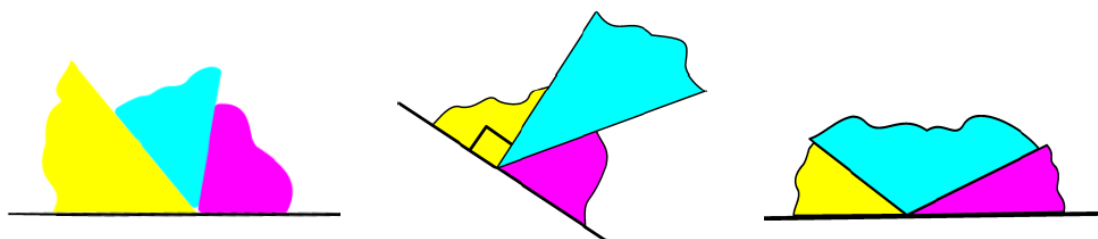
五年級教師應先複習四年級的定義，並說明因為已經學過三角形內角和為 180 度，因此有一個角是鈍角時，另外兩個角一定是銳角，所以才將四年級的定義簡化為「有一個角是鈍角的三角形稱為鈍角三角形」。

- 3.下面提供三種幫助學生理解三角形的內角和是 180 度的方法：

方法一：拿出或畫出很多不同的三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生測量出這些三角形的所有角，再分別算出這些三角形三個角的和。幫助學生察覺所有三角形三個角的角度和大約都是 180 度。

方法二：拿出一些三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生剪下三角形的 3 個角，再將同一個三角形的 3 個角拼湊在一起，幫助學生察覺所有三角形的三個角都可以拼成一個平角，這些三角形 3 個角的角度和大約都是 180 度。

方法三：教師也可以只剪下兩個角，再和沒有剪下的那個角拼湊在一起，也能夠拼出一個平角，得到三角形 3 個角的角度和大約都是 180 度。



- 4.本分年細目教學重點是所有三角形的內角和都是 180 度，教師不宜只求出某一個三角形的內角和是 180 度，就說明所有三角形的內角和都是 180 度。教師應幫助學生認識，直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形的內角和都是 180 度。

題號	23		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。		
試題內容	23. 已知 $\text{甲} \div 257 = 38 \cdots 100$。請問下列何者為 $\text{甲} \div 38$ 的商及餘數？ ① 商為 260，餘數為 16 ② 商為 259，餘數為 24 ③ 商為 257，餘數為 100 ④ 商為 257，餘數為 38		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.17	0.04
2*	0.27	0.16	0.41
3	0.49	0.47	0.48
4	0.13	0.18	0.06
未作答	0.01		
通過率	0.27	鑑別度	0.25
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.25，正確答案為選項 2，通過率為 27%，顯示近三成的學生已掌握乘除互逆的概念，並具備利用除法直式計算解題的能力。 2.有 10%的學生選擇選項 1(低分組有 17%)，這些學生可能未掌握乘除互逆概念，也不具備利用除法直式計算解題的能力。 3.有 49%的學生選擇選項 3(低分組有 47%)，這些學生可能已掌握乘除互逆的概念，但是忘記餘數必須小於除數的約定。$\text{甲} \div 257 = 38 \cdots 100$，$\text{甲} \div 38 = 257 \cdots 100$，得到商為 257，餘數為 100 的答案。 4.有 13%的學生選擇選項 4(低分組有 18%)，這些學生可能未掌握乘除互逆概念，也不具備利用除法直式計算解題的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

補救教學建議

1.本學習指標為 4-n-03 之後續學習概念，故學生應該已經能掌握餘數不是 0 的乘除互逆概念。而本學習指標則將被除數及商數的範圍由整數延伸至小數。

2.本題有兩種解題的方法：

方法一：透過乘除互逆算出被除數甲是多少後，再利用直式計算出答案。

$$\text{甲} \div 257 = 38 \dots 100, \text{甲} = 257 \times 38 + 100 = 9866,$$

$$9866 \div 38 = 259 \dots 24$$

方法二：甲 $\div 257 = 38 \dots 100$ ，也可以記成甲 $\div 38 = 257 \dots 100$ ，餘數 100 除以 38， $100 \div 38 = 2 \dots 24$ ，也就是甲 $\div 38 = (257 + 2) \dots 24$ 。

教師應幫助使用方法一解題的學生，改用方法二解題。

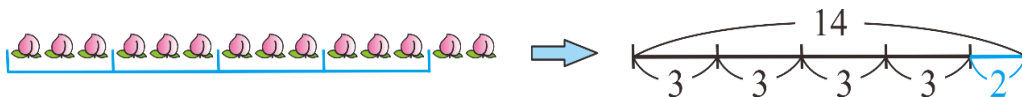
3.餘數不是 0 的乘除互逆指的是以「 $a \div b = q \dots r, 0 < r < b$ 」格式記錄餘數不是 0 的除法結果時，可以改記成 $a = b \times q + r$ 。

餘數是 0 的乘除互逆問題：24 個桃子，平分成幾堆後，每堆有 3 個桃子？

餘數不是 0 的乘除互逆問題：26 個桃子，平分成幾堆後，每堆有 3 個桃子，還剩下 2 個？

4.餘數不是 0 情境的乘除互逆比較困難，教師可以布置「桌上有 14 顆桃子，一堆桃子有 3 顆，共有 4 堆，剩下 2 顆桃子」的情境，幫助學生理解該情境，同時可以解讀成「1 堆桃子有 3 顆，4 堆桃子有 12 顆，加上剩下的 2 顆桃子，共有 14 顆桃子，可以記成 $3 \times 4 + 2 = 14$ 」，「14 顆桃子，平分成 4 堆，一堆有 3 顆桃子，還剩下 2 顆桃子，可以記成 $14 \div 4 = 3 \dots 2$ 」，「14 顆桃子，每 3 顆分一堆，能分成 4 堆，還剩下 2 顆桃子，可以記成 $14 \div 3 = 4 \dots 2$ 」，幫助學生認識餘數不是 0 情境的乘除互逆。

教師也可以將上述桃子的情境，改用下面的線段圖來表徵。在線段圖中也可以同時看到「 $3 \times 4 + 2 = 14$ 」、「 $14 \div 4 = 3 \dots 2$ 」及「 $14 \div 3 = 4 \dots 2$ 」。



5.下面以「26 顆桃子，平分成幾堆後，每堆有 3 顆，還剩下 2 顆？」為例，說明如何幫助學生利用乘除互逆的關係來解題。

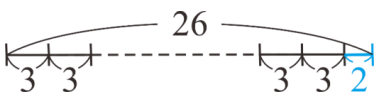
本基本學習內容提供兩種幫助學生利用乘除互逆關係解題的方法：

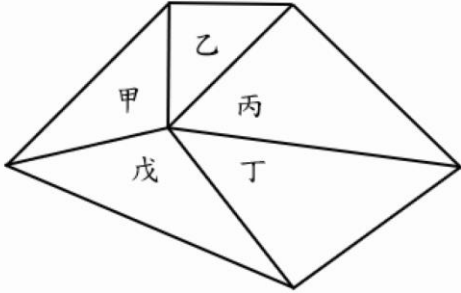
第一種：透過文字題的情境

「26 顆桃子，平分成幾堆後，每堆有 3 顆，還剩下 2 顆」和「26 個桃子，拿走 2 顆桃子後，每 3 顆桃子分成一堆，全部可以分成幾堆桃子」的意思相同，因此可以利用 $26 - 2 = 24$ ， $24 \div 3 = 8$ ，算出平分成 8 堆。

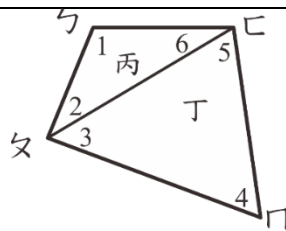
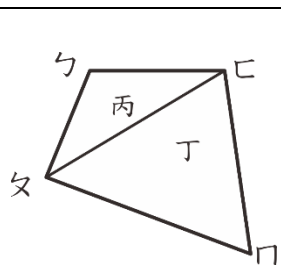
第二種：透過線段圖

線段圖中可以知道 $26 - 2 = 24$ ， $24 \div 3 = \square$ 和 $26 \div 3 = \square \dots 2$ 的意思相同，可以利用 $26 - 2 = 24$ ， $24 \div 3 = 8$ 算出有 8 堆桃子。



題號	24		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。		
試題內容	24. 三角形 ABC 中，角 A、角 B 和角 C 的角度和稱為三角形 ABC 的內角和；五邊形 $ABCDE$ 中，角 A、角 B、角 C、角 D 和角 E 的角度和稱為五邊形 $ABCDE$ 的內角和。 用甲、乙、丙、丁、戊五個三角形剛好拼成一個五邊形，請問「這 5 個三角形的內角和」與「五邊形的內角和」相差多少度？  ① 108 ② 180 ③ 360 ④ 720		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.23	0.10
2	0.37	0.40	0.30
3*	0.30	0.18	0.48
4	0.14	0.17	0.10
未作答	0.02		
通過率	0.30	鑑別度	0.29
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.29，正確答案為選項 3，通過率為 30%，顯示有三成的學生已具備利用三角形內角和為 180 度性質解題的能力。 2. 有 17% 的學生選擇選項 1 (低分組有 23%)，這些學生可能不具備利用三角形內角和為 180 度性質解題的能力。這些學生可能誤解題意，先利用 $180 \times (5 - 2) = 540$，算出五邊形的內角和是 540 度，再利用 $540 \div 5 = 108$，算出正五邊形的一個內角是 108 度。 3. 有 37% 的學生選擇選項 2 (低分組有 40%)，這些學生可能不具備利用三角形內角和為 180 度性質解題的能力。 4. 有 14% 的學生選擇選項 4 (低分組有 17%)，這些學生可能不具備利用三角形內角和為 180 度性質解題的能力。			

教材地位分析				
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識	
分 年 細 目	S-4-1：(同 N-4-10) 量角器的操作。實測、估測與計算。以角的合成認識 180 度到 360 度之間的角度。「平角」、「周角」。指定角度作圖。	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。	6-s-01：能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。	
補救教學建議				
1. 有兩種幫助學生理解三角形三內角和是 180 度的方法，分別說明如下： 方法一：拿出或畫出多個不同的三角形(三角形要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生測量出這些三角形的所有角，再分別算出這些三角形三個角的角度和。幫助學生理解這些三角形三個角的角度和大約都是 180 度。 方法二：拿出一些三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生剪下三角形的 3 個角，再將同一個三角形的 3 個角拼湊在一起，幫助學生理解這些三角形的三個角都可以拼成一個平角，因此這些三角形 3 個角的角度和大約都是 180 度。 2. 教學重點是所有三角形的內角和都是 180 度，教師不宜只求出某一個三角形的內角和是 180 度，就說明所有三角形的內角和都是 180 度。 教師應幫助學生認識，直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形的內角和都是 180 度。 3. 有兩種引入四邊形內角和是 360 度的方法，如果學生無法掌握方法一解題的意義，教師應引入方法二。 方法一：沿著對角線將四邊形切割成三角形丙和三角形丁。 三角形丙和三角形丁的內角和都是 180 度，$180 + 180 = 360$，所以四邊形內角和為 360 度。 方法二：沿著對角線將四邊形切割成三角形丙和三角形丁後，將兩個三角形每個內角都標示出來。				



先列出已知的條件： $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180(\text{度})$ ，再列出待求的條件： $\angle ㄅ + \angle ㄊ + \angle ㄇ + \angle ㄆ = (\quad)$

幫助學生理解：四邊形的內角和 $= \angle ㄅ + \angle ㄊ + \angle ㄇ + \angle ㄆ$

$$= \angle 1 + (\angle 2 + \angle 3) + \angle 4 + (\angle 5 + \angle 6)$$

$$= (\angle 1 + \angle 2 + \angle 6) + (\angle 3 + \angle 4 + \angle 5)$$

$$= 180 + 180 = 360(\text{度})。$$

題號	25		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減		
試題內容	25. 甲、乙兩條緞帶一樣長，且緞帶的長度都超過 1 公尺。 甲緞帶用掉了 $\frac{1}{2}$ 條，乙緞帶用掉了 $\frac{1}{2}$ 公尺， 請問哪條緞帶用掉的部分比較長？ ① 甲 ② 乙 ③ 一樣長 ④ 無法比較		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.23	0.13	0.40
2	0.10	0.15	0.06
3	0.55	0.57	0.44
4	0.10	0.12	0.09
未作答	0.02		
通過率	0.23	鑑別度	0.26
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.26，正確答案為選項 1，通過率為 23%，顯示超過二成的學生已具備分數大小比較的能力。 2.有 10%的學生選擇選項 2(低分組有 15%)，這些學生可能不具備分數大小比較的能力。 3.有 55%的學生選擇選項 3(低分組有 57%)，這些學生可能不具備分數大小比較的能力，也可能沒有注意到$\frac{1}{2}$條和$\frac{1}{2}$公尺的單位不一樣，誤認為都是數字$\frac{1}{2}$，所以一樣長。 4.有 10%的學生選擇選項 4(低分組有 12%)，這些學生可能不具備分數大小比較的能力；也可能認為$\frac{1}{2}$條和$\frac{1}{2}$公尺的單位不一樣，所以無法比較長短。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。
補救教學建議			
1. 以「$\frac{3}{8}$盒和$\frac{1}{6}$盒合起來有多少盒？」為例，異分母分數的單位都是「盒」，這兩個異分母分數的單位相同，因此可以相加，數學上約定相同單位的數字加減後的答案必須是一個數字。 要讓$\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$的和是1個數字，必須要找一個比較小的共測單位，例如$\frac{1}{24}$，讓異分母分數$\frac{3}{8}$和$\frac{1}{6}$都變成$\frac{1}{24}$的整數倍，$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$，也就是9個$\frac{1}{24}$，$\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$，也就是4個$\frac{1}{24}$，9個$\frac{1}{24}$和4個$\frac{1}{24}$合起來是13個$\frac{1}{24}$，就能用一個數字$\frac{13}{24}$來描述$\frac{3}{8}$與$\frac{1}{6}$的和，記成$\frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{13}{24}$。 2. 以「1盒蘋果有24顆，$\frac{3}{8}$盒和$\frac{1}{6}$盒合起來有多少盒？」為例，如果學生通分還不熟練，教師也可以提供1盒蘋果的顆數，幫助學生利用整數的乘、除法來解決問題。 $24 \div 8 = 3$，$3 \times 3 = 9$，得到$\frac{3}{8}$盒有9顆。 $24 \div 6 = 4$，$4 \times 1 = 4$，得到$\frac{1}{6}$盒有4顆。 $9 + 4 = 13$，得到$\frac{3}{8}$盒和$\frac{1}{6}$盒合起來13顆。 1 盒 $\longleftrightarrow$ 24 顆 $\div 24$ $\downarrow$ $\downarrow \div 24$ $\frac{1}{24}$ 盒 $\longleftrightarrow$ 1 顆 由上圖可以知道1顆是$\frac{1}{24}$盒，得到13顆是$\frac{13}{24}$盒。			

六年級試題選項分析與教學建議

題號	1		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。		
試題內容	1. 「六年甲班有 26 位學生，期中考的數學平均分數為 91 分，期末考的數學平均分數為 92.5 分，請問全班期末考總分進步多少分？」下列哪個算式能夠算出正確答案？ ① $92.5 - 91 \times 26$ ② $92.5 \times 26 - 91$ ③ $(92.5 + 91) \times 26$ ④ $(92.5 - 91) \times 26$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.21	0.04
2	0.05	0.14	0.00
3	0.08	0.21	0.01
4*	0.75	0.43	0.95
未作答	0.00		
通過率	0.75	鑑別度	0.51
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.51，正確答案為選項 4，通過率為 75%，顯示有七成五的學生已具備小數兩步驟問題列式的能力。 2. 有 11% 的學生選擇選項 1(低分組有 21%)，這些學生可能已具備小數兩步驟問題列式的能力，但是無法掌握「先乘除後加減」的約定，沒有在先算的部分加上括號。 3. 有 5% 的學生選擇選項 2(低分組有 14%)，這些學生可能不具備小數兩步驟問題列式的能力；也可能誤解題意，只算出期末考的總分，但期中考的總分忘了乘以人數。 4. 有 8% 的學生選擇選項 3(低分組有 21%)，這些學生可能不具備小數兩步驟問題列式的能力；也可能不理解題意。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算	6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。	7-n-06 能理解負數的特性並熟練數(含小數、分數)的四則混合運算。

補救教學建議

1. 以小數兩步驟問題「媽媽買了 1.5 公升的果汁 6 瓶，全部分裝到 0.5 公升的杯子裡，相當於裝滿幾杯？」為例，如果學生無法解題，建議教師先將原問題修改為整數情境的問題，例如修改為「媽媽買了 15 公升的果汁 6 瓶，全部分裝到 5 公升的瓶子裡，相當於裝滿幾瓶？」待學生解題成功後，再回到原小數情境的問題，希望學生能類比整數情境的問題來解決相同情境小數的問題。
2. 學生面對沒有見過的多步驟問題時，只能用多個算式來記錄解題活動，學生解題成功後，教師應要求學生將多個算式改記成併式。以後再遇到相同的問題時，應要求學生先用併式列出多步驟問題的算式，再利用逐次減項的記法記錄解題活動。
儘量要求學生以併式的方法思考與演算，這是代數列式的前置經驗。

