

## 七年級試題選項分析與教學建議


題號	1		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」( $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ，其中 $m, n$ 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」( $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ，其中 $m \geq n$ 且 $m, n$ 為非負整數)。		
試題內容	<p>1. 計算 <math>\underbrace{3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times \dots \times 3^2}_{\text{連乘 10 次}} = ?</math></p> <p>① 90</p> <p>② 900</p> <p>③ <math>3^{12}</math></p> <p>④ <math>3^{20}</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.17	0.02
2	0.08	0.18	0.01
3	0.06	0.11	0.02
4*	0.77	0.54	0.95
未作答	0.00		
通過率	0.77	鑑別度	0.41
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明</p> <p>本題給定一個指數連乘的算式，要求學生算出答案，評量學生應用指數律於計算的能力。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明</p> <p>1. 本題鑑別度為 0.41，正確答案為選項 4，通過率為 77%，顯示超過七成五的學生已具備應用指數律於計算的能力。</p> <p>2. 有 9% 的學生選擇選項 1 (低分組有 17%)，這些學生可能不理解指數律，誤以為 <math>9^{10}</math> 次就是 90，而得到 <math>3^2 \times 3^2 \times L \times 3^2 = 9 \times 9 \times L \times 9 = 9^{10} = 90</math> 的錯誤答案。</p> <p>3. 有 8% 的學生選擇選項 2 (低分組有 18%)，這些學生可能不理解指數律，誤以為連成 10 次就是 100 倍，而得到 <math>3^2 \times 3^2 \times L \times 3^2 = 9 \times 9 \times L \times 9 = 900</math>。</p>		

教材地位 分析	學習 內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
		N-6-1 20 以內的質數和 質因數分解：小 於 20 的質數與 合數。2、3、5 的 質因 數判別法。以短 除法做質因數的 分解。	N-7-7 指數律：以數字例表示 「同底數的乘法指數 律」( $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ，其中 $m, n$ 為非負整數); 以數 字例表示「同底數的除 法指數律」 $(a^m \div a^n = a^{m-n}$ ， 其中 $m \geq n$ 且 $m, n$ 為非 負整數)。	N-8-6 等比數列：等比 數列；給定首 項、公比計算等 比數列的一般 項。
補救教學 建議	<p>下面以「<math>3^a \times 3^5 = 3^8</math>, <math>a = ?</math>」為例，說明如何幫助學生解題。</p> <p>(一) 先復習指數的定義，</p> <p><math>7+7+7+7+7+7</math>，6 個 7 相加可以記成 <math>7 \times 6</math>，</p> <p><math>7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7</math>，6 個 7 相乘可以記成 <math>7^6</math>，</p> <p><math>a+a+a+a+a</math>，5 個 <math>a</math> 相加可以記成 <math>a \times 5</math>，</p> <p><math>a \times a \times a \times a \times a</math>，5 個 <math>a</math> 相乘可以記成 <math>a^5</math>。</p> <p>(二) 先舉一些同底指數相乘的例子，以 <math>3^2 \times 3^5</math> 為例，幫學生察覺：</p> $3^2 \times 3^5$ $= (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 3^{2+5}$ $= 3^7$ <p>(三) 再舉一些同底指數相除的例子，以 <math>7^6 \div 7^2</math> 為例，幫助學生察覺：</p> $7^6 \div 7^2$ $= (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7) \div (7 \times 7)$ $= \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7}$ $= 7^{6-2}$ $= 7^4$ <p>(四) 回到本題，因此</p> $3^2 \times 3^a \times 3^2 \times 3^4 \times 3^2 = 3^{2+2+a+2+2} = 3^{2 \times 10} = 3^{20}$ <p style="text-align: center;">連乘 10 次</p>			