題號	2		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-03 能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。		
試題內容	2. 有一個分數，分子和分母的和為 105，最簡分數為 $\frac{2}{5}$。這個分數是多少？ ① $\frac{35}{70}$ ② $\frac{30}{75}$ ③ $\frac{25}{80}$ ④ $\frac{20}{85}$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.07	0.15	0.01
2*	0.78	0.49	0.97
3	0.07	0.18	0.00
4	0.08	0.18	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.78	鑑別度	0.48
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.48，正確答案為選項 2，通過率為 78%，顯示近八成的學生已具備利用最簡分數概念解題的能力。 2. 有 7%的學生選擇選項 1(低分組有 15%)，這些學生可能不具備利用最簡分數概念解題的能力；也可能不理解題意。 3. 有 7%的學生選擇選項 3(低分組有 18%)，這些學生可能不具備利用最簡分數概念解題的能力；也可能不理解題意。 4. 有 8%的學生選擇選項 4(低分組有 18%)，這些學生可能不具備利用最簡分數概念解題的能力；也可能不理解題意。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解。	6-n-03 能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。	7-n-02 能理解因數、質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。

補救教學建議

1. 應該指導學生區分「質數」和「互質」的差異。

質數：質數討論的是一個數的性質，判斷該數是否滿足只有 1 和自己兩個因數的條件。

互質：互質討論的是 a 、 b 兩個數的關係，當 $(a, b)=1$ ，數學上稱 a 和 b 互質。

例如：1 不是質數，但是 $(1, 6)=1$ ，所以 1 和 6 互質。

2. 最簡分數是很多等值分數比較的結果，教師不宜透過直接宣告「一個分數的分子和分母互質，我們稱這個分數為最簡分數」的方式引入最簡分數。

教師應透過比較活動引入最簡分數，例如列出一些分子和分母都比 $\frac{18}{30}$ 小的等值

分數 $\frac{9}{15}$ 、 $\frac{6}{10}$ 、 $\frac{3}{5}$ ，說明這些分數中， $\frac{3}{5}$ 的分子和分母最小，稱 $\frac{3}{5}$ 為這些等值分數中的最簡分數，最後再說明可以利用分子和分母互質，判斷該分數是最簡分數。

3. 在進行過上述的學習過程後，以下以「將 $\frac{24}{18}$ 化為最簡分數」為例，說明如何幫助學生解題：

步驟一：先溝通最簡分數的意義：當一個分數的分子和分母互質時，我們稱該分數為最簡分數。

步驟二：復習互質的意義：兩整數除了 1 以外沒有其它的公因數，稱該兩數互質。

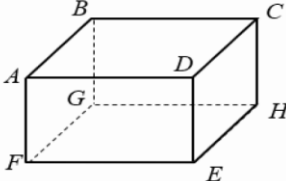
步驟三：幫助學生用短除法找出 18 和 24 的最大公因數

2	18	24	(先提出共同的質因數 2)
3	9	12	(再提出共同的質因數 3)
	3	4	(確認無法再提出共同的質因數了)

18 和 24 的最大公因數，就是將兩次所提出來的共同質因數(2 和 3)之乘積，也就是 $2 \times 3 = 6$ 。

步驟四：說明要求得最簡分數時，需要透過約分活動，將分子與分母同時除以兩數的最大公因數。

步驟五： $\frac{24}{18} = \frac{24 \div 6}{18 \div 6} = \frac{4}{3}$ ，得到 $\frac{24}{18}$ 的最簡分數是 $\frac{4}{3}$ 。

題號	3		
內容領域	幾何	認知歷程向度	程序執行
學習內容	6-s-04 能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。		
試題內容	3. 有關下圖長方體面與線的關係，下列敘述何者<u>錯誤</u>？  ① $\overline{AB}$ 和面 $ADEF$ 垂直 ② $\overline{DE}$ 和面 $ABCD$ 垂直 ③ $\overline{DE}$ 和面 $ADEF$ 垂直 ④ $\overline{HE}$ 和面 $BCHG$ 垂直		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.19	0.03
2	0.11	0.20	0.04
3*	0.67	0.40	0.89
4	0.11	0.20	0.04
未作答	0.00		
通過率	0.67	鑑別度	0.49
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.49，正確答案為選項 3，通過率為 67%，顯示近七成的學生已具備辨識線與面垂直的能力。 2.有 10%的學生選擇選項 1(低分組有 19%)，這些學生可能不具備辨識線與面垂直的能力；也可能誤解題意，選擇正確的敘述。 3.有 11%的學生選擇選項 2(低分組有 20%)，這些學生可能不具備辨識線與面垂直的能力；也可能誤解題意，選擇正確的敘述。 4.有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 20%)，這些學生可能不具備辨識線與面垂直的能力；也可能誤解題意，選擇正確的敘述。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。	6-s-04 能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。	9-s-13 能認識線與平面、平面與平面的垂直關係與平行關係。
補救教學建議			

(1).建議教師多舉一些日常生活中面與面互相垂直的例子，例如天花板和地板、桌面的隔板等；以及面與面互相平行的例子，例如牆壁和地板、桌面和側面板等，幫助學生認識面和面的垂直及平行的現象。

(2).面會向四面八方無限的延伸，而長方體的面是封閉的多邊形區域。在檢驗長方體底面和側面是否互相垂直時，常將長方體底面平放在桌面上來檢驗，當底面在桌面上時，無法檢驗底面和側面是否互相垂直，只能檢驗桌面和側面是否互相垂直，許多學生無法掌握長方體的底面與桌面之間的包含關係，不知道長方體的側面和桌面互相垂直時，長方體的側面也和底面互相垂直。

建議教師製作上底和下底是空的，而側面都存在的長方體燈籠骨架模型，將下底平放在桌面上，幫助學生察覺：燈籠骨架模型的底面都在桌面上，底面和桌面都是同一個平面，底面和桌面重合。

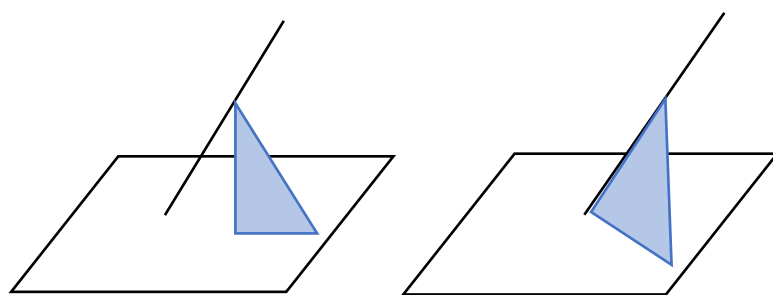
(3).國小階段不引入面與面平行與垂直的嚴格定義。不宜將兩線平行的定義直接類比至兩平面的平行關係。

兩線平行的定義：和一線同時垂直的兩線互相平行。

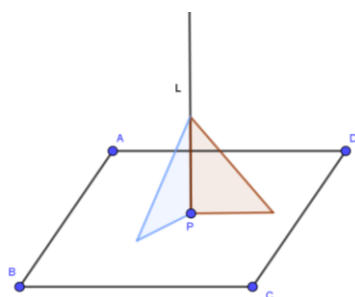
兩平面平行的定義不是：和一平面同時垂直的兩平面互相平行；

而是：和一線同時垂直的兩平面互相平行。

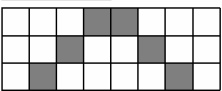
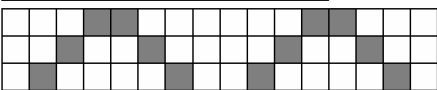
(4).空間中平面與直線的垂直關係很多老師僅用一個直角三角板檢驗，可能會發生如下圖的誤差，誤以為直線與平面垂直。因此建議老師應以兩個直角三角板擺放不同方向，才能真正確認直角三角板、直線及平面是處處貼合，如圖(五)。



使用三角板僅檢驗一次無法確認直線與平面垂直



建議老師以兩個直角三角板擺放不同方向

題號	4		
內容領域	代數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-a-04(同 6-n-13) 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。		
試題內容	4. 晏晏用灰色和白色的方塊排出有規律的四個圖案，如果按照這個規律繼續排下去，圖十需要用到多少個白色的方塊？ 圖一  圖二  圖三  圖四  ① 30 ② 72 ③ 90 ④ 120		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.27	0.34	0.18
2	0.04	0.09	0.00
3*	0.63	0.42	0.80
4	0.06	0.14	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.63	鑑別度	0.38
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.38 正確答案為選項 3，通過率為 63%，顯示超過六成的學生已具備利用常用數量關係列出恰當算式並進行解題的能力。 2.有 27%的學生選擇選項 1(低分組有 34%)，這些學生可能已具備利用常用數量關係列出恰當算式並進行解題的能力，但誤解題意，以為要算出第十個圖的黑色方塊數量。 3.有 4%的學生選擇選項 2(低分組有 9%)，這些學生可能不具備利用常用數量關係列出恰當算式並進行解題的能力。 4.有 6%的學生選擇選項 4(低分組有 14%)，這些學生可能已具備利用常用數量關係列出恰當算式並進行解題的能力，但誤解題意，以為要算出第十個圖的全部方塊數量。			

教材地位分析											
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識								
分年細目		6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13)	A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。								
補救教學建議											
1.將圖一到圖三的白色方塊列表表示											
<table border="1"> <tr> <th>圖案</th><th>圖一</th><th>圖二</th><th>圖三</th></tr> <tr> <td>白色方塊</td><td>9</td><td>18</td><td>27</td></tr> </table>				圖案	圖一	圖二	圖三	白色方塊	9	18	27
圖案	圖一	圖二	圖三								
白色方塊	9	18	27								
2.從上表中觀察圖 n 的數量是 $9 \times n$											
3.利用 2.的算式推算圖三，得到圖三是 $9 \times 3 = 27$											
4.從圖案中驗證圖三的答案為 27											
5.利用 2.的算式推算圖四，得到圖四是 $9 \times 4 = 36$											
4.從圖案中驗證圖四的答案為 36											
5.運用 $9 \times n$ 推算第十個圖的答案為 $9 \times 10 = 90$											

題號	5		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-a-01 能理解等量公理。		
試題內容	5. 已知 $y + 25 = \frac{106}{3}$，請問 $(y + 25) \times 3 + 25 = ?$ ① 131 ② $60\frac{1}{3}$ ③ 56 ④ $\frac{31}{3}$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.63	0.29	0.91
2	0.18	0.31	0.05
3	0.10	0.23	0.02
4	0.09	0.16	0.02
未作答	0.01		
通過率	0.63	鑑別度	0.63
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.63，正確答案為選項 1，通過率為 63%，顯示超過六成的學生已具備利用等量公理解題的能力。 2. 有 18% 的學生選擇選項 2(低分組有 31%)，這些學生可能不具備利用等量公理解題的能力，先將 $\frac{106}{3}$ 改記為帶分數再與 25 直接相加，而忘了要先乘以 3。 3. 有 10% 的學生選擇選項 3(低分組有 23%)，這些學生可能不具備利用等量公理解題的能力，將 y 算出後，沒注意要 +25 而直接乘以 3 再加上 25 得出 56。 4. 有 9% 的學生選擇選項 4(低分組有 16%)，這些學生不具備利用等量公理解題的能力沒有理解題意，而是直接將 y 的值算出來。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-n-03 能用 $<$ 、 $=$ 與 $>$ 表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律。(同 2-a-01)	6-a-01 能理解等量公理。	7-a-04 能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。

補救教學建議

1. 等量公理： a, b, c 三個數，若 $a=b$ 則滿足 $a+c=b+c$ ； $a-c=b-c$ ； $a\times c=b\times c$ ； $a\div c=b\div c$ ($c\neq 0$)。
2. 教師可透過操作天平，幫助學生理解利用等量公理解題的意義，不宜透過數的運算公式來理解等量公理解題的意義。

教師可以幫助學生將未知數 x 看成沙包、數字看成砝碼，透用操作天平，說明如何解決「 $x+5=8$ 」，並用多個等式記錄解題過程。

 - (1) 「 $x+5=8$ 」可以看成天平左邊有 1 個沙包和 5 個砝碼，天平右邊有 8 個砝碼，天平兩邊一樣重。
 - (2) 將天平兩邊同時拿走 5 個砝碼，天平兩邊還是一樣重，可以記成「 $x+5-5=8-5$ 」。

此時，天平左邊剩下 1 個沙包，天平右邊剩下 3 個砝碼，得到沙包和 3 個砝碼一樣重，也就是 $x=3$ 的答案。

題號	6		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	程序執行
學習內容	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。		
試題內容	6. 下表是甲、乙、丙三輛車行駛的速率。		
	甲車	乙車	丙車
	16 公尺/秒鐘	900 公尺/分鐘	0.95 公里/分鐘
	請問哪輛車最快，哪輛車最慢？		
	① 甲車最快，乙車最慢 ② 甲車最快，丙車最慢 ③ 乙車最快，甲車最慢 ④ 丙車最快，乙車最慢		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.61	0.28	0.90
2	0.12	0.23	0.03
3	0.10	0.21	0.02
4	0.16	0.28	0.05
未作答	0.00		
通過率	0.61	鑑別度	0.62
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.62，正確答案為選項 1，通過率為 61%，顯示超過六成的學生已具備速率單位化聚及快慢比較的能力。			
2.有 12%的學生選擇選項 2(低分組有 23%)，這些學生可能不具備速率單位化聚及快慢比較的能力，他們能將秒速轉換成分速，知道甲最快，而丙最慢可能是在公里與公尺換算上失誤。			
3.有 10%的學生選擇選項 3(低分組有 21%)，這些學生可能不具備速率單位化聚及快慢比較的能力，認為 900 公尺數字最大，所以乙車快，16 公尺數字最小，所以甲車最慢。			
4.有 16%的學生選擇選項 4(低分組有 28%)，這些學生可能不具備速率單位化聚及快慢比較的能力，他們可能專注分速，判斷出丙車最快，乙車較慢，而沒有注意到甲車換算成分速後會比丙車快。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。	

	能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。 6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。		
補救教學建議			
1. 以甲 3 小時跑 5 公里，乙 5 小時跑 8 公里，誰跑得比較快為例，有兩種比較誰比較快的方法。 第一種：時間相同，比較誰跑的距離比較長 甲：3 小時跑 5 公里$\Rightarrow$15 小時跑 25 公里 乙：5 小時跑 8 公里$\Rightarrow$15 小時跑 24 公里 25 公里比 24 公里長，也就是 25 比 24 大，甲跑得比較快 第二種：距離相同，比較誰跑的時間比較短 甲：3 小時跑 5 公里$\Rightarrow$24 小時跑 40 公里 乙：5 小時跑 8 公里$\Rightarrow$25 小時跑 40 公里 24 小時比 25 小時短，也就是 24 比 25 小，甲跑得比較快。 由上面的說明可以知道，可以有兩種定義速率的方法： 第一種：速率＝距離：時間 第二種：速率＝時間：距離 第一種方法中時間相同時，距離的數字比較大時，速率比較快，距離的數字比較小時，速率比較慢；第二種方法中距離相同時，時間的數字比較大時，速率比較慢，時間的數字比較小時，速率比較快。 為了讓速率的數字比較大時，跑得比較快，數字比較小時，跑得比較慢，數學上都選擇第一種方法為速率的定義。 2. 以「汽車的時速 90 公里，它的分速是多少公尺？」為例，學生比較無法掌握比值想法解決速度換單位問題解題的意義。 $90 \frac{\text{公里}}{\text{小時}} = 90 \times \frac{1000 \text{ 公尺}}{60 \text{ 分鐘}} = 90 \times \frac{1000}{60} \frac{\text{公尺}}{\text{分鐘}} = 1500 \frac{\text{公尺}}{\text{分鐘}}$ 建議教師可以透過比的想法，來幫助學生解決時速、分速及秒速單位間的換算問題。 $90 \text{ 公里/小時} = 90 \text{ 公里} : 1 \text{ 小時}$ $= 90000 \text{ 公尺} : 60 \text{ 分鐘}$			

$=90000 \text{ 公尺} \div 60 : 60 \text{ 分鐘} \div 60$ $=1500 \text{ 公尺} : 1 \text{ 分鐘 (分速是 1500 公尺)}$			
題號	7		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解(質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100)。		
試題內容	7. 下面是用短除法將 A 做質因數分解的結果。 $ \begin{array}{r} 3 \overline{) A} \\ B \overline{) 26} \\ C \end{array} $ 下列關於短除法的敘述何者<u>錯誤</u>？ ① A 只有 3 個因數 ② $A = 3 \times B \times C$ ③ $A = 78$ ④ B、C 都是質數		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.55	0.28	0.83
2	0.16	0.26	0.06
3	0.10	0.19	0.02
4	0.19	0.27	0.08
未作答	0.00		
通過率	0.55	鑑別度	0.56
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.56，正確答案為選項 1，通過率為 55%，顯示有五成五的學生已具備利用短除法做質因數分解的能力。 2.有 16%的學生選擇選項 2(低分組有 26%)，這些學生可能不具備利用短除法做質因數分解的能力；也可能誤解題意，選擇正確的敘述。 3.有 10%的學生選擇選項 3(低分組有 19%)，這些學生可能不具備利用短除法做質因數分解的能力；也可能誤解題意，選擇正確的敘述。 4.有 19%的學生選擇選項 4(低分組有 27%)，這些學生可能不具備利用短除法做質因數分解的能力；也可能誤解題意，選擇正確的敘述。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-05	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的	6-n-02

	能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	分解(質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100)。	能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。
--	----------------------------	--	-----------------------

補救教學建議

1. 國小和國中階段都幫助學生用短除法做質因數的分解，差別是國小階段質因數分解的算式用連乘積來表示，國中階段質因數分解的算式用指數來表示。
2. 以將 24 分解為質因數的乘積為例，部份教師認為樹狀圖法和短除法是兩種不同的解題方法，其實不然，短除法只是讓樹狀圖法更有效率的方法。

建議教師先引入樹狀圖法，幫助學生將 24 分解成質因數的乘積，再要求學生利用短除法逐一的提出質因數，幫助學生發現短除法可以更有效率的將給定數質因數分解。

3. 教師可以透過「把 24 分解成幾個大於 1 整數相乘的算式」，依下列步驟，將 24 質因數分解。

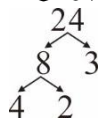
步驟一：透過樹狀圖，將 24 分解成 8 和 3 的乘積，並記成 $24=8\times 3$ 。



步驟二：3 不可以分解成 2 個大於 1 整數相乘的算式。

此時，教師可以說明，不能分解成 2 個大於 1 整數相乘的數，它們的因數只有 1 和自己，所以不能分解成 2 個大於 1 整數相乘的數是質數。

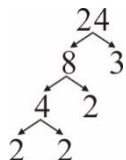
步驟三：透過樹狀圖，將 8 分解成 4 和 2 的乘積，並記成 $24=8\times 3=4\times 2\times 3$



步驟四：2 不可以分解成 2 個大於 1 整數相乘的算式。

步驟五：透過樹狀圖將 4 分解成 2 和 2 乘積，並記成

$$24=8\times 3=4\times 2\times 3=2\times 2\times 2\times 3。$$



步驟六：稱把 24 分解成 $24=2\times 2\times 2\times 3$ 的過程為質因數分解。

2 和 3 都是質數，2 和 3 也是 24 的因數，稱 2 和 3 是 24 的質因數。

4. 以「將 24 質因數分解」為例，學生透過樹狀圖，可以有很多不同的分法。

教師應幫助學生理解，如果將質因數由小至大排列，上面的記法都可以記成 $24=2\times 2\times 2\times 3$ ，為國中引入質因數的標準分解式鋪路。

教師在課堂活動中，可以要求學生質因數分解後，將質因數由小至大排列，但是評量時，應接受所有合理的記法。

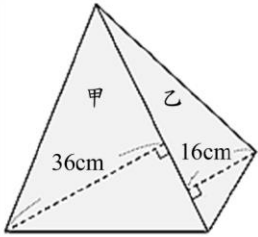
5. 學生有透過樹狀圖，將給定數分解成質因數乘積的經驗後，教師可以幫助學生利用短除法，逐一的提出質因數，幫助學生較有效率的進行質因數分解。

以「將 24 質因數分解」為例，說明如何幫助學生解題：

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 24} \\
 \underline{2 12} \\
 2 \overline{) 12} \\
 \underline{2 6} \\
 2 \overline{) 6} \\
 \underline{2 3} \\
 3
 \end{array}$$

步驟一：先提出質因數 2，將 24 記成 $24=2\times 12$ ，

步驟二：再提出質因數 2，將 24 記成 $24=2\times 2\times 6$ ，

步驟三：再提出質因數 2，將 24 記成 $24=2\times 2\times 2\times 3$ ， 步驟四：3 是質因數，可以得到 $24=2\times 2\times 2\times 3$ 。 步驟五：直接透過短除法將 24 記成 $24=2\times 2\times 2\times 3$ 。			
題號	8		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。		
試題內容	8. 下圖是由甲和乙兩個三角形拼成的圖形，已經知道三角形甲和三角形乙的面積和是 1040 平方公分，請問三角形甲的面積比三角形乙的面積大多少平方公分？  ① 320 ② 400 ③ 520 ④ 720		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.24	0.07
2*	0.41	0.21	0.67
3	0.31	0.38	0.20
4	0.11	0.15	0.06
未作答	0.01		
通過率	0.41	鑑別度	0.45
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.45，正確答案為選項 2，通過率為 41%，顯示超過四成的學生已具備利用比和比值解題的能力。 2. 有 15% 的學生選擇選項 1 (低分組有 24%)，這些學生可能不具備利用比和比值解題的能力，只算出三角形乙的面積。 $\triangle$ 甲面積： $\triangle$ 乙面積 = 36:16 = 9:4，透過 $1040 \div (9 + 4) \times 4 = 320$ ，得到 320 的答案。 3. 有 31% 的學生選擇選項 3 (低分組有 38%)，這些學生可能不具備利用比和比值解題的能力。算三角形的底時發生錯誤，透過 $1040 \div (36 + 16) \div 2 = 10$ ， $1040 \div (36 - 16) \times 10 \div 2 = 520$ ，得到 520 的答案。			

4.有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 15%)，這些學生可能不具備利用比和比值解題的能力，只算出三角形甲的面積。 $\triangle$ 甲面積： $\triangle$ 乙面積 $=36:16=9:4$ ，透過 $1040 \div (9+4) \times 9 = 720$ ，得到 720 的答案。

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活上的應用(含「百分率」、「折」)。	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比為例。
補救教學建議			
1.本題有兩種解題方法。 方法一、透過三角形面積公式，先算出甲、乙三角形的底、面積後，再算出兩個三角形的面積差。如下所示： 三角形面積＝底×高÷2，底×36÷2＋底×16÷2＝1040，底＝40。 40×36÷2－40×16÷2＝400 方法二、利用比解題。 甲和乙是同底部不等高的兩個三角形，兩三角形面積的比＝兩三角形高的比，△甲面積：△乙面積＝36：16＝9：4。 再利用最簡單整數比解題，△甲面積：△乙面積＝9：4，把甲面積看成13份，乙面積看成4份，1040÷(9＋4)＝80，80×(9－4)＝400。 建議教師幫助使用方法一解題的學生，理解方法二解題的方法。			
2.以相同口味的紅茶牛奶為例，說明最簡單整數比的意義。			
紅茶 牛奶 200 公升： 120 公升 100 公升： 60 公升 50 公升： 30 公升 10 公升： 6 公升 5 公升： 3 公升			
步驟一：說明上面的比都是相等的比，調出的紅茶牛奶口味都相同。			
步驟二：溝通比較簡單比的意義 「100：60」和「200：120」前後項的數字都是整數，「100：60」的數字都比「200：120」的數字簡單，稱「100：60」是比「200：120」簡單的整數比。「5：3」的數字都比「10：6」的數字簡單，稱「5：3」是比「10：6」簡單的整數比。			
步驟三：引入最簡單整數比的記法，5和3互質，找不到比5：3更簡單的整數比，數學上稱5：3為最簡單整數比。			
步驟四：說明最簡單整數比的意義，5：3是上面這些相同口味紅茶牛奶的調配方法，這些紅茶牛奶都可以利用紅茶5份和牛奶3份的方式調出。			

題號	9		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。		
試題內容	9. 下列哪種標示方法的售價和「40 元 / 200 公克」<u>不相同</u>？ (1公斤 = 1000公克) ① 20 元 / 100 公克 ② 100 元 / 500 公克 ③ 400 元 / 2 公斤 ④ 500 元 / 5 公斤		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.12	0.00
2	0.16	0.32	0.04
3	0.09	0.19	0.02
4*	0.70	0.38	0.94
未作答	0.00		
通過率	0.70	鑑別度	0.57
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.57，正確答案為選項 4，通過率為 70%，顯示有七成的學生已具備利用導出單位記錄生活中問題的能力。 2.有 4%的學生選擇選項 1(低分組有 12%)，這些學生可能不具備利用導出單位解決生活中問題的能力；也可能誤解題意，選出和題幹售價相同的選項。 3.有 16%的學生選擇選項 2(低分組有 32%)，這些學生可能不具備利用導出單位解決生活中問題的能力；也可能誤解題意，選出和題幹售價相同的選項。 4 有 9%的學生選擇選項 3(低分組有 19%)，這些學生可能不具備利用導出單位解決生活中問題的能力；也可能誤解題意，選出和題幹售價相同的選項。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。	6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

補救教學建議

1. 不同單位比的問題包含交換問題和密度問題：

交換問題 $\Rightarrow$ 60 元可以買 3 個水蜜桃，幾元可以買 1 個水蜜桃？

教師可以幫助學生將 60 元可以買 3 個水蜜桃記成 60 元/3 個

將 20 元可以買 1 個水蜜桃記成 20 元/個

密度問題 $\Rightarrow$ 10 公尺長的鐵絲重 5 公斤，1 公尺長的鐵絲重幾公斤？1 公斤重的鐵絲長幾公尺？

教師可以幫助學生將 10 公尺長的鐵絲重 5 公斤記成 10 公尺/5 公斤

將 5 公斤重的鐵絲長 10 公尺記成 5 公斤/10 公尺

將 1 公尺長的鐵絲重 0.5 公斤記成 0.5 公斤/公尺，

將 1 公斤重的鐵絲長 2 公尺記成。

2. 回到原問題，幫助學生理解 40 元/200g 代表的是每 200 公克賣 40 元，也可以說 100 公克賣 20 元、500 公克賣 100 元、2000 公克(2 公斤)賣 400 元、5000 公克(5 公斤)賣 1000 元。

3. 建議教師可以連結速率的記法，幫助學生更進一步理解導出單位是一種比值，也是兩量之間關係的一種描述方式。

題號	10		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-s-03(同 6-n-14) 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。		
試題內容	10. 披薩店大小披薩的厚度都一樣，小佑去披薩店想買一個 8 吋（直徑約 20 公分）的披薩，8 吋的披薩剛好都賣完了，店員建議改買兩個 4 吋（直徑約 10 公分）的披薩，因為兩個 4 吋披薩的份量和 8 吋披薩一樣多。 <u>小佑</u>不應該接受店員的提議，為什麼？（圓周率 = 3） ① 應該，兩個 4 吋合起來剛好是 8 吋，所以份量一樣多 ② 應該，兩個 4 吋披薩的直徑合起來約 20 公分，和 8 吋披薩的直徑一樣長，所以份量會一樣多 ③ 不應該，8 吋披薩的面積大約是 300 平方公分，一個 4 吋披薩的面積大約是 75 平方公分，兩個 4 吋披薩合起來的面積比 8 吋披薩小，所以份量比 8 吋披薩小 ④ 不應該，8 吋披薩的面積大約是 1200 平方公分，一個 4 吋披薩的面積大約是 300 平方公分，兩個 4 吋披薩合起來的面積比 8 吋披薩小，所以份量比 8 吋披薩小		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.23	0.03
2	0.18	0.29	0.06
3*	0.54	0.25	0.82
4	0.16	0.23	0.08
未作答	0.00		
通過率	0.54	鑑別度	0.58
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項 3，通過率為 54%，顯示超過五成的學生已具備利用圓面積公式解題的能力。 這些學生可能利用 $20 \div 2 = 10$，$10 \times 10 \times 3 = 300$，求出一個大披薩的面積大約是 300 平方公分；$10 \div 2 = 5$，$5 \times 5 \times 3 = 75$，求出一個小披薩的面積大約是 75 平方公分。所以 2 個小披薩的面積和大約是 $75 \times 2 = 150$ 平方公分，小於 1 個大披薩的面積。 2. 有 12% 的學生選擇選項 1（低分組有 23%），這些學生可能尚未具備利用圓面積公式解題的能力；也可能無法理解 4 吋、8 吋所代表的意義，誤以為幾寸（4 吋、8 吋）與份量（圓面積）成正比，認為 8 吋的圓面積是 4 吋圓面積的 2 倍。 3. 有 18% 的學生選擇選項 2（低分組有 29%），這些學生可能尚未具備利用圓面積公式解題的能力。他們可能尚未理解圓面積公式的意義，僅觀察到大圓的直徑是小圓的 2 倍，就判定大圓的面積是小圓面積的 2 倍，因此選擇選項 2。 4. 有 16% 的學生選擇選項 4（低分組有 23%），這些學生將圓面積公式誤記為「圓面積 = 直徑 × 直徑 × 圓周率」，求出大圓的面積 = $20 \times 20 \times 3 = 1200$ 平方公分，小圓的面積 = $10 \times 10 \times 3 = 300$ 平方公分，因此判定兩個小圓的面積和小於 1 個大圓的面積。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。	6-s-03(同 6-n-14) 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。	8-s-20 能理解與圓相關的概念(如半徑、弦、弧、弓形等)的意義。
補救教學建議			
1. 圓周率的率指的是比率，比率相等指的是所有的圓都相似，也就是說，所有的圓，其圓周長和直徑的比、圓周長和半徑的比以及直徑和半徑的比都相等。圓的周長是曲線，不易測量其長度，而圓的直徑是直線，比較容易測量，因此只要知道「圓周長：直徑長」的比值，測量出直徑後就能算出圓的周長，數學上稱「圓周長：直徑長」的比值為圓周率。 2. 下面說明如何幫助學生掌握圓周率的意義： 教師先給定 3 個大小不同的圓，再提供下面兩種情境，幫幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。 (1)觀察給定三個圓的圓周長和 3 倍直徑長的長短關係 教師分別畫出這 3 個圓的圓周長以及直徑長的 3 倍，要求學生觀察這些圓的圓周長和 3 倍直徑長，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。如下所示： (2)比較三個圓「圓周長÷直徑長」商的大小關係 教師給定三個圓的圓周和直徑的長度，以及「圓周長÷直徑長」的商(商數以四捨五入法取概數到百分位)，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。如下所示：			

	圓周長 (公分)	直徑長 (公分)	圓周長÷直徑長 (四捨五入到百分位)
甲圓	56.5	18	3.14
乙圓	38.0	12	3.17
丙圓	72.5	23	3.15

教師應同時提供兩種情境，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比3大一點。
第一種情境是比的想法，學生可以同時看到圓周長和直徑3倍長的關係；
第二種情境是比值的想法，學生可能只將注意力放在「圓周長÷直徑長」的商，而無法察覺圓周長和直徑3倍長的關係。

3. 先將圓切成兩個半圓，再將兩個半圓都切成很多個(例如8個或16個)全等的扇形，將這兩個切成扇形的半圓上下交錯疊合起來，會變成接近平行四邊形(或長方形)的圖形，平行四邊形的底(長方形的長)是圓周長的一半，平行四邊形的高(長方形的寬)是圓的半徑，可以透過平行四邊形(長方形)面積求出圓面積。

圓面積

= 平行四邊形面積

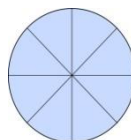
= 底×高

= 圓周長的一半×半徑

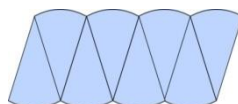
= (直徑×3.14)÷2×半徑

= (直徑÷2×3.14)×半徑

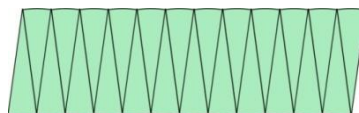
= 半徑×半徑×3.14



一個被八等分分割的圓



重新組一個被八等分分割的圓



重新組一個被二十四等分分割的圓

4. 以「半徑10公分、圓心角36度的扇形面積是多少平方公分？」為例，提供兩種解題的方法。

方法一：以幾分之幾圓的想法來解題

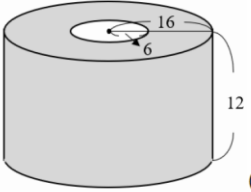
$$36 \div 360 = \frac{1}{10}, (10 \times 10 \times 3.14) \times \frac{1}{10} = 31.4, \text{ 答：} 31.4 \text{ 平方公分}$$

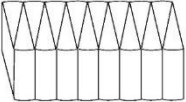
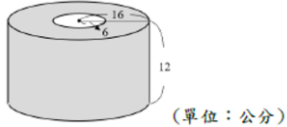
方法二：以1度圓心角對應的扇形面積為單位來解題

$$(10 \times 10 \times 3.14) \times \frac{36}{360} = 31.4, \text{ 答：} 31.4 \text{ 平方公分}$$

學生較容易掌握第一種方法解題的意義。

5. 學童原本就容易出現「長度放大為n倍，面積亦變大為n倍」的迷思，建議教師在進行圓面積的教學時，應試著讓學童動手繪圖，讓學生經驗、發現雖然直徑較長的圓，圓面積也較大，但直徑和圓面積並非成正比。再透過計算多個直徑成比例的圓面積並記錄下來，比較各個圓的直徑、半徑和圓面積之間的關係。

題號	11		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。		
試題內容	11. 「如圖，有一個半徑 16 公分、高 12 公分的圓柱，在中間挖空一個半徑 6 公分、高 12 公分的圓柱後，這個中空柱體的體積是多少立方公分？」 下列哪個算式可以算出正確答案？(圓周率 = 3.14)  (單位：公分) ① $16 \times 16 \times 3.14 - 6 \times 6 \times 3.14$ ② $(16 - 6) \times (16 - 6) \times 3.14 \times 12$ ③ $16 \times 16 \times 3.14 - 6 \times 6 \times 3.14 \times 12$ ④ $(16 \times 16 - 6 \times 6) \times 3.14 \times 12$		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.20	0.03
2	0.21	0.24	0.16
3	0.19	0.29	0.10
4*	0.49	0.27	0.71
未作答	0.00		
通過率	0.49	鑑別度	0.44
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.44，正確答案為選項 4，通過率為 49%，顯示近五成的學生已理解圓柱的體積公式，也具備簡單複合形體體積列式的能力。 2. 有 10% 的學生選擇選項 1 (低分組有 20%)，這些學生可能不理解圓柱的體積公式，也不具備簡單複合形體體積列式的能力。他們可能混淆圓柱體體積、圓面積公式，以圓面積公式列式，得到 $16 \times 16 \times 3.14 - 16 \times 16 \times 3.14$ 的答案。 3. 有 21% 的學生選擇選項 2 (低分組有 24%)，這些學生可能不具備簡單複合形體體積列式的能力。他們利用圓面積公式列出複合圖形面積算式時，發生錯誤，列出(大圓半徑－小圓半徑)×(大圓半徑－小圓半徑)×3.14 的算式為答案。 4. 有 19% 的學生選擇選項 3 (低分組有 29%)，這些學生可能具備簡單複合形體體積列式的能力，但是忘記「括號先算」運算次序的約定，得到列出算式 $16 \times 16 \times 3.14 - 16 \times 16 \times 3.14 \times 12$ 為答案。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。	6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。	S-9-13 表面積與體積：直角柱、直圓錐、正角錐的展開圖；直角柱、直圓錐、正角錐的表面積；直角柱的體積。 備註：S64 僅教授「直柱體的體積」，本條目除了複習並加深直柱體的體積概念，並且透過直柱體與正錐體的展開圖，計算其表面積。
補救教學建議			
1.學生在五年級學過長方體和正方體體積的計算公式，六年級的教學重點將體積計算公式的範圍擴充至簡單直柱體。 2.教師可以類比引入圓面積公式的方法，先將直圓柱切成兩個半圓柱，再將兩個半圓柱都切成很多個全等的扇形柱，將這兩個切成扇形柱的半圓柱上下交錯疊合起來，會變成一個接近直四角柱的立體(如下圖)，直四角柱的體積是「底面積×高」，所以直圓柱的體積也是「底面積×高」。  3.學生面對沒有見過的多步驟問題，只能用多個算式來記錄解題活動，學生解題成功後，教師應要求學生將多個算式改記成併式。 以後再遇到相同的問題時，應要求學生先用併式列出多步驟問題的算式，再檢查是否能利用乘法對加、減法的分配律等數學性質來簡化計算，最後再利用逐次減項的記法記錄解題活動。 4.下面以本題為例，說明如何幫助學生解題。  (單位：公分) 方法一 步驟一：算出整個圓柱的體積：$16 \times 16 \times 3.14 \times 12 = 9646.08$ 算出挖空圓柱的體積：$6 \times 6 \times 3.14 \times 12 = 1356.48$ 算出剩下的體積：$9646.08 - 1356.48 = 8289.6$ 步驟二：將步驟一的算式改記成併式： $16 \times 16 \times 3.14 \times 12 - 6 \times 6 \times 3.14 \times 12 = 8289.6$			