題號	2		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。		
試題內容	<p>2. 下圖是小茹利用短除法求 630 和 675 的最小公倍數的過程，其中 <math>a</math>、<math>b</math>、<math>c</math>、<math>d</math>、<math>e</math> 都是正整數。</p> $  \begin{array}{r}  a \left  \begin{array}{cc} 630 & 675 \\ \hline 210 & 225 \\ \hline 70 & 75 \\ \hline d & e \end{array} \\  b \left  \begin{array}{cc} 210 & 225 \\ \hline 70 & 75 \\ \hline d & e \end{array} \\  c \left  \begin{array}{cc} 70 & 75 \\ \hline d & e \end{array}  \end{array}  $ <p>請問下列哪個數與 <math>e</math> 互質？</p> <p>① <math>a</math>  ② <math>b</math>  ③ <math>c</math>  ④ <math>d</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.10	0.00
2	0.07	0.16	0.01
3	0.16	0.34	0.02
4*	0.73	0.39	0.97
未作答	0.00		
通過率	0.73	鑑別度	0.58
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明</p> <p>本題給定兩個數及短除法計算最小公倍數的過程，要求學生選出與 <math>e</math> 互質的數，評量學生是否理解短除法求最小公倍數最後兩數一定互質。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明</p> <p>1. 本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項 4，通過率為 73%，顯示超過七成的學生已理解短除法求最小公倍數最後兩數一定互質。</p> <p>2. 有 16% 的學生選擇選項 3(低分組有 34%)，這些學生可能未察覺題目短除法格式中各個數的意義，因此在進行短除法時，計算出 <math>a=9</math>，<math>b=5</math>，最後將 <math>c</math> 視為 1，而有了 <math>c</math> 與 <math>e</math> 互質的想法。</p>		

教材地位 分析	學習內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
		N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。	N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。	
補救教學 建議	<p>(一) 複習如何運用短除法進行一個正整數的質因數分解。 分解過程中，每個數都是質因數。</p> $  \begin{array}{r}  2 \mid 630 \\  3 \mid 315 \\  3 \mid 105 \\  5 \mid 35 \\  7  \end{array}  $ <p>(二) 複習如何透過短除法求兩個正整數的最小公倍數。 例如 利用短除法求 462 和 546 的最小公倍數</p> $  \begin{array}{r}  462 \quad 546 \quad \text{有共同質因數 } 2 \cdots 2 \mid 462 \quad 546 \\  231 \quad 273 \quad \text{有共同質因數 } 3 \cdots \cdots 3 \mid 231 \quad 273 \\  77 \quad 91 \quad \text{有共同質因數 } 7 \cdots \cdots 7 \mid 77 \quad 91 \\  11 \quad 13  \end{array}  $ <p>11 和 13 沒有共同質因數，所以短除法計算完畢 結論：短除法求兩個正整數的最小公倍數時，當算到最後兩數無共同質因數，短除法即計算完畢。此時，最後兩數的最大公因數為 1，也就稱這兩數「互質」。</p> <p>(三) 以本題目說明解題步驟。 方法一：認真的完成短除法，確認與 15 互質的只有 14。</p> $  \begin{array}{r}  3 \mid 630 \quad 675 \\  3 \mid 210 \quad 225 \\  5 \mid 70 \quad 75 \\  14 \quad 15  \end{array}  $ <p>方法二：利用上述的結論思考，一定互質的兩數是最後的 <math>d</math> 和 <math>e</math>。</p>			



		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位 分析	學習內容	N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。	N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。	
補救教學 建議	<p>(一) 複習如何判斷質數。以 13 為例。</p> <p>需要檢查大於 1，小於 13 的整數，是否為 13 的因數。首先，2 不是 13 的因數，所以 4、6、8、10、12 也不是 13 的因數；其次，3 不是 13 的因數，所以 9 也不是 13 的因數；最後 5、7、11 也不是 13 的因數；所以 13 的正因數只有 1 和 13 本身，故 13 是一個質數。</p> <p>(二) 複習質數篩檢法。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1、首先 1 不是質數，刪去 1。</li> <li>2、在 2 的倍數中，除了 2 是質數，其餘是合數，所以保留 2，刪去 2 的倍數。</li> <li>3、同樣的步驟，保留 3，刪去 3 的倍數；保留 5，刪去 5 的倍數；保留 7，刪去 7 的倍數。此時應發現刪除 7 的倍數只有 3 個。</li> <li>4、要保留 11，刪去 11 的倍數時，發現沒得刪了。也就是剩下的都是質數。</li> </ol> 			