方法二

步驟一：算出塗色部分的底面積： $(16 \times 16 - 6 \times 6) \times 3.14 = 690.8$

算出塗色部分的體積： $690.8 \times 12 = 8289.6$

步驟二：將步驟一的算式改記成併式：

$$(16 \times 16 - 6 \times 6) \times 3.14 \times 12 = 8289.6$$

方法一和方法二都是算同一道題目的方法，所以算出的答案相同。也就是，

$$16 \times 16 \times 3.14 \times 12 - 6 \times 6 \times 3.14 \times 12 = (16 \times 16 - 6 \times 6) \times 3.14 \times 12$$

題號	12		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。		
試題內容	12. 已經知道「$3.1 \div 0.4 = 7 \cdots 0.3$」，請問「$0.031 \div 0.004$」的商及餘數為何？ ① 商是 7，餘數是 0.3 ② 商是 7，餘數是 0.003 ③ 商是 0.07，餘數是 0.3 ④ 商是 0.07，餘數是 0.003		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.22	0.22	0.23
2*	0.36	0.20	0.53
3	0.09	0.19	0.02
4	0.33	0.38	0.22
未作答	0.00		
通過率	0.36	鑑別度	0.32
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.32，正確答案為選項 2，通過率為 36%，顯示近四成的學生已具備利用小數除法直式計算解題的能力。 2. 有 22% 的學生選擇選項 1(低分組有 22%)，這些學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力，他們透過將被除數和除數同時換成以 0.01 為單位後，忘記餘數也要換成以 0.01 為單位。 3. 有 9% 的學生選擇選項 3(低分組有 19%)，這些學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力，他們透過將被除數和除數同時換成以 0.01 為單位後，商誤換成以 0.01 為單位，而餘數忘記換成以 0.01 為單位。 4. 有 33% 的學生選擇選項 4(低分組有 38%)，這些學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力，他們透過將被除數和除數同時換成以 0.01 為單位後，商誤換成以 0.01 為單位，而餘數有換成以 0.01 為單位。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目		6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。	

補救教學建議

1. 除數是小數的包含除問題包含有餘數和沒有餘數兩種題型：

有餘數的問題：緞帶長 29.4 公尺，每 1.8 公尺做一朵花，最多可以做成幾朵花？剩下幾公尺？

沒有餘數的問題：緞帶長 29.4 公尺，每 1.8 公尺做一朵花，全部做完，相當於做成多少朵花？

2. 單位數不是整數的問題，數學上稱為「相當於問題」，本基本學習內容限制「相當於問題」的記錄格式只能是 $a \div b = \frac{a}{b}$ ，都不討論餘數。例如「29.4 公升果汁相當於 1.8 瓶，一瓶有多少公升？」的單位數不是整數，不討論餘數。

3. 建議教師先在整數情境的問題中，說明「被除數和除數同時換單位」解題策略的意義後，再引入小數情境的問題。

以「14000 元，每人分 3000 元，最多可以分給幾人，剩下幾元？」為例，說明「被除數和除數同時換單位」解題策略的意義。

步驟一：先布題「14 張 1000 元鈔票，每人分 3 張，最多可以分給幾人，剩下幾張 1000 元鈔票？也就是剩下多少元？」。

$14(\text{張}) \div 3(\text{張}) = 4(\text{人}) \dots 2(\text{張})$ ，得到最多可以分給 4 個人，剩下 2 張 1000 元鈔票，也就是剩下 2000 元。

步驟二：回到原問題，限制學生先將被除數 14000 元及除數 3000 元，都換成 1000 元後再解題。

14000 元換成 14 張千元，也就是 14 個千，3000 元換成 3 張千元，也就是 3 個千。

$14(\text{個千}) \div 3(\text{個千}) = 4(\text{人}) \dots 2(\text{個千})$ ，得到最多可以分給 4 個人，剩下 2 個千，也就是剩下 2000 元。

步驟三：稱這種解題方法為被除數和除數同時換成 1000 的方法。

再命一些題目讓學生練習。

4. 以「36.2 公升果汁，1.4 公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」為例，說明如何利用「被除數和除數同時以 0.1 公升換單位」策略，幫助學生解題。

步驟一：幫助學生將被除數 36.2 公升及除數 1.4 公升，同時以 0.1 公升為單位來換單位。

36.2 公升轉換成 362 個 0.1 公升，1.4 公升換成 14 個 0.1 公升。

步驟二：再透過 $362 \div 14 = 25 \dots 12$ ，得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 12 個 0.1 公升，也就是剩下 1.2 公升。

如果學生無法掌握以 0.1 公升為單位的意義，教師可以透過命名 0.1 公升為 1 杯的方式，將被除數 36.2 公升及除數 1.4 公升，轉換成 362 杯和 14 杯，再透過

$362 \div 14 = 25 \dots 12$ ，得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 12 杯，也就是剩下 1.2 公升的答案。

5. 當商數較小時，例如商數是一位數字時，教師應幫助學生利用「先乘後減」的策略解題。「先乘後減」策略的概念比較簡單，學生不但較易理解其意義，而且也比較有效率。

6. 以「41.57 公升果汁，11.4 公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」

為例，說明如何幫助學生利用「先乘後減」的策略來解題。

步驟一：教師先幫助學生估商，例如 11.4 公升裝一瓶，可以裝滿 3 瓶，但是無法裝滿 4 瓶。

步驟二：裝滿 3 瓶，共裝了多少公升，還剩下多少公升？

$$11.4 \times 3 = 34.2, 41.57 - 34.2 = 7.37$$

得到最多裝滿 3 瓶，剩下 7.37 公升。

當商數是二位數字時，教師也可以幫助學生利用「先乘後減」的策略解題。

以「36.2 公升果汁，1.4 公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」為例，說明如何幫助學生利用「先乘後減」的策略來解題。

步驟一：教師先幫助學生以 10 瓶為單位估商，例如 1.4 公升裝一瓶，可以裝滿 20 瓶，但是無法裝滿 30 瓶。

步驟二：裝滿 20 瓶，共裝了多少公升，還剩下多少公升？

$$1.4 \times 20 = 28, 36.2 - 28 = 8.2$$

得到最多裝滿 20 瓶，剩下 8.2 公升。

步驟三：再幫助學生以 1 瓶為單位估商，例如剩下 8.2 公升，1.4 公升裝一瓶，可以裝滿 5 瓶，但是無法裝滿 6 瓶。

步驟四：剩下 8.2 公升，裝滿 5 瓶，共裝了多少公升，還剩下多少公升？

$$1.4 \times 5 = 7, 8.2 - 7 = 1.2$$

得到剩下的果汁最多裝滿 5 瓶，剩下 1.2 公升。

步驟五：回到原問題，要求學生回答最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？

得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 1.2 公升。

7. 以問題「 $\square \div 1.04 = 1.7 \dots 0.12$ ， $\square = ?$ 」為例，因為 $0 \leq 0.12 < 1.04$ ，所以多數教師都認為它是合理的問題。

但是當我們算出 $\square = 1.04 \times 1.7 + 0.12 = 1.888$ ，再代入原式驗算時，發現 $1.888 \div 1.04 = 1.8 \dots 0.016$ ，驗算不成立的理由是當商數是一位小數時，餘數必須比除數的 0.1 倍小，而問題中的餘數 0.12 比 1.04×0.1 大，因此原問題的算式不成立，下面說明其理由。

以「將 29 公升果汁，平分成 7 杯」為例，29 公升果汁，平分成 7 杯，每杯分到 4 公升，還剩下 1 公升(1 個 1 公升)不夠分，可以記成 $29 \div 7 = 4 \dots 1$ ，其中 $0 \leq 1 < 7$ 。

繼續往下分，將剩下的(餘數)1 公升換成 10 個 0.1 公升，10 個 0.1 公升，平分成

7 杯，每杯分到 1 個 0.1 公升，還剩下 3 個 0.1 公升不夠分(剩下 0.1 公升的個數不能超過 7 個)，可以記成 $29 \div 7 = 4.1 \dots 0.3$ ，其中 $0 \leq 0.3 < 0.7$ (7 個 0.1)。

繼續往下分，將剩下的(餘數)0.3 公升換成 30 個 0.01 公升，30 個 0.01 公升，平分成 7 杯，每杯分到 4 個 0.01 公升，還剩下 2 個 0.01 公升不夠分(剩下 0.01 公升的個數不能超過 7 個)，可以記成 $29 \div 7 = 4.14 \dots 0.02$ ，其中 $0 \leq 0.02 < 0.07$ (7 個 0.01)。

由上面的說明可以得到下面的結果

$a \div b = q \dots r$ ，當 q 是整數時， $0 \leq r < b$ 。

當 q 是一位小數時， $0 \leq r < b \times 0.1$ (餘數要比 b 個 0.1 小)。

當 q 是二位小數時， $0 \leq r < b \times 0.01$ (餘數要比 b 個 0.01 小)。

8. 三年級學生已在整數情境中，理解乘除互逆的意義。教師應檢查學生是否能在小數情境中，理解乘除互逆的意義。

9. 回到原題目，學生將 $3.1 \div 0.4$ 同時換成以 0.1 單位，將 $0.031 \div 0.004$ 同時換成以 0.001 為單位，比對兩算式，察覺換單位之後的商和餘數相等，之後將餘數換為原單位即可。

題號	13		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。		
試題內容	13. 地圖甲的比例尺為 1 : 5000，地圖乙是地圖甲的 $\frac{1}{4}$ 倍縮小圖，請問下列何者為地圖乙的比例尺？ ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{1250}$ ③ $\frac{1}{5000}$ ④ $\frac{1}{20000}$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.05	0.11	0.01
2	0.52	0.48	0.44
3	0.09	0.21	0.01
4*	0.35	0.19	0.53
未作答	0.00		
通過率	0.35	鑑別度	0.34
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.34，正確答案為選項 4，通過率為 35%，顯示有三成五的學生已具備利用比例尺概念解決生活中問題的能力。 2.有 5%的學生選擇選項 1(低分組有 11%)，這些學生可能不具備利用比例尺概念解決生活中問題的能力，誤以為 $\frac{1}{4}$ 倍縮小圖的比例尺就是 $\frac{1}{4}$。 3.有 52%的學生選擇選項 2(低分組有 48%)，這些學生可能不具備利用比例尺概念解決生活中問題的能力，誤以為 $\frac{1}{4}$ 倍縮小圖的比例尺就是原比例尺乘以 $\frac{1}{4}$。 4.有 9%的學生選擇選項 3(低分組有 21%)，這些學生可能不具備利用比例尺概念解決生活中問題的能力，誤以為同一個區域地圖的比例尺都相同。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目		6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。	
補救教學建議			

1.教師應幫助學生連絡「比」、「比值」和「幾倍放大(縮小)圖」的關係。

教師應幫助學生認識下面三種表示法都可以說明「三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖」的關係，為引入比例尺的教學鋪路。

第一種：比的表示法

$$\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 1, \overline{EF} : \overline{BC} = 2 : 1, \overline{DF} : \overline{AC} = 2 : 1$$

第二種：比值的表示法

$$\overline{DE} \div \overline{AB} = 2, \overline{EF} \div \overline{BC} = 2, \overline{DF} \div \overline{AC} = 2$$

第三種：倍的表示法

$$\overline{DE} \text{長是} \overline{AB} \text{的} 2 \text{ 倍}, \overline{EF} \text{長是} \overline{BC} \text{的} 2 \text{ 倍}, \overline{DF} \text{長是} \overline{AC} \text{的} 2 \text{ 倍}$$

2.建議教師透過縮小圖的情境引入比例尺，例如畫出籃球場 $\frac{1}{10}$ 倍的縮小圖，再透

過 $\frac{1}{10}$ 倍的縮小圖引入比例尺的意義及記法，不宜直接透過地圖引入比例尺。

3.數學上習慣將實際的長度當作基準量，地圖上的長度當作比較量，下面以「實際長度 1 公里，地圖上長 1 公分」為例，說明比例尺的表示法。

有兩種表示比例尺的方法，一種是利用同單位的比或比值來表示，另一種是利用不同單位的比或比值來表示。

(一)同單位的表示法

同單位的表示法又可以區分為比的表示法和比值的表示法，因為單位相同，因此同單位的表示法都不記錄單位。

(1)比的表示法：1 公里 = 1000 公尺 = 100000 公分

可以用「1 : 100000」或「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」來表示。

「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」的記法較容易連絡比和比值的關係。

使用 1 : 100000 溝通比例尺時，表示地圖上長 1 公分，實際的長是 100000 公分；地圖上長 1 公尺，實際的長是 100000 公尺；地圖上長 1 毫米，實際的長是 100000 毫米。

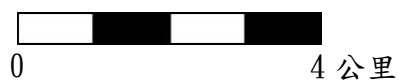
(2)比值的表示法：「1 : 100000」和「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」的比值都 $\frac{1}{100000}$ 。

(二)不同單位的表示法

不同單位的表示法也可以區分為比的表示法和比值的表示法，因為單位不同，因此不同單位的表示法都必須記錄單位。

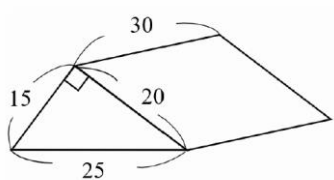
(1)比的表示法：「1 公分 : 1 公里」。

(2)比值的表示法：1 公分：1 公里=1 公分/公里，日常生活中不常出現這種記法，都用下面的圖示法來呈現。

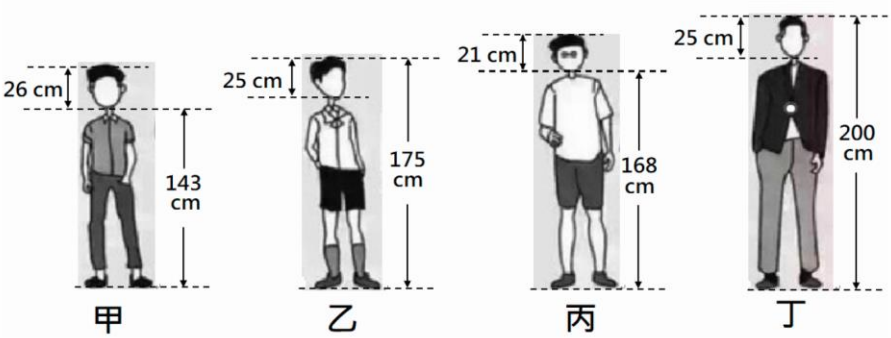


4.回到原題目，地圖乙長度：地圖甲長度= $\frac{1}{4}$ ：1，地圖甲長度：實際長度=1：5000，

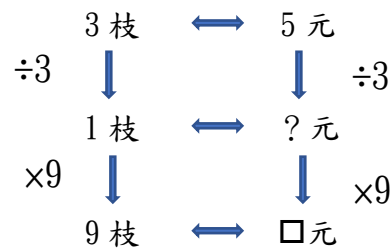
從兩個式子看到地圖乙長度：實際長度= $\frac{1}{4}$ ：5000=1：20000，得到比例尺為 $\frac{1}{20000}$ 。

題號	14		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。		
試題內容	14. 下圖是一個三角柱，請問它的表面積是多少平方公分？  ① 750 ② 1950 ③ 2100 ④ 4500 (單位：公分)		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.21	0.02
2	0.19	0.25	0.11
3*	0.49	0.26	0.74
4	0.21	0.28	0.12
未作答	0.01		
通過率	0.49	鑑別度	0.48
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.48，正確答案為選項 3，通過率為 49%，顯示近五成的學生已具備利用幾何形體性質解決幾何問題的能力。 這些學生理解表面積是立體形體表面每個面的面積總和，並能掌握視圖中三角柱有 2 個底面、3 個側面，再透過三角形面積公式和長方形面積公式，以 $15 \times 20 \div 2 \times 2 + 30 \times (15 + 20 + 25) = 2100$，求出表面積為 2100 平方公分。 2.有 11% 的學生選擇選項 1(低分組有 21%)，這些學生可能誤解題意；或是混淆柱體體積和表面積的意義，且將柱體體積公式誤記為「底×柱高」，以 $25 \times 30 = 750$，求得 750 這個答案。 3.有 19% 的學生選擇選項 2(低分組有 25%)，這些學生可能已理解表面積的意義，但誤認為三角柱只有 1 個底面；或是列式時發生錯誤，以 $15 \times 20 \div 2 + 30 \times (15 + 20 + 25) = 1950$，求出表面積為 1950 平方公分。 4.有 21% 的學生選擇選項 4(低分組有 28%)，這些學生可能誤解題意；或是混淆表面積和柱體體積的意義，誤求為三角柱的體積，以 $(15 \times 20 \div 2) \times 30 = 4500$，求出表面積為 4000 平方公分。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-18 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-s-05)	6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。	S-9-13 表面積與體積：直角柱、直圓錐、正角錐的展開圖；直角柱、直圓

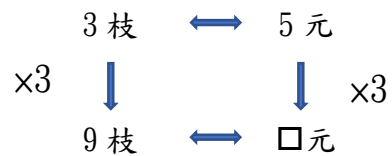
			錐、正角錐的表面積； 直角柱的體積。
補救教學建議			
1.建議教學重點應放在溝通「表面積」名詞的意義，引入長方體和正方體表面積的「計算方法」，而不要過度強調長方體和正方體表面積的「公式」。 2.教師不宜透過展開圖幫助學生解題，因為理解展開圖的意義，比計算出長方體的表面積更困難。 3.以「長12公分、寬10公分、高3公分的長方體」為例，說明如何幫助學生計算長方體的表面積。 步驟一：複習長方形的面積公式，長方形面積=長×寬。 步驟二：拿出一個長方體，標示出該長方體的長、寬和高。引導學生理解長方體中，有上下、前後、左右三組全等的面。 (教師可以透過拓印或複製等方式，幫助學生認識長方體上、下兩個面是全等的長方形，左、右兩個面也是全等的長方形，前、後兩個面也是全等的長方形。) 步驟三：上、下2個長方形(長×寬)的面積：$(12 \times 10) \times 2 = 240$平方公分， 前、後2個長方形(長×高)的面積：$(12 \times 3) \times 2 = 72$平方公分， 左、右2個長方形(寬×高)的面積：$(10 \times 3) \times 2 = 60$平方公分， $240 + 72 + 60 = 372$，得到長方體的表面積是372平方公分。 步驟四：長方體中，有上下、前後、左右三組全等的面。計算長方體的表面積時，可以先分別算出「上、前、左」三個長方形的面積和，再乘以2。 「$(長 \times 寬 + 寬 \times 高 + 長 \times 高) \times 2$」算出長方體的表面積， $(12 \times 10 + 10 \times 3 + 12 \times 3) \times 2 = 372$，得到長方體的表面積是372平方公分。 4.以「邊長5公分正方體的表面積是多少平方公分？」為例，說明如何幫助學生解題。 建議教師依下列四個步驟幫助學生解題： 步驟一：複習正方形的面積公式，正方形面積=邊長×邊長。 步驟二：拿出一個正方體，標示出該正方體的邊長，並溝通正方體共有六個全等的面。 步驟三：正方體各面面積的總合為正方體的表面積。正方體的表面積是「前、後、上、下、左、右」等六個面的面積和，每個面的面積都一樣大：6個面的面積和是「$邊長 \times 邊長 \times 6 = (5 \times 5) \times 6$」 步驟四：正方體表面積=邊長×邊長×6=$(5 \times 5) \times 6 = 150$ 得到正方體的表面積是150平方公分。 5 最後可以三角柱或四角柱布題，請學生求出該形體的表面積。這裡的教學重點在學生是否能說出如何計算角柱表面積的方法，並說明求每個面的面積時該如何找到所需的長度資料、列式。			

題號	15		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。		
試題內容	15. 「九頭身比例」的意思就是指一個人頭部長度與身高的比是 $1:9$。世界名模大多是這樣的比例。請問下列哪個人是「九頭身比例」？  ① 甲 ② 乙 ③ 丙 ④ 丁		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.13	0.05
2	0.13	0.22	0.05
3*	0.47	0.27	0.70
4	0.31	0.37	0.21
未作答	0.01		
通過率	0.47	鑑別度	0.43
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.43，正確答案為選項 3，通過率為 47%，顯示近五成的學生已具備利用比或比值解題的能力。 2. 有 9% 的學生選擇選項 1 (低分組有 13%)，這些學生可能尚未具備利用比或比值解題的能力。他們可能具備將比化為最簡單整數比的能力，但因誤解題意，或是不理解比的意義，而以：$26:143=2:11$，發現 $11-2=9$，因此選擇此答案。 3. 有 13% 的學生選擇選項 2 (低分組有 22%)，這些學生可能尚未掌握比與比值的意義；或是無法理解題意，因而選擇此答案。 4. 有 31% 的學生選擇選項 4 (低分組有 37%)，這些學生可能尚未具備利用比或比值解題的能力。他們可能具備將比化為最簡單整數比的能力，但因誤解題意，或是不理解比的意義，而以：$25:200=1:8$，發現 $1+8=9$，也可能因直觀看到圖中人物丁的身高最高，因而選擇此答案。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活上的應用(含「百分率」、「折」)	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。	6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。
補救教學建議			
1.最簡單整數比是很多相等的比比較的結果，教師不宜透過直接宣告「一個整數比的前項和後項互質，我們稱這個整數比為最簡單整數比」的方式引入最簡單整數比。 教師應透過比較活動引入最簡單整數比，例如列出一些和 3：5 相等的整數比 6：10、15：25、60：100 等，說明這些整數比中，3：5 的前項和後項最小，我們稱 3：5 為這些相等整數比中的最簡單整數比，再說明最簡單整數比的前項和後項會互質。 當學生學過最簡單整數比 3：5 後，最簡單整數比 3：5 指的是 3 份：5 份，其中的 1 份可以是任意的整數，也可以擴充至任意的數。 2.以「3 枝鉛筆賣 5 元，9 枝鉛筆賣幾元？」為例，提出三種解題策略，教師可以提供學生這四種解題策略的經驗，但不宜限制學生使用某種解題策略來解題。 (1)單價法：先用除法「$5 \div 3 = \frac{5}{3}$」算出 1 枝鉛筆的單價是 $\frac{5}{3}$ 元， 再利用乘法「$\frac{5}{3} \times 9 = \frac{45}{3} = 15$」算出 9 枝鉛筆賣 15 元的答案。 (2)倍數法：先用除法「$9 \div 3 = 3$」算出 9 枝鉛筆是 3 枝鉛筆的 3 倍， 再用乘法「$5 \times 3 = 15$」算出 5 元的 3 倍是 15 元，得到 9 枝鉛筆賣 15 元。 (3)比的加法： 3 枝： 5 元 3 枝： 5 元 <u>3 枝： 5 元</u> 合起來： 9 枝：15 元 (4)關係式：教師也可以先用比的算式「$3：5=9：\square$」記錄問題，再將比的算式由左右併置的記法，改記成上下併置的關係式記法，關係式的記法較容易說明單價法或倍數法解題的意義。 單價法：$(5 \div 3) = \frac{5}{3}$，$\frac{5}{3} \times 9 = 15$			



倍數法： $3 \times 3 = 9$ (或 $9 \div 3 = 3$)， $5 \times 3 = 15$



(5) 外項乘以外項等於內項乘以內項：

先用算式「 $3 : 5 = 9 : y$ 」記錄問題，透過「外項乘以外項會等於內項乘以內項」得到算式「 $3 \times y = 5 \times 9 = 45$ 」後，再利用乘除互逆「 $45 \div 3 = 15$ 」，或利用等量公理「 $3 \times y = 45$ ， $y = 45 \div 3 = 15$ 」，算出 9 枝鉛筆賣 15 元。

3. 以「 $3 : 5 = \square : 15$ 」為例，說明為什麼外項乘以外項會等於內項乘以內項。

$$3 : 5 = \square : 15$$

$$\Rightarrow (3 \times 15) : (5 \times 15) = (\square \times 5) : (15 \times 5)$$

$$\Rightarrow (3 \times 15) = (\square \times 5)$$

看著原問題「 $3 : 5 = \square : 15$ 」和結果「 $3 \times 15 = \square \times 5$ 」，

幫助學生發現「 3×15 」是「 $3 : 5 = \square : 15$ 」兩外項的乘積，「 $\square \times 5$ 」是「 $3 : 5 = \square : 15$ 」兩內項的乘積，可以透過「外項乘以外項會等於內項乘以內項」的關係，由「 $3 : 5 = \square : 15$ 」直接得到 $(3 \times 15) = (\square \times 5)$ 。

題號	16		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。		
試題內容	16. 下面哪個題目可以用「$1\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$」算出答案？ ① 甲數是 $1\frac{2}{3}$，乙數比甲數少 $\frac{4}{5}$，請問乙數的 $\frac{3}{4}$ 倍是多少？ ② 一捆 $\frac{4}{5}$ 公尺長的繩索重 $1\frac{2}{3}$ 公斤，同樣材質的繩索長 $\frac{3}{4}$ 公尺，重量是幾公斤？ ③ 一瓶牛奶的容量是 $1\frac{2}{3}$ 公升，一瓶果汁的容量是一瓶牛奶的 $\frac{4}{5}$ 倍，請問 $\frac{3}{4}$ 瓶果汁是幾公升？ ④ 一塊 $1\frac{2}{3}$ 公頃的土地，其中的 $\frac{4}{5}$ 作為水果園，水果園中的 $\frac{3}{4}$ 種植芒果，請問種植芒果的土地面積是多少公頃？		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.25	0.05
2*	0.46	0.22	0.75
3	0.24	0.31	0.12
4	0.14	0.21	0.07
未作答	0.01		
通過率	0.46	鑑別度	0.53
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.53 正確答案為選項 2，通過率為 46%，顯示近五成的學生已具備先除再乘分數兩步驟問題擬題的能力。 2. 有 15 的學生選擇選項 1(低分組有 25)，這些學生可能尚未具備分數兩步驟問題擬題的能力，認為以 $1\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ 可求出乙數，再將乙數乘上 $\frac{3}{4}$ 倍即可求解，因而選擇此答案。 3. 有 24% 的學生選擇選項 3(低分組有 31)，這些學生可能尚未具備分數兩步驟問題擬題的能力，認為以 $1\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ 可求出一瓶果汁的容量，再將一瓶果汁的容量乘上 $\frac{3}{4}$ 倍即可求解，因而選擇此答案。 4. 有 14 的學生選擇選項 4(低分組有 21%)，這些學生可能尚未具備分數兩步驟問題擬題的能力，認為以 $1\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ 可求出水果園的面積，再將水果園的面積乘上 $\frac{3}{4}$ 倍即可求解，因而選擇此答案。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。	7-a-03 能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。
補救教學建議			
1. 二步驟問題的教學包含三個重點，第一個重點是能夠解決問題，並用二個算式記錄解題過程；第二個重點是能夠用併式記錄解題過程；第三個重點是能夠列式，並用逐次減項的記法記錄解題過程。 2. 以分數兩步驟問題「媽媽買了$\frac{10}{3}$公升的果汁6瓶，全部分裝到$\frac{5}{4}$公升的杯子裡，相當於裝滿幾杯？」為例，如果學生無法解題，建議教師先將原問題修改為整數情境的問題，例如修改為「媽媽買了10公升的果汁6瓶，全部分裝到5公升的瓶子裡，相當於裝滿幾瓶？」。待學生解題成功後，再回到原分數情境的問題，希望學生能類比整數情境的問題來解決相同情境分數的問題。 3. 下面以「甲有15元，乙有25元，1枝鉛筆賣5元，兩人合起來可以買幾枝？」為例，說明整數兩步驟問題的教學流程。 教師可以仿下面的教學流程，進行分數兩步驟問題的教學。 (1) 用兩個算式記錄解題活動 $15 + 25 = 40, 40 \div 5 = 8, \text{答：可以買8枝}$ (2) 將兩個算式改記成併式的記法 將「$15 + 25 = 40, 40 \div 5 = 8$」改記成「$(15 + 25) \div 5 = 8$」 (3) 用併式記錄解題活動 $(15 + 25) \div 5 = 8, \text{答：可以買8枝}$ (4) 用算式填充題來列式 $(15 + 25) \div 5 = (\quad)$ (5) 先列式，再用逐次減項記錄解題活動 $(15 + 25) \div 5 = (\quad)$ $(15 + 25) \div 5$ $= 40 \div 5$ $= 8 \quad \text{答：可以買8枝}$ 4. 以逐次減項的記法「$5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10 = 100 - 10 = 90$」為例，它是以下解題過程的摘要記法： $5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10, 5 \times 20 - 10 = 100 - 10, 100 - 10 = 90$ 因為等號滿足遞移性($A = B, B = C, C = D$，所以$A = C$)， 所以$5 \times (12 + 8) - 10 = 90$ 逐次減項記法中除了把重複出現的算式「$5 \times 20 - 10$」和「$100 - 10$」只記一次之			

外，還把解題過程最重要的部份「因為等號滿足遞移性，所以 $5 \times (12 + 8) - 10 = 90$ 」也省略了。

教師可以透過詢問為什麼「 $5 \times (12 + 8) - 10$ 」的答案是90，檢查學生是否掌握利用等號遞移性記錄的意義。

5. 本題正確選項2的情境中「一綑 $\frac{4}{5}$ 公尺長的繩索重 $1\frac{2}{3}$ 公斤」，學生求一公尺長的繩索重幾公斤時列式容易出現困難。建議教師指導學生，此時將問題視為「分數乘法情境描述」的乘除互逆情境題：「一公尺長的繩索重A公斤， $\frac{4}{5}$ 公尺長的重 $1\frac{2}{3}$ 公斤。求一公尺長的繩索重多少公斤？」，請學童先依照題意列出算式填充題「 $(\quad) \times \frac{4}{5} = 1\frac{2}{3}$ 」後再解題，比較能看出乘除互逆的關係，以列出解題算式。

題號	17																													
內容領域	數與計算				認知歷程向度			概念理解																						
學習內容	6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。																													
試題內容	17. 下列哪個選項中的兩組數量 <u>不是</u> 成正比？																													
	① 半徑長和直徑長的關係表				③ 圓周長和半徑長的關係表																									
	<table><tr><td>半徑長 (cm)</td><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>10</td></tr><tr><td>直徑長 (cm)</td><td>4</td><td>6</td><td>14</td><td>20</td></tr></table>				半徑長 (cm)	2	3	7	10	直徑長 (cm)	4	6	14	20	<table><tr><td>圓周長 (cm)</td><td>6.28</td><td>12.56</td><td>18.84</td><td>25.12</td></tr><tr><td>半徑長 (cm)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>						圓周長 (cm)	6.28	12.56	18.84	25.12	半徑長 (cm)	1	2	3	4
	半徑長 (cm)	2	3	7	10																									
	直徑長 (cm)	4	6	14	20																									
	圓周長 (cm)	6.28	12.56	18.84	25.12																									
半徑長 (cm)	1	2	3	4																										
② 圓面積和直徑長的關係表				④ $\frac{1}{2}$ 圓弧長和直徑長的關係表																										
<table><tr><td>圓面積 (cm²)</td><td>314</td><td>1256</td><td>2826</td><td>5024</td></tr><tr><td>直徑長 (cm)</td><td>20</td><td>40</td><td>60</td><td>80</td></tr></table>				圓面積 (cm ²)	314	1256	2826	5024	直徑長 (cm)	20	40	60	80	<table><tr><td>$\frac{1}{2}$ 圓弧長 (cm)</td><td>157</td><td>314</td><td>471</td><td>628</td></tr><tr><td>直徑長 (cm)</td><td>100</td><td>200</td><td>300</td><td>400</td></tr></table>						$\frac{1}{2}$ 圓弧長 (cm)	157	314	471	628	直徑長 (cm)	100	200	300	400	
圓面積 (cm ²)	314	1256	2826	5024																										
直徑長 (cm)	20	40	60	80																										
$\frac{1}{2}$ 圓弧長 (cm)	157	314	471	628																										
直徑長 (cm)	100	200	300	400																										
選答率	答題反應比率（*表正確答案）																													
選項	整體			低分組			高分組																							
1	0.10			0.16			0.06																							
2*	0.51			0.30			0.70																							
3	0.15			0.25			0.07																							
4	0.24			0.28			0.17																							
未作答	0.00																													
通過率	0.51			鑑別度			0.39																							
試題品質分析																														
1.本題鑑別度為 0.39，正確答案為選項 2，通過率為 51%，顯示超過五成的學生已具備利用成正比解題的能力。																														
2.有 10%的學生選擇選項 1(低分組有 16%)，這些學生不具備利用成正比解題的能力；也可能在求比值時計算發生錯誤。																														
3.有 15%的學生選擇選項 3(低分組有 25%)，這些學生不具備利用成正比解題的能力；也可能在求比值時計算發生錯誤。																														
4.有 24%的學生選擇選項 4(低分組有 28%)，這些學生不具備利用成正比解題的能力；也可能在求比值時計算發生錯誤。																														
教材地位分析																														
	先備的知識			本題所需的知識			延伸的知識																							
分年細目	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中			6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。			7-n-13 能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。																							

補救教學建議

- 1.「正比」和「比或比值」的關係密切，比的相等關係強調將相比的兩類量寫在一起，直覺上較簡單；而正比則是兩類量關係中的一種，應採用列表的方式記錄，並強調要使用比值來記錄正比關係，兩者間的關係，可運用列表的方式來統整。
- 2.下面以同學們同時量出不同長度的竹竿和對應影子長度的表格：

竹竿長(公分)	40	50	60	70	80	90	100
影子長(公分)	20	25	30	35	40	45	50

國小階段可以透過比或比值的方式來表示不同長度的竹竿和對應影子長度的關係。

- (1)利用最簡單整數比『竹竿長：影子長=2：1』來表示：

竹竿和對應影子長度的對應關係可以記成「40：20」、「50：25」、...、「100：50」，它們都是相等的比，可以利用最簡單整數比「竹竿長：影子長=2：1」來表示。

- (2)利用比值「竹竿長：影子長=2」來表示：

「40：20」、「50：25」、...、「100：50」這些相等的比的比值都是 2，可以透過比值「竹竿長：影子長=2」來表示這些相等的比，也可以說成「竹竿長是影子長的 2 倍」。