(三) 以本題目說明解題步驟。

題目中所說 6 張的排法有兩種，正是  $6=1\times 6=2\times 3$ ，也就是 6 是合數

四個選項中，只有 61 是質數，所以它的排法只有  $1\times 61$  一種  
其餘皆為合數，排法就不只一種了

$91=1\times 91=7\times 13$             有 2 種排法

$81=1\times 81=3\times 27=9\times 9$     有 3 種排法

$51=1\times 51=3\times 17$             有 2 種排法

題號	4		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-7-4 數的運算規律：交換律；結合律；分配律； $-(a+b)=-a-b$ ； $-(a-b)=-a+b$ 。		
試題內容	<p>4. 下列選項中哪個算式<u>不成立</u>？</p> <p>① <math>(128+64) \times 32 = 128 \times 32 + 64 \times 32</math></p> <p>② <math>(128-64) \times 32 = 128 \times 32 - 64 \times 32</math></p> <p>③ <math>128 \div (64+32) = 128 \div 64 + 128 \div 32</math></p> <p>④ <math>(128+64) \div 32 = 128 \div 32 + 64 \div 32</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.05	0.14	0.00
2	0.08	0.17	0.01
3*	0.67	0.42	0.90
4	0.19	0.26	0.09
未作答	0.00		
通過率	0.67	鑑別度	0.48
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定四個算式，要求學生找出不成立的算式，評量學生是否理解分配律。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.48，正確答案為選項 3，通過率為 67%，顯示近七成的學生已理解分配律。</p> <p>2. 有 19%的學生選擇選項 4(低分組有 26%)，這些學生可能在理解分配律上有誤。</p>		
教材地位分析		先備的知識	本題所需的知識
	學習內容	N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。	N-7-4 數的運算規律：交換律；結合律；分配律； $-(a+b)=-a-b$ ； $-(a-b)=-a+b$ 。
			延伸的知識
			N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。



補救教學  
建議

(一) 乘法的分配律運算。

1、先由情境說明分配律，

(1) 例如：「一包蘋果有 5 顆紅蘋果和 2 顆青蘋果，媽媽買了 3 包，一共買了幾顆？」

[方法一]先分別算紅蘋果有幾顆、青蘋果有幾顆，再算總共有幾顆？

因此得答案為  $5 \times 3 + 2 \times 3$ 。

[方法二]先一包有幾顆，再算總共有幾顆？

因此得答案為  $(5 + 2) \times 3$ 。

因為總顆數是不變，所以兩種算法的答案相等，

故  $5 \times 3 + 2 \times 3 = (5 + 2) \times 3$ 。

(2) 例如：「A 套餐內容有漢堡、薯條和紅茶，一份 60 元，若不要飲料，則少 10 元。小鐘班上訂了 A 套餐，但不要飲料，共要付多少錢？」。

[方法一]套餐扣掉飲料的 30 份，共付  $(60 - 10) \times 30$

[方法二]先算套餐總價，再扣掉飲料總價，共付  $60 \times 30 - 10 \times 30$

因為要付的價錢一樣，所以兩種算法的答案相等，

故  $(60 - 10) \times 30 = 60 \times 30 - 10 \times 30$

2、再利用直式、橫式觀察理解乘法分配律。

$$\begin{array}{r} 128 + 64 \\ \times) \quad \quad \quad \uparrow \\ \hline 128 \times 32 + 64 \times 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 - 64 \\ \times) \quad \quad \quad \uparrow \\ \hline 128 \times 32 - 64 \times 32 \end{array}$$