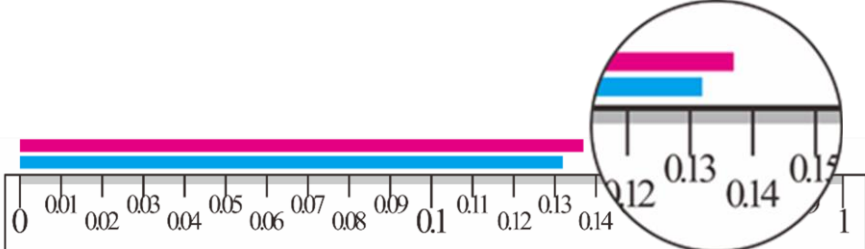
- 2.成正比是兩個集合間特殊的對應關係，下面都是成正比的定義。竹竿的長度和對應影子的長度同時改變，而它們的比值不變，數學上稱竹竿的長度和影子的長度「成正比」或「成正比例」。

- (1)形如「 $y=kx$ 」的函數，數學上稱之為成正比。

- (2)如果函數的圖形是過原點的直線，數學上稱之為成正比。國小階段尚未引入函數的記法，只能透過(1)溝通成正比的意義。

- 3.讓學生知道兩量變化時，一量增加，另一量也跟著增加的現象，並不一定是正比關係，並能判斷。例如父和子的年齡、正方形邊長與面積的關係等，都不是正比的關係。

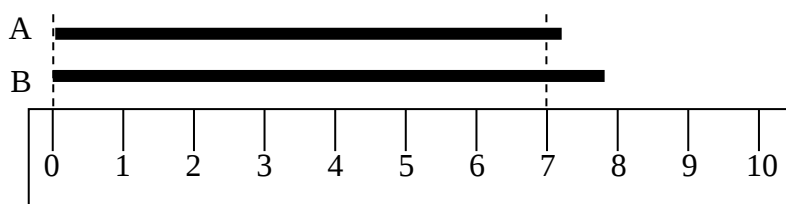
題號	18		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。		
試題內容	18. 老闆買進 25 桶油漆，每一桶油漆的重量都是 5.345 公斤。 請問 25 桶油漆總重量大約是多少公斤？(先用四捨五入法將油漆的重量取概數到小數第一位後，再計算油漆的總重量) ① 132.5 ② 133.6 ③ 135 ④ 1325		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.50	0.26	0.75
2	0.25	0.36	0.14
3	0.17	0.24	0.09
4	0.07	0.13	0.02
未作答	0.01		
通過率	0.50	鑑別度	0.49
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.49，正確答案為選項 1，通過率為 50%，顯示有五成的學生已具備小數在指定位數取概數及小數乘法概算的能力。 2.有 25%的學生選擇選項 2(低分組有 36%)，這些學生可能不具備小數在指定位數取概數及小數乘法概算的能力，他們沒有先取概數，而直接先進行多數小數的乘法，然後再將答案取概數。 3.有 17%的學生選擇選項 3(低分組有 24%)，這些學生可能不具備小數在指定位數取概數及小數乘法概算的能力，在一開始將 5.345 取概數時，沒有直接從小數第二位來進行四捨五入，而是將末尾的 5 先進位變成 5.35，再將 5.35 四捨五入變成 5.4，再直接將 5.4×25 得出答案，表示此學童沒有弄清楚如何取概數。 4.有 7%的學生選擇選項 4(低分組有 13%)，這些學生可能已具備小數在指定位數取概數及小數乘法概算的能力，但在小數乘法運算中位值發生錯誤。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-06 能在具體情境中，對大數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減之估算。	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。	
補救教學建議			
1. 以「7.2468 用四捨五入法取概數到小數第一位」為例，部份學生可能從小數點最後一位開始四捨五入，例如 7.2468 最後一位是 8，針對 8 四捨五入後得到 7.247，再針對 4 四捨五入得到 7.25，再針對 6 四捨五入得到 7.3。 教師應說明四捨五入的意義，7.2468 介於 7.2 和 7.3 之間，用四捨五入法取概數到小數第一位，教學重點是判斷 7.2468 距離 7.2 比較近，或距離 7.3 比較近，因此當取概數到小數點第一位時，只要判斷小數點第二位即可，7.2468 小數點後第 2 位是 4，也就是 7.2468 距離 7.2 比較近，所以 7.2468 用四捨五入法取概數到小數第一位的結果是 7.2。 2. 建議透過下面的測量情境，幫助學生理解四捨五入法取概數的意義例子。			
			
當我們用最小刻度是 0.01 公尺(1 公分)的直尺測量上圖的上、下兩條繩子長度時，如果用無條件捨去法取概數，剩下不到 0.01 公尺(1 公分)的捨去不算，兩條繩子的長度都是 0.13 公尺(13 公分)；如果用無條件進入法取概數，剩下不到 0.01 公尺(1 公分)的也算 0.01 公尺(1 公分)，兩條繩子的長度都是 0.14 公尺(14 公分)，這兩種描述繩長的誤差很大。 如果繩子長度比較接近 0.14 公尺(14 公分)，就記成 0.14 公尺；繩子長度比較接近 0.13 公尺(13 公分)，就記成 0.13 公尺。因此，將下面藍色繩子的長度記成 0.13 公尺，上面紅色繩子的長度記成 0.14 公尺，這樣比較接近實際的長度，也是比較公平的記法；數學上稱這種取概數的方法為四捨五入法。 0.135 公尺剛好介於 0.13 公尺和 0.14 公尺之間，為了讓下一位是 0、1、2、3、4 時都捨去，5、6、7、8、9 都進位，四捨五入法約定將 0.135 公尺記成 0.14 公尺。			

題號	19		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。		
試題內容	19. 已知 $甲 \div 119 = 69 \cdots 28$，$28 \div 119 = 0.235 \cdots 0.035$。 請問「$甲 \div 119$」的商用四捨五入法算到小數第二位是多少？ ① 69.03 ② 69.04 ③ 69.23 ④ 69.24		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.18	0.25	0.10
2	0.18	0.26	0.09
3	0.30	0.30	0.25
4*	0.33	0.17	0.55
未作答	0.01		
通過率	0.33	鑑別度	0.37
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.37，正確答案為選項 4，通過率為 33%，顯示超過三成的學生已具備對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除估算的能力。 2.有 18%的學生選擇選項 1(低分組有 25%)，這些學生可能不具備對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除估算的能力；也可能不知道已知「$a \div b = q \cdots r$，q 是整數」時，計算「$a \div b$」的商到小數第三位時的餘數，和計算「$r \div b$」的商到小數第三位的餘數相等。透過 $69 + 0.035 = 69.035$，得到 $甲 \div 119$ 的商是 69.035，四捨五入法取概數到小數第二位，得到 69.03 的答案。 3.有 18%的學生選擇選項 2(低分組有 26%)，這些學生可能不具備對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除估算的能力；也可能不知道已知「$a \div b = q \cdots r$，q 是整數」時，計算「$a \div b$」的商到小數第三位時的餘數，和計算「$r \div b$」的商到小數第三位的餘數相等。透過 $69 + 0.035 = 69.035$，得到 $甲 \div 119$ 的商是 69.035，四捨五入法取概數到小數第二位時發生錯誤，得到 69.04 的答案。 4.有 30%的學生選擇選項 3(低分組有 30%)，這些學生可能不具備對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除估算的能力。透過 $69 + 0.235 = 69.235$，得到 $甲 \div 119$ 的商是 69.235，四捨五入法取概數到小數第二位時發生錯誤，得到 69.23 的答案。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-06 能在具體情境中，對大數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減之估算。 6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。	6-d-03 能報讀生活中常用的圓形圖，並能整理生活中的資料，製成圓形圖。
補救教學建議			
1.以「將 231.8 公升果汁，平分裝成 14 瓶，每瓶最多可以裝幾公升，剩下幾公升？(商數算到小數第一位)」為例，說明如何幫助學生解小數除以整數除法直式計算。 步驟一：將 231.8 分解為 2 個「100」、3 個「10」、1 個「1」和 8 個「0.1」。 步驟二：先分 2 個「100」，2 個「100」平分成 14 份不夠分；將 2 個「100」換成 20 個「10」，加上原有的 3 個「10」，合起來是 23 個「10」。23 個「10」平分成 14 份，每份是 1 個「10」。 步驟三：還剩下 9 個「10」不夠分，9 個「10」再換成 90 個「1」，加上原有的 1 個「1」，合起來是 91 個「1」。 步驟四：91 個「1」平分成 14 份，每份是 6 個「1」，分掉 84 個「1」。 步驟五：還剩下 7 個「1」不夠分，7 個「1」換成 70 個「0.1」，加上原有的 8 個「0.1」，合起來是 78 個「0.1」。 步驟六：78 個「0.1」平分成 14 份，每份是 5 個「0.1」，分掉 70 個「0.1」。 步驟七：剩下 8 個「0.1」。 步驟八：每瓶分到 1 個「10」、6 個「1」和 5 個「0.1」，剩下 8 個「0.1」，也就是每瓶分到 16.5 公升，剩下 0.8 公升。 上述的解題活動，可以使用下列直式來記錄： $\begin{array}{r} 14 \overline{) 231.8} \\ \underline{14} \\ 91 \\ \underline{84} \\ 78 \\ \underline{70} \\ 8 \end{array}$ 1 6. 5 ⇨ 步驟八 ⇨ 步驟一 ⇨ 步驟二 ⇨ 步驟三 ⇨ 步驟四 ⇨ 步驟五 ⇨ 步驟六 ⇨ 步驟七 2.下面以「將 5.6327 用四捨五入法取概數到百分位是多少？」為例，說明如何幫助學生解題。建議教師透過下列步驟幫助學生解題：			

步驟一：透過數線情境，說明四捨五入法取概數的意義。



我們用最小刻度是 1 公分的直尺測量兩條繩子的長度時，如果用「無條件捨去法」取概數到個位，剩下不到 1 公分的捨去不算，A、B 兩條繩子的長度取完概數後都是 7 公分。如果用「無條件進入法」取概數到個位，剩下不到 1 公分的也算 1 公分，A、B 兩條繩子的長度取完概數後都是 8 公分。稱上面的 A 繩子長 8 公分，或稱下面的 B 繩子長 7 公分，描述繩長的誤差都很大。

如果繩子的長度比較接近 7 公分，就記成 7 公分，繩子的長度比較接近 8 公分，就記成 8 公分，例如將上面繩子的長度記成 7 公分，下面繩子的長度記成 8 公分，這樣比較接近實際的長度，也是比較公平的記法，數學上稱這種取概數的方法為「四捨五入法」。7.5 公分剛好介於 7 公分和 8 公分之間，四捨五入法約定將 7.5 公分以上(包含 7.5 公分)記成 8 公分，而 7.5 公分以下記為 7 公分。

步驟二：日常生活中用四捨五入法取概數時，常利用「看下一位」的方法來取概數，例如以 1 為單位取概數，當十分位數字是 0，1，2，3，4 時比較接近左邊的整數就捨去，當十分位數字是 5，6，7，8，9 比較接近右邊的整數就進位。

例如 13.76 中的十分位數字為 7，13.76 比較接近 14，四捨五入的結果是 14；13.46 中的十分位為 4，13.46 比較接近 13，四捨五入的結果是 13。

步驟三：先找出 5.6327 的百分位數字，得到 5.6327 介於 5.63 和 5.64 之間。

5.6327 比較靠近 5.64，所以四捨五入的結果是 5.64。

也可以透過千分位數字來判斷，千位數字是 2，比較靠近 5.63，四捨五入的結果是 5.63。

題號	20		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解(質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100)。		
試題內容	20. 下列關於質數 a 的敘述，哪些正確？ 甲：a 除了 1 和 a 之外，沒有其他的因數 乙：a 只有兩個因數 丙：a 不能分解成 2 個大於 1 的整數的乘積 ① 只有甲和乙正確 ② 只有甲和丙正確 ③ 只有乙和丙正確 ④ 甲、乙、丙都正確		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.39	0.34	0.36
2	0.17	0.26	0.07
3	0.12	0.21	0.03
4*	0.32	0.18	0.53
未作答	0.01		
通過率	0.32	鑑別度	0.35
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.35，正確答案為選項 4，通過率為 32%，顯示超過三成的學生已理解質數的意義。 2.有 39%的學生選擇選項 1(低分組有 34%)，這些學生理解課本質數的定義：只有 1 和自己兩個因數的數稱為質數，也知道質數只有 2 個因數。 3.有 17%的學生選擇選項 2(低分組有 26%)，這些學生理解課本質數的定義：只有 1 和自己兩個因數的數稱為質數，也知道質數不能分解成 2 個比 1 大的因數。 4.有 12%的學生選擇選項 3(低分組有 21%)，這些學生不理解課本質數的定義：只有 1 和自己兩個因數的數稱為質數，但是知道質數只有 2 個因數，質數不能分解成 2 個比 1 大的因數。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
年細目	5-n-04 能理解因數和倍數。 5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解(質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100)。	N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。

補救教學建議

- 1.本學期階段只要求學生能檢驗 20 以內的質數，國中階段才要求學生檢驗 100 以內的質數。
- 2.教師應強調 $13 \times 7 = 91$ ，所以 13 和 7 都是 91 的因數。
- 3.教師可以透過分類的活動，將正整數區分成因數只有 1 個、因數只有 2 個、以及因數有 3 個或比 3 個多的數等三類，幫助學生區分 1、質數與合數。
例如列出 1~12 各數的所有因數，幫助學生認識：
因數只有 1 個的數：1
因數只有 2 個的數：2、3、5、7、11
因數有 3 個或比 3 個多的數：4、6、8、9、10、12
(1)2 的因數是 1 和 2；3 的因數是 1 和 3；5 的因數是 1 和 5，....。
因數只有 2 個的數，它們的因數都是 1 和本身，數學上稱這些數為質數。
也可以說，除了 1 和自己之外，沒有其它因數的整數稱為質數。
(2)4 的因數除了 1 和 4 之外還有 2；6 的因數除了 1 和 6 之外還有 2 和 3；8 的因數除了 1 和 8 之外還有 2 和 4，....。因數有 3 個或比 3 個多的數，它們的因數除了 1 和本身以外，還有其他的數，數學上稱這些數為合數。
(3)1 的因數只有 1 個，所以 1 不是質數也不是合數。

題號	21		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。		
試題內容	21. 一盒巧克力有 24 顆，老闆將 $15\frac{3}{4}$ 盒的巧克力，每 $\frac{1}{2}$ 盒裝成一袋，請問最多可以裝滿幾袋，剩下多少巧克力？ ① 裝滿 31 袋，剩下 6 顆 ② 裝滿 31 袋，剩下 $\frac{1}{2}$ 盒 ③ 裝滿 7 袋，剩下 21 顆 ④ 裝滿 7 袋，剩下 $\frac{7}{8}$ 盒		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.36	0.23	0.52
2	0.36	0.37	0.31
3	0.14	0.21	0.09
4	0.13	0.17	0.07
未作答	0.01		
通過率	0.36	鑑別度	0.29
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.29，正確答案為選項 1，通過率為 36%，顯示近四成的學生已具備利用分數除法解決生活中問題的能力。 2.有 36%的學生選擇選項 2(低分組有 37%)，這些學生可能不具備利用分數除法解決生活中問題的能力，他們透過顛倒相乘的算則算出商為 $31\frac{1}{2}$ 袋後，誤將 $\frac{1}{2}$ 袋看成餘數 $\frac{1}{2}$ 盒。 3.有 14%的學生選擇選項 3(低分組有 21%)，這些學生可能不具備利用分數除法解決生活中問題的能力，也可能誤解題意，將除法情境當作乘法情境，利用 $\frac{63}{4} \times \frac{1}{2} = 7\frac{7}{8}$，以為可以分成 7 袋又剩下 $\frac{7}{8}$ 盒，$\frac{7}{8} \times 24 = 21$，得到剩下 $\frac{7}{8}$ 盒是 21 顆的答案。 4.有 13%的學生選擇選項 4(低分組有 17%)，些學生可能不具備利用分數除法解決生活中問題的能力，誤將除法情境當作乘法情境，利用 $\frac{63}{4} \times \frac{1}{2} = 7\frac{7}{8}$，以為可以分成 7 袋又剩下 $\frac{7}{8}$ 盒。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題
補救教學建議			
1.有三個因素和分數除法問題的難度有關： (1)題目的類型 ①等分除問題：$\frac{41}{5}$公升果汁相當於$\frac{4}{7}$瓶，1瓶果汁有幾公升？ ②包含除問題：$\frac{51}{7}$公升果汁，每$\frac{3}{5}$公升裝1瓶，全部相當於裝成幾瓶？ (2)記錄的格式 ①$a \div b = q \dots r$ (q 是整數，$0 \leq r < b$)： $\frac{51}{7}$公升果汁，每$\frac{3}{5}$公升裝1瓶，最多可以裝滿幾瓶，剩下幾公升？ ②$a \div b = \frac{a}{b}$： $\frac{51}{7}$公升果汁，每$\frac{3}{5}$公升裝1瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？ (3)單位數的範圍 ①單位數是整數：$\frac{41}{5}$公升果汁，平分成4瓶，1瓶果汁有幾公升？ ②單位數是分數或小數：$\frac{41}{5}$公升果汁相當於$\frac{4}{7}$瓶，1瓶果汁有幾公升？ 2.以「①$70 \div 20$、②$7 \div 2$、③$0.7 \div 0.2$」為例，當我們限制記錄的格式是$a \div b = q \dots r$時，這三題的答案不相同；當我們限制記錄的格式是$a \div b = \frac{a}{b}$時，這三題的答案相同。 (1)記錄格式是$a \div b = q \dots r$ ①$70 \div 20 = 3 \dots 10$、②$7 \div 2 = 3 \dots 1$、③$0.7 \div 0.2 = 3 \dots 0.1$，這三題的答案不相同。 (2)記錄格式是$a \div b = \frac{a}{b}$ ①$70 \div 20 = \frac{70}{20} = \frac{7}{2}$、②$7 \div 2 = \frac{7}{2}$、③$0.7 \div 0.2 = \frac{0.7}{0.2} = \frac{7}{2}$，這三題的答案相同。			

教師布題時應強調答案是哪種記錄格式，如果要求的記錄格式是 $a \div b = q \dots r$ ，不論餘數為 0 或不為 0，布題時應同時詢問商及餘數，如果要求的記錄格式是 $a \div b = \frac{a}{b}$ ，建議要加上「全部分完」的限制。

3. 我們熟悉單位數是整數的情境，例如「3 瓶果汁、4 條繩子、轉 5 圈」，「走 3 步、打 4 下、加 5 次」等。

我們可能也接受下面這些單位數不是整數的情境，例如「 $\frac{3}{5}$ 瓶果汁、 $\frac{3}{5}$ 條繩子、轉 $\frac{3}{5}$ 圈」等。但是，我們不接受下面這些單位數不是整數的情境，例如：走 $\frac{3}{5}$ 步、打 $\frac{3}{5}$ 下、加 $\frac{3}{5}$ 次等。

我們可以接受以 $\frac{3}{5}$ 瓶果汁，可能的原因是我們已掌握 1 瓶果汁的量， $\frac{3}{5}$ 瓶果汁是和 1 瓶果汁比較的結果。

我們可以接受轉 $\frac{3}{5}$ 圈，可能的原因是我們已掌握轉 1 圈的量，例如已知轉 1 圈是 360 度，轉 $\frac{3}{5}$ 圈(216 度)是和轉 1 圈比較的結果。

我們不接受走 $\frac{3}{5}$ 步，可能的原因是我們走每一步的距離並不相同，也就是無法掌握走 1 步的量，因此無法接受走 $\frac{3}{5}$ 步。假設走每一步的距離都是 50 公分，現在走的這一步是 30 公分，和 50 公分比較，走 30 公分可以說相當於走了 $\frac{3}{5}$ 步。

我們不接受打 $\frac{3}{5}$ 下，可能的原因是每打每一下的力量都不相同，也就是無法掌握打 1 下的量，因此無法接受打 $\frac{3}{5}$ 下。假設打每一下的量都是 50 公斤，如果打這一下只有 30 公斤，和 50 公斤比較，30 公斤可以說相當於打了 $\frac{3}{5}$ 下。

4. 單位數不是整數的問題，數學上稱為「相當於問題」，本基本學習內容限制「相當於問題」的紀錄格式只能是 $a \div b = \frac{a}{b}$ ，都不討論餘數。例如「 $\frac{9}{7}$ 公升果汁相當於 $\frac{3}{5}$ 瓶，一瓶有多少公升？」的單位數不是整數，不討論餘數。

5.問題 1：8 公尺長的繩子平分成 5 段，1 段長幾公尺？

問題 2：8 公尺長的繩子平分成 $\frac{3}{5}$ 段，1 段長幾公尺？

問題 3：8 公尺長的繩子相當於 $\frac{3}{5}$ 段，1 段長幾公尺？

學生熟悉問題 1 的問法，但是不接受問題 2 的問法，因為問題 1 是等分除問題
的問法，在等分除情境中，繩子只能平分成整數段，不能平分成分數段。學生不
接受問題 2 的問法，但是可能會接受問題 3 的問法，因為問題 3 是比的問法，

指的是 $\frac{3}{5}$ 段繩子的長度是 8 公尺時，1 段繩子的長度是多少公尺。

建議教師在單位數不是整數的問題情境中，都使用「相當於」的描述。

例如：1 盒蘋果有 5 顆，3 顆相當於多少盒？

$\frac{51}{7}$ 公升果汁，每 $\frac{3}{5}$ 公升裝 1 瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？

除數是分數的包含除問題包含有餘數和沒有餘數兩種題型：

有餘數的問題：緞帶長 $\frac{9}{5}$ 公尺，每 $\frac{4}{7}$ 公尺做一朵花，最多可以做成幾朵花？

剩下幾公尺？

沒有餘數的問題：緞帶長 $\frac{9}{5}$ 公尺，每 $\frac{4}{7}$ 公尺做一朵花，全部做完，

相當於做成多少朵花？

5.以「 $\frac{41}{5}$ 公升果汁， $\frac{4}{7}$ 公升裝 1 瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？」為例，說明

如何引入沒有餘數的分數除法算則(顛倒相乘)。

步驟一：利用被除數及除數同時換單位策略來解題。

$$\begin{aligned} & \frac{41}{5} \div \frac{4}{7} \\ &= \frac{41 \times 7}{5 \times 7} \div \frac{4 \times 5}{7 \times 5} \rightarrow (\text{通分}) \\ &= (41 \times 7) \div (4 \times 5) \rightarrow (\text{同時以 } \frac{1}{35} \text{ 公升換單位}) \\ &= \frac{41 \times 7}{4 \times 5}, \text{ 答：相當於裝成 } \frac{41 \times 7}{4 \times 5} \text{ 瓶} \end{aligned}$$

步驟二：學生不易發現問題「 $\frac{41}{5} \div \frac{4}{7}$ 」和答案「 $\frac{41 \times 7}{4 \times 5}$ 」的關係。

教師先將答案改記成兩分數的乘積。

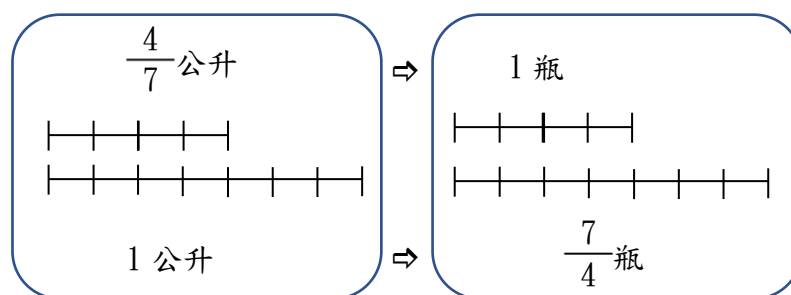
$$\begin{aligned} & \frac{41 \times 7}{4 \times 5} = \frac{41 \times 7}{5 \times 4} \rightarrow (\text{乘法交換律}) \\ &= \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} \rightarrow (\text{分數} \times \text{分數} = \frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}}) \end{aligned}$$

步驟三：要求學生觀察問題「 $\frac{41}{5} \div \frac{4}{7}$ 」和改寫後答案「 $\frac{41}{5} \times \frac{7}{4}$ 」的關係。

幫助學生發現可以利用顛倒相乘的方式直接算出答案。

6. 下面以問題「 $\frac{41}{5}$ 公升果汁， $\frac{4}{7}$ 公升裝 1 瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？」為例，提供利用倒數概念的解題方法給教師參考。

步驟一：說明 $\frac{4}{7}$ 公升裝 1 瓶時，1 公升可以裝 $\frac{7}{4}$ 瓶。



透過上面線段圖，可以理解「 $\frac{4}{7}$ 公升裝成 1 瓶時，1 公升是 $\frac{7}{4}$ 瓶」，其中 $\frac{4}{7}$ 和 $\frac{7}{4}$ 互為倒數。

步驟二：引入沒有餘數的分數除法算則(顛倒相乘)。

$$\begin{aligned}\frac{41}{5} \text{ 公升} &= \frac{41}{5} \text{ 個 } 1 \text{ 公升} \\ \Rightarrow \frac{41}{5} \text{ 個 } 1 \text{ 公升} &= \frac{41}{5} \text{ 個 } \left(\frac{7}{4} \text{ 瓶}\right) \\ \Rightarrow \frac{41}{5} \text{ 個 } 1 \text{ 公升} &= \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} \text{ 瓶}\end{aligned}$$

7. 以「 $\frac{41}{5}$ 公升果汁， $\frac{4}{7}$ 公升裝 1 瓶，最多裝滿幾瓶，還剩下多少公升？」為例，

說明如何幫助學生解有餘數的包含除問題。

下面提供兩種解題的方法：

方法一：利用被除數和除數同時換單位策略來解題

$$\frac{41}{5} \text{ 公升} = \frac{287}{35} \text{ 公升} \Rightarrow 287 \text{ 個 } \frac{1}{35} \text{ 公升}$$

$$\frac{4}{7} \text{ 公升} = \frac{20}{35} \text{ 公升} \Rightarrow 20 \text{ 個 } \frac{1}{35} \text{ 公升}$$

$$287 \div 20 = 14(\text{瓶}) \dots 7 \left(7 \text{ 個 } \frac{1}{35} \text{ 公升}\right)$$

$$\text{可以記成：} \frac{287}{35} \div \frac{20}{35} = 14 \dots \frac{7}{35} \left(\frac{7}{35} = \frac{1}{5}\right)$$

答：最多裝滿 14 瓶，剩下 $\frac{1}{5}$ 公升

方法二：利用沒有餘數的分數除法算則(顛倒相乘)來解題

步驟一：利用顛倒相乘算出全部裝完相當於多少瓶

$$\frac{41}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{287}{20} = 14\frac{7}{20}(\text{瓶})$$

步驟二：說明 $14\frac{7}{20} = 14(\text{瓶}) + \frac{7}{20}(\text{瓶})$ ，

所以最多裝滿 14 瓶，剩下 $\frac{7}{20}$ 瓶。

步驟三：將剩下的 $\frac{7}{20}$ 瓶換成多少公升。

$$\frac{4}{7} \times \frac{7}{20} = \frac{1}{5}(\text{公升})$$

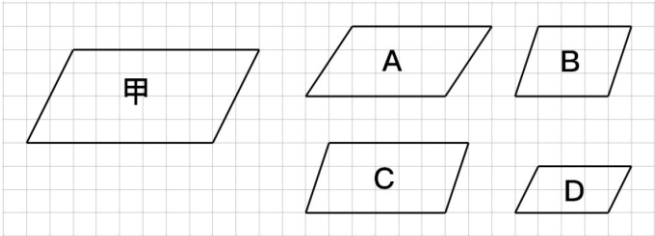
答：最多裝滿 14 瓶，剩下 $\frac{1}{5}$ 公升

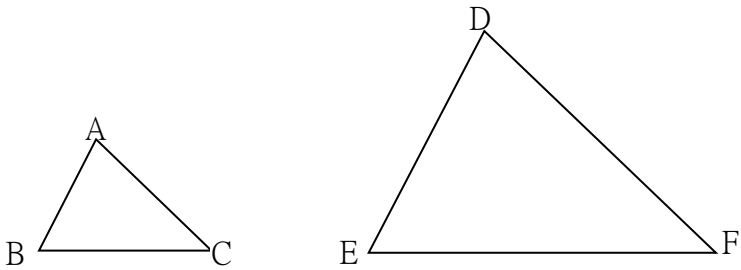
三年級學生已在整數情境中，理解乘除互逆的意義。本能力指標已完成分數乘除的教學，教師應檢查學生是否能在分數情境中，理解乘除互逆的意義。

8.回到原題目，學生可利用 7.的方法一求出最多可以裝滿 31 瓶，剩下 $\frac{1}{4}$ 盒，也可利

用方法二求出最多可以裝滿 $31\frac{1}{2}$ 袋，又 1 袋是 $\frac{1}{2}$ 盒，所以得到剩下 $\frac{1}{4}$ 盒。之後再利

用 1 盒是 24 顆，得到 $\frac{1}{4}$ 盒是 6 顆。

題號	22		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。		
試題內容	22. 如圖、A、B、C、D 四個圖形中，哪個圖形是甲的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖？  ① A ② B ③ C ④ D		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.20	0.04
2	0.09	0.16	0.04
3	0.07	0.14	0.02
4*	0.72	0.49	0.91
未作答	0.01		
通過率	0.72	鑑別度	0.41
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.41，正確答案為選項 4，通過率為 72%，顯示超過七成的學生已具備辨識放大圖及縮小圖的能力。 2.有 11%的學生選擇選項 1(低分組有 20%)，這些學生可能不具備辨識放大圖及縮小圖的能力；也可能不理解 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖的意義，選擇 $\frac{3}{4}$ 倍的縮小圖為答案。 3.有 9%的學生選擇選項 2(低分組有 16%)，這些學生可能不具備辨識放大圖及縮小圖的能力，選擇底縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的圖形為答案。 4.有 7%的學生選擇選項 3(低分組有 14%)，這些學生可能不具備辨識放大圖及縮小圖的能力。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。	9-s-01 能理解平面圖形縮放的意義。
補救教學建議			
1. 教師應透過操作與測量協助學生學習圖形的放大圖、縮小圖，幫助學生看到兩個相似圖形間構成要素的對應關係，例如：三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖，邊 AB 的對應邊為邊 DE，邊 DE 的長度＝邊 AB 的長度×2，邊 BC 的對應邊為邊 EF，邊 EF 的長度＝邊 BC 的長度×2，邊 AC 的對應邊為邊 DF，邊 DF 的長度＝邊 AC 的長度×2；A 點的對應點為 D 點，B 點的對應點為 E 點，C 點的對應點為 F 點；∠A 的對應角為∠D，∠A＝∠D，∠B 的對應角為∠E，∠B＝∠E，∠C 的對應角為∠F，∠C＝∠F。  2. 教師應幫助學生連絡「比」、「比值」和「幾倍放大(縮小)圖」的關係。 教師應幫助學生認識下面三種表示法都可以說明「三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖」的關係，為引入比例尺的教學鋪路。 第一種：比的表示法 $\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 1, \overline{EF} : \overline{BC} = 2 : 1, \overline{DF} : \overline{AC} = 2 : 1$ 第二種：比值的表示法 $\overline{DE} \div \overline{AB} = 2, \overline{EF} \div \overline{BC} = 2, \overline{DF} \div \overline{AC} = 2$ 第三種：倍的表示法 $\overline{DE} \text{長是} \overline{AB} \text{的} 2 \text{倍}, \overline{EF} \text{長是} \overline{BC} \text{的} 2 \text{倍}, \overline{DF} \text{長是} \overline{AC} \text{的} 2 \text{倍}$ 3. 以「將正方形甲對摺兩次，得到正方形乙，請問正方形乙是正方形甲的幾倍縮小圖？」為例，有兩種溝通幾倍縮小圖的方法。			

第一種：利用邊長的關係來溝通

正方形甲和正方形乙相似，對應邊成比例，正方形乙的邊長是正方形

甲對應邊長的 $\frac{1}{2}$ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。

第二種：利用面積的關係來溝通

正方形乙的面積是正方形甲面積的 $\frac{1}{4}$ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 $\frac{1}{4}$

倍縮小圖。

因為長度比面積容易測量，因此數學上約定乙是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍縮小圖，指的是乙

的邊長是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍，不是指乙的面積是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍。

4. 放大和縮小都是兩個圖形的關係，教師在課堂活動或評量時，應同時描述放大或縮小前、後的兩個圖形。

例如「 $\triangle ABC$ ， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle B=20^\circ$ ，將該三角形放大 2 倍後， $\angle C=?$ 」就是錯誤的描述方式，因為問題中沒有說明 $\triangle ABC$ 放大為 2 倍後的圖形為何，正確的描述是「 $\triangle ABC$ ， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle B=20^\circ$ ，將 $\triangle ABC$ 放大為 2 倍後的圖形是 $\triangle DEF$ ，求 $\angle F=?$ 」。

題號	23		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。		
試題內容	23. 將 36 位男生和 24 位女生分組，男生和男生分組，女生和女生分組，每組的人數都一樣多，最少可以分成多少組？ ① 5 ② 6 ③ 12 ④ 72		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.28	0.15	0.44
2	0.27	0.32	0.21
3	0.39	0.44	0.30
4	0.06	0.09	0.04
未作答	0.01		
通過率	0.28	鑑別度	0.30
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.30，正確答案為選項 1，通過率為 28%，顯示近三成的學生已具備利用求兩數最大公因數解題的能力。 2.有 27%的學生選擇選項 2(低分組有 32%)，這些學生可能不具備利用求兩數最大公因數解題的能力；也可能受到題目「<u>最少</u>分成多少組？」所影響，以選項中 36、24 的最小公因數 6 作為答案。 3.有 39%的學生選擇選項 3(低分組有 44%)，這些學生可能不具備利用求兩數最大公因數解題的能力，他們算出 36、24 的最大公因數 12，卻無法掌握最大公因數 12 在文字題情境中的意義，直接以 12 當作答案。 4.有 6%的學生選擇選項 4(低分組有 9%)，這些學生可能不具備利用求兩數最大公因數解題的能力，他們以 36、24 的最小公倍數 72 當作答案。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-04 能理解因數和倍數。 5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。	7-n-02 能理解因數、質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。

補救教學建議

1. 學生面對利用最大公因數或最小公倍數性質解題的文字題時，常不知道該用哪一種性質來解題。教師不宜要求學生記憶題型，看到題目就直接作答，應幫助學生養成利用嘗試錯誤方式解題的能力。

例如解「長方形紙長 96 公分，寬 54 公分，哥哥要裁成一樣的的正方形，此正方形最大的邊長是幾公分？」時，先假設正方形的邊長是 1 公分，發現滿足題意，再假設正方形的邊長是 2 公分，發現也滿足題意，就知道必須利用最大公因數的性質來解題。

例如解「弟弟想用長 4 公分、寬 6 公分的長方形色紙，排成正方形，最少需要幾張色紙？」時，先假設正方形的邊長都是 1 公分，發現不滿足題意，再假設正方形的邊長都是 24 公分，發現滿足題意，就知道必須利用最小公倍數的性質來解題。

教師也可以提醒學生，1 是兩數的最小公因數，如果 1 滿足題意，就是求公因數的問題，如果 1 不滿足題意，就是求公倍數的問題。

2. 以「找出 18 和 24 的最大公因數」為例，說明如何利用質因數分解法求兩數的最大公因數。

步驟一：先將 18 及 24 進行質因數分解： $18=2\times 3\times 3$ ； $24=2\times 2\times 2\times 3$

步驟二：教師提供 18 和 24 的所有因數(以質因數分解算式呈現)。

18 的因數：1、2、3、 2×3 、 3×3 、 $2\times 3\times 3$

24 的因數：1、2、3、 2×2 、 2×3 、 $2\times 2\times 2$ 、 $2\times 2\times 3$ 、 $2\times 2\times 2\times 3$