$$(128 + 64) \times 32 = 128 \times 32 + 64 \times 32$$

$$(128 - 64) \times 32 = 128 \times 32 - 64 \times 32$$

(二) 除法的分配律運算。

1、甲農場送給學校 128 顆水果，乙農場送給學校 64 顆水果，學校 32 位同學每個人拿到的數量一樣，每個人可以拿到幾顆？

[方法一](一起分)總水果數均分給每位同學，每人可以拿到

$$(128 + 64) \div 32 \text{ 顆}$$

[方法二](分開分)每位同學分到甲、乙農場的水果，每人可以拿到

$$128 \div 32 + 64 \div 32 \text{ 顆}$$

因為無論哪種分法，每人拿到的數量一樣所以兩種算法的答案相等，故  $(128 + 64) \div 32 = 128 \div 32 + 64 \div 32$

2、128 顆水果贈送給甲校(64 人)和乙校(32 人)，每個人拿到的數量會是「水果數量除以總人數」，也就是  $128 \div (64 + 32)$ 。

想一想：可以寫成  $128 \div 32 + 64 \div 32$  表示嗎？

很明顯的，這是上一題中的[方法二]，跟這題的意思顯然不一樣

了，因此 $128 \div (64 + 32) \neq 128 \div 32 + 64 \div 32$

3、除法的運算可將算式先寫成分數型態，觀察是否具備分配律。

$$\begin{array}{l} 128 \div (64 + 32) \\ = \frac{128}{64 + 32} \end{array} \qquad \begin{array}{l} (128 + 64) \div 32 \\ = \frac{128 + 64}{32} \\ = \frac{128}{32} + \frac{64}{32} \\ = 128 \div 32 + 64 \div 32 \end{array}$$

(三) 整合看見乘法分配律。以本題目說明解題步驟。

對部分學生而言，會主動將分配律中的「 $\times$ 」延伸至「 $\div$ 」，因此在除法中的觀察結果，宜告訴學生分配律只能應用在「 $\times$ 」法，對於「 $\div$ 」法，應將其轉換至乘法再進行計算較適合

$$\begin{array}{l} 128 \div (64 + 32) \\ = 128 \times \frac{1}{64 + 32} \\ \neq 128 \times \left( \frac{1}{64} + \frac{1}{32} \right) \end{array} \qquad \begin{array}{l} (128 + 64) \div 32 \\ = (128 + 64) \times \frac{1}{32} \\ = 128 \times \frac{1}{32} + 64 \times \frac{1}{32} \end{array}$$

題號	5		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。		
試題內容	<p>5. 計算 <math>10 - 3 \times (-\frac{5}{7}) + \frac{6}{7} = ?</math></p> <p>① <math>-4\frac{1}{7}</math></p> <p>② 1</p> <p>③ <math>8\frac{5}{7}</math></p> <p>④ 13</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.23	0.00
2	0.06	0.15	0.00
3	0.20	0.35	0.06
4*	0.64	0.26	0.94
未作答	0.00		
通過率	0.64	鑑別度	0.68
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個負數與數的四則混合算式，要求學生算出答案，評量學生是否掌握數的四則混合運算。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.68，正確答案為選項 4，通過率為 64%，顯示超過六成的學生已掌握數的四則混合運算。</p> <p>2. 有 10%的學生選擇選項 1(低分組有 23%)，這些學生計算時可能未掌握先乘除後加減的計算規則，</p> $10 - 3 \times (-\frac{5}{7}) + \frac{6}{7} = 7 \times (-\frac{5}{7}) + \frac{6}{7} = -5 + \frac{6}{7} = -4\frac{1}{7}$ <p>，得錯誤的結果。</p> <p>3. 有 20%的學生選擇選項 3(低分組有 35%)，這些學生計算時可能未掌握先乘除後加減的計算規則，</p> $10 - 3 \times (-\frac{5}{7}) + \frac{6}{7} = 10 + (-\frac{15}{7}) + \frac{6}{7} = 10 + \frac{-9}{7} = 8\frac{5}{7}$ <p>，得錯誤的結果。</p>		

教材地位 分析	學習 內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
		N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。	N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。	N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。
補救教學 建議	<p>(一) 複習四則運算先乘除後加減，其餘由左至右規則的由來。 以「<math>10+3+3+3+3+7</math>」為例。 原本的算式就是先寫什麼算什麼，所以由左至右計算，而其中的<math>3+3+3+3</math>可簡化成<math>3\times 4</math>，因此算式可以改寫成「<math>10+3\times 4+7</math>」。但不變的是計算結果，所以不能直接由左至右計算，而是把3的連加先算，之後再由左至右計算，也就是 <math>10+3\times 4+7=10+12+7=22+7=29</math> &lt;先乘&gt; &lt;由左至右&gt;</p> <p>(二) 複習數的加、減、乘、除。 1、+、-的意義 “+”念成“加”：給的意思；“-”念成“減”：拿走的意思 “+”念成“正”：以優點卡表示；“-”念成“負”：相反的意義，以缺點卡表示，而且1張優點卡與1張缺點卡可抵消。若拿走1張優點卡，可以改成給1張缺點卡；同樣的，拿走1張缺點卡，也可以改成給1張優點卡。</p> <p>2、兩數的加、減、乘、除。以(-5)與(-3)為例。 (1) <math>(-5)+(-3)</math>。 想法：5張缺點卡給3張缺點卡，總共是8張缺點卡 所以<math>(-5)+(-3)=-5+3=-8</math></p> <p>(2) <math>(-5)-(-3)</math>。 想法：①5張缺點卡拿走3張缺點卡，還剩2張缺點卡 ②拿走3張缺點卡，可以改成給3張優點卡，可與其中的3張缺點卡抵銷，最後剩2張缺點卡 所以<math>(-5)-(-3)=-5+3=(-2)+(-3)+3=-2</math></p> <p>(3) <math>(-5)\times(-3)</math>。 想法：5張缺點卡的負3倍，“負”是相反的意義，因此</p>			

是優點卡，5張的3倍就是15張，所以

$$(-5) \times (-3) = 5 \times 3 = 15$$

(4)  $(-5) \div (-3)$ 。

想法：5張缺點卡是3張缺點卡的幾倍？

$a$ 是 $b$ 的幾倍？最好的情況是 $b=1$ 時，例如7是1的7倍；

$(-3)$ 是1的-3倍； $(-\frac{5}{7})$ 是1的 $(-\frac{5}{7})$ 倍

因此，設法讓除數經過放大縮小成為1，當然這時的被除數

也會相同的放大縮小。

$$\begin{aligned} & (-5) \div (-3) \\ & \begin{array}{c} \times(-\frac{1}{3}) \quad \times(-\frac{1}{3}) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} \\ & = [(-5) \times (-\frac{1}{3})] \div 1 \\ & = (-5) \times (-\frac{1}{3}) \\ & = 5 \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(三) 對負數與數的四則混合運算題目進行教學。以本題目說明解題步驟。

$$10 - 3 \times (-\frac{5}{7}) + \frac{6}{7} = ?$$

1、先處理乘除 $3 \times (-\frac{5}{7})$ 。3的負 $\frac{5}{7}$ 倍，也就是負的3的 $\frac{5}{7}$ 倍，

所以是

$$-(3 \times \frac{5}{7}) = -\frac{15}{7}。$$

$$10 - 3 \times (-\frac{5}{7}) + \frac{6}{7}$$

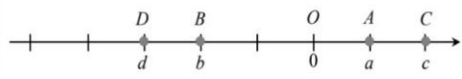
$$= 10 - (-\frac{15}{7}) + \frac{6}{7}$$

2、算式中的 $-(-\frac{15}{7})$ 唸成“減(負7分之15)”，減=拿走，可以改

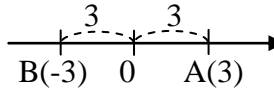
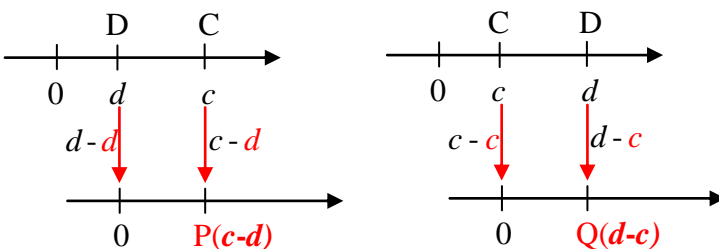
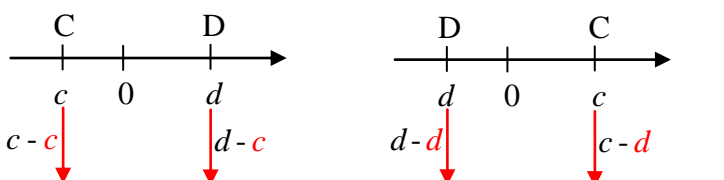
成給=加相反的數，所以 $-(-\frac{15}{7}) = +\frac{15}{7}$ 唸成“加(7分之15)”。