步驟三：幫助學生找出公因數 1、2、3、 2×3 ，以及最大公因數 2×3 。

步驟四：要求學生觀察最大公因數 2×3 ，和 18 及 24 質因數分解的算式：

$$18= \boxed{2\times 3}\times 3.$$

$$24=2\times 2\times \boxed{2\times 3}.$$

幫助學生理解最大公因數 2×3 是 18 和 24 共同質因數的乘積。

步驟五：給定 18 及 24 質因數分解的算式，要求學生直接找出 18 及 24 的最大公因數。

3. 以「找出 18 和 24 的最大公因數」為例，說明如何利用短除法求兩數的最大公因數。

步驟一：複習質因數分解法求兩數的最大公因數，18 和 24 的最大公因數 2×3 是共同質因數的乘積。

步驟二：

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline & 9 & 12 \end{array}$$

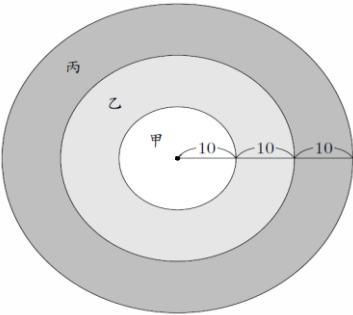
2 是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 2，得到 $18=2\times 9$ ， $24=2\times 12$ 。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline 3 & 9 & 12 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

步驟三：

3 也是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 3，得到 $18=(2\times 3)\times 3$ ， $24=(2\times 3)\times 4$ 。

步驟四：3 和 4 互質，沒有共同的質因數。

步驟五：共同質因數的乘積是 2×3 ， 2×3 是 18 和 24 的最大公因數。			
題號	24		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-s-03(同 6-n-14) 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。		
試題內容	24. 如圖，請問下列何者為乙區域和丙區域的面積比？  (單位：公分) ① 1 : 1 ② 2 : 3 ③ 3 : 5 ④ 4 : 9		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.25	0.06
2	0.49	0.45	0.44
3*	0.21	0.18	0.28
4	0.13	0.09	0.21
未作答	0.02		
通過率	0.21	鑑別度	0.10
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.10，正確答案為選項 3，通過率為 21%，顯示超過二成的學生已具備利用圓面積公式解題的能力。 2. 有 15% 的學生選擇選項 1(低分組有 25%)，這些學生可能尚未具備利用圓面積公式解題的能力；或是無法理解題意，看到乙和丙兩個輪型區域的寬度皆為 10 公分，故選擇 1 : 1 為答案。 3. 有 49% 的學生選擇選項 2(低分組有 45%)，這些學生可能混淆圓周長與圓面積公式，或是誤解題意，誤求為中圓和大圓的圓周長比： $(10 \times 2) \times 2 \times 3.14 : (10 \times 3) \times 2 \times 3.14$ $= 40 : 60$ $= 2 : 3$ 4. 有 13% 的學生選擇選項 4(低分組有 9%)，這些學生可能已理解圓面積公式為「圓面積 = 半徑 $\times$ 半徑 $\times$ 圓周率」，但無法理解題意，認為： 乙區域面積：丙區域面積 $= \text{中圓面積} : \text{大圓面積}$ $= (10 \times 2) \times (10 \times 2) \times 3.14 : (10 \times 3) \times (10 \times 3) \times 3.14$ $= 400 : 900$			

=4:9

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。	6-s-03(同 6-n-14) 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。	8-s-20 能理解與圓相關的概念(如半徑、弦、弧、弓形等)的意義。

補救教學建議

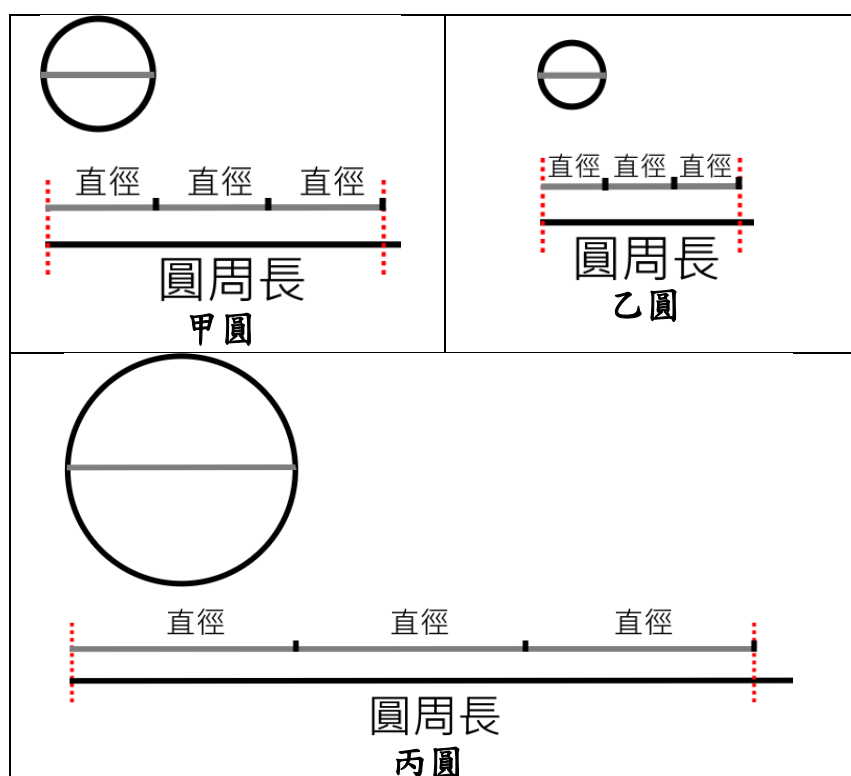
1.圓周率的率指的是比率，比率相等指的是所有的圓都相似，也就是說，所有的圓，其圓周長和直徑的比、圓周長和半徑的比以及直徑和半徑的比都相等。
圓的周長是曲線，不易測量其長度，而圓的直徑是直線，比較容易測量，因此只要知道「圓周長：直徑長」的比值，測量出直徑後就能算出圓的周長，數學上稱「圓周長：直徑長」的比值為圓周率。

2.下面說明如何幫助學生掌握圓周率的意義：

教師先給定 3 個大小不同的圓，再提供下面兩種情境，幫幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。

(1)觀察給定三個圓的圓周長和 3 倍直徑長的長短關係

教師分別畫出這 3 個圓的圓周長以及直徑長的 3 倍，要求學生觀察這些圓的圓周長和 3 倍直徑長，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。如下所示：



(2)比較三個圓「圓周長÷直徑長」商的大小關係

教師給定三個圓的圓周和直徑的長度，以及「圓周長÷直徑長」的商(商數以四捨五入法取概數到百分位)，幫助學生認識

「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。

如下所示：

	圓周長 (公分)	直徑長 (公分)	圓周長÷直徑長 (四捨五入到百分位)
甲圓	56.5	18	3.14
乙圓	38.0	12	3.17
丙圓	72.5	23	3.15

教師應同時提供兩種情境，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比3大一點。第一種情境是比的想法，學生可以同時看到圓周長和直徑3倍長的關係；第二種情境是比值的想法，學生可能只將注意力放在「圓周長÷直徑長」的商，而無法察覺圓周長和直徑3倍長的關係。

3. 先將圓切成兩個半圓，再將兩個半圓都切成很多個(例如8個或16個)全等的扇形，將這兩個切成扇形的半圓上下交錯疊合起來，會變成接近平行四邊形(或長方形)的圖形，平行四邊形的底(長方形的長)是圓周長的一半，平行四邊形的高(長方形的寬)是圓的半徑，可以透過平行四邊形(長方形)面積求出圓面積。

圓面積

= 平行四邊形面積

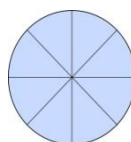
= 底×高

= 圓周長的一半×半徑

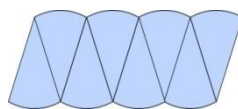
= (直徑×3.14)÷2×半徑

= (直徑÷2×3.14)×半徑

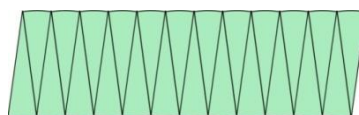
= 半徑×半徑×3.14



一個被八等分分割的圓



重新組一個被八等分割的圓



重新組一個被二十四等分割的圓

4. 以「半徑10公分、圓心角36度的扇形面積是多少平方公分？」為例，提供兩種解題的方法。

方法一：以幾分之幾圓的想法來解題

$$36 \div 360 = \frac{1}{10}, (10 \times 10 \times 3.14) \times \frac{1}{10} = 31.4,$$

答：31.4 平方公分

方法二：以1度圓心角對應的扇形面積為單位來解題

$$(10 \times 10 \times 3.14) \times \frac{36}{360} = 31.4, \text{ 答：} 31.4 \text{ 平方公分}$$

學生較容易掌握第一種方法解題的意義。

5. 建議教師在處理需同心圓的複合圖形面積問題時，應試著讓學童動手繪製、塗色，甚至剪下內側的圓，用以確認環狀區域的面積的確是完整的外側圓面積扣除掉剪下的內側圓面積。學童可能在課堂上較少真正進行「觀察並擬定解題策略→用具體物或半具體物確認是否正確」的操作，多數時候僅用眼睛觀察，無法留下深刻印象與解題經驗，所以遇到此類複合圖形面積的問題時較難順利解題。

題號	25		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-s-03(同 6-n-14) 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。		
試題內容	25. 甲圓的半徑是 10 公尺，乙圓的半徑是 11 公尺。 丙圓的半徑是 10000 公尺，丁圓的半徑是 10001 公尺。 如果甲、乙兩圓的圓周長相差 a 公尺，丙、丁兩圓的圓周長相差 b 公尺， 請問 b 是 a 的多少倍？ ① 1 ② 10 ③ 100 ④ 1000		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.33	0.18	0.54
2	0.13	0.20	0.06
3	0.23	0.31	0.12
4	0.28	0.27	0.26
未作答	0.03		
通過率	0.33	鑑別度	0.36
試題品質分析			
1.本題鑑別度為 0.36，正確答案為選項 1，通過率為 33%，顯示超過三成的學生已具備利用圓周長公式及乘法對減法分配律解題的能力。這些學生知道甲和乙兩圓周長的差 $a=2\times 3.14\times(11-10)=6.28$、丙和丁兩圓周長的差 $b=2\times 3.14\times(10001-10000)=6.28$，$a=b$，得到 b 是 a 的 1 倍的答案。 2.有 13%的學生選擇選項 2(低分組有 20%)，這些學生可能不具備利用圓周長公式及乘法對減法分配律解題的能力，這些學生可能分別算出甲、乙、丙、丁圓的周長，再算出甲圓和乙圓圓周長的差 a，以及丙圓和丁圓圓周長的差 b，最後再算出 b 是 a 的多少倍，因為計算繁雜而算錯，或因為計算繁雜而亂選選項。 3.有 23%的學生選擇選項 3(低分組有 31%)，這些學生可能不具備利用圓周長公式及乘法對減法分配律解題的能力，這些學生可能分別算出甲、乙、丙、丁圓的周長，再算出甲圓和乙圓圓周長的差 a，以及丙圓和丁圓圓周長的差 b，最後再算出 b 是 a 的多少倍，因為計算繁雜而算錯，或因為計算繁雜而亂選選項。 4.有 28%的學生選擇選項 4(低分組有 27%)，這些學生可能不具備利用圓周長公式及乘法對減法分配律解題的能力，這些學生可能認為丙圓半徑 10000 是甲圓半徑 10 的 1000 倍，因而選擇 1000 倍的答案。			

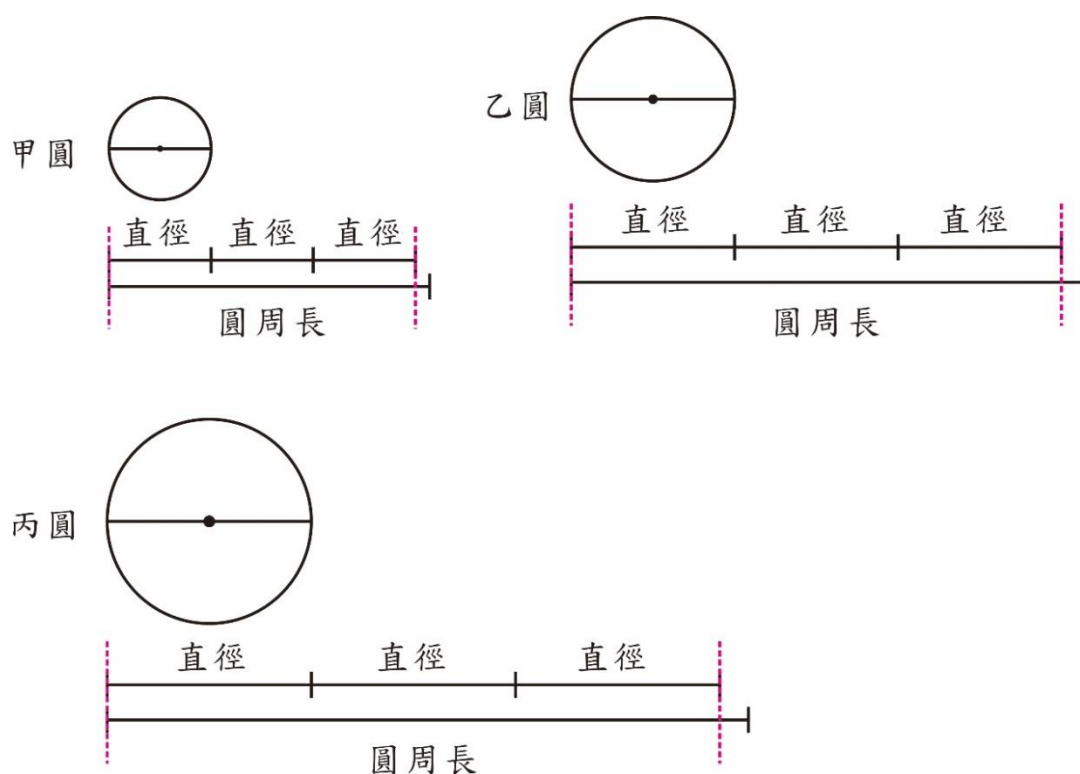
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-s-05：（同 5-n-18） 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。 5-a-01：能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化心算。	6-s-03(同 6-n-14) 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。	6-s-03：(同 6-n-14) 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。
補救教學建議			
1. 以「豆漿一杯 20 元，奶茶一瓶 40 元，媽媽各買了 6 杯，要付多少元？」為例，說明如何幫助學生理解乘法對加法的分配律。 教學時應出現下面兩種解題的方法，如果學生只出現其中一種解法，教師應提供另一種解法讓學生討論。 方法一：分別計算 6 杯豆漿和 6 瓶奶茶的錢，再算合起來是多少錢。 $20 \times 6 = 120$，$40 \times 6 = 240$，$120 + 240 = 360$，並改用併式「$20 \times 6 + 40 \times 6 = 360$」來記錄。 方法二：將 1 杯豆漿和 1 瓶奶茶看成 1 份，先算 1 份的錢，再算 6 份的錢。 $20 + 40 = 60$，$60 \times 6 = 360$，並改用併式「$(20 + 40) \times 6 = 360$」來記錄。 理解乘法對加法的分配有兩個層次： 層次一：學生必須分別算出方法一的答案「$20 \times 6 + 40 \times 6 = 360$」和方法二的答案「$(20 + 40) \times 6 = 360$」，發現這兩種方法算出的答案相同，才可以記成「$20 \times 6 + 40 \times 6 = (20 + 40) \times 6$」。 層次二：學生知道它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同，可以記成「$20 \times 6 + 40 \times 6 = (20 + 40) \times 6$」 教師應幫助層次一的學生提升至層次二。 2. 可以透過面積模型幫助學生記憶乘法對加法分配律的意義，為國中利用長方形面積記憶乘法公式鋪路。 有兩種計算下列兩個長方形面積和的方法： 方法一：$5 \times 4 + 3 \times 4 = 32$ 方法二：$(5 + 3) \times 4 = 32$ 它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同，可以記成「$5 \times 4 + 3 \times 4 = (5 + 3) \times 4$」。 			

3. 下面說明如何幫助學生掌握圓周率的意義：教師先給定 3 個大小不同的圓，再提供兩種方法，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還要長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。

方法一：觀察給定三個圓的圓周長和 3 倍直徑長的長短關係

教師分別畫出這 3 個圓的圓周長以及直徑長的 3 倍，要求學生觀察這些圓的圓周長和 3 倍直徑長，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。

如下所示：



方法二：比較三個圓「圓周長÷直徑長」商的大小關係

教師給定三個圓的圓周和直徑的長度，以及「圓周長÷直徑長」的商(商數以四捨五入法取概數到百分位)，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。如下所示：

	圓周長 (公分)	直徑長 (公分)	圓周長÷直徑長 (四捨五入到百分位)
甲圓	56.5	18	3.14
乙圓	38.0	12	3.17
丙圓	72.5	23	3.15

教師應同時提供兩種方法，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點。

第一種方法是比的想法，學生可以同時看到圓周長和直徑 3 倍長的關係；第二種方法是比值的想法，學生可能只將注意力放在「圓周長÷直徑長」的商，而無法察覺圓周長和直徑 3 倍長的關係。

4. 「圓周長÷直徑長＝圓周率($\frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}} = \text{圓周率}$)」和「圓周長＝直徑長×3.14」是相同的關係，只記憶其中一個公式，就能導出另一個公式。前者較容易幫助學生認識圓周率的意義，而後者只幫助學生記憶圓周率是 3.14。建議教師教學時，宜強調「圓周長÷直徑長＝圓周率(3.14)」，幫助學生掌握圓周率的意義，不宜只強調「圓周長＝直徑長×3.14」。