因此

$$\begin{aligned} & 10 - 3 \times \left(-\frac{5}{7}\right) + \frac{6}{7} \\ &= 10 - \left(-\frac{15}{7}\right) + \frac{6}{7} \\ &= 10 + \frac{15}{7} + \frac{6}{7} \\ &= 13 \end{aligned}$$

題號	6		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a - b $ 表示數線上兩點 $a, b$ 的距離。		
試題內容	<p>6. 數線上 <math>A(a)</math>、<math>B(b)</math>、<math>O(0)</math>、<math>C(c)</math>、<math>D(d)</math> 五點的相對位置關係如下圖，下列敘述何者正確？</p>  <p>① <math> a  &gt;  b </math>          ② <math> d  &lt;  c </math>          ③ <math> a - b  &lt;  d - c </math>          ④ <math> a - d  &lt;  b + c </math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.29	0.03
2	0.14	0.23	0.06
3*	0.51	0.22	0.81
4	0.20	0.25	0.11
未作答	0.00		
通過率	0.51	鑑別度	0.59
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明          本題給定數線上數個點的相對位置，要求學生選出正確的選項，評量學生是否理解絕對值。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本題鑑別度為 0.59，正確答案為選項 3，通過率為 51%，顯示有五成的學生已具備理解絕對值。</li> <li>2. 有 15% 的學生選擇選項 1 (低分組有 29%)，這些學生可能未完全理解絕對值，直接由 <math>a &gt; 0</math>、<math>b &lt; 0</math> 判斷 <math> a  &gt;  b </math>。</li> <li>3. 有 14% 的學生選擇選項 2 (低分組有 23%)，這些學生可能未完全理解絕對值，直接由 D 點在最左邊、C 點在最右邊判斷 <math> d  &lt;  c </math>。</li> <li>4. 有 20% 的學生選擇選項 4 (低分組有 25%)，這些學生可能未完全理解絕對值，直接由 <math>a - d</math>、<math>b + c</math>，認為相加恆大的迷失概念。</li> </ol>		

教材地位 分析	學習 內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
			N-7-5 數線：擴充至含負數的數線； 比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a-b $ 表示數線上兩點 $a, b$ 的距離。 備註 絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。	

補救教學 建議	<p>(一) 複習絕對值。</p> <p>絕對值的意義：</p> <p>1. 表示點到原點的距離。</p> <p>A(3)與 B(-3)在數線上與原點的距離都是 3，而 3 與 -3 互為相反數。因此，我們將某點到原點的距離(也就是某點與原點的差距)，以絕對值符號「<math>  \quad  </math>」表示。</p> <p>即 C(<math>c</math>)到原點的距離為<math> c-0 = c </math> B(-3)到原點的距離為<math> (-3)-0 = -3 =3</math></p>  <p>2. 兩點間的距離如何用絕對值表示。</p> <p>若 C(<math>c</math>)、D(<math>d</math>)，C 到 D 兩點間的距離(<math>\overline{CD}</math>)，當兩點坐標平移至其中一點的坐標為 0 時，那兩點間的距離就等於是點到原點的距離了。</p> <p>接著我們探討以下幾種狀況：</p> <p>(1) 兩數皆為正數</p>  <p>[狀況一] <math>\overline{CD} = P</math>點到原點的距離 <math>=  c-d-0  =  c-d </math></p> <p>[狀況二] <math>\overline{CD} = Q</math>點到原點的距離 <math>=  (d-c)-0  =  d-c </math></p> <p><math>c-d</math> 與 <math>d-c</math> 互為相反數，表示 P、Q 兩點到原點等距離，也就是 <math>\overline{CD} =  c-d  =  d-c </math></p> <p>(2) 一正一負</p> 
------------	---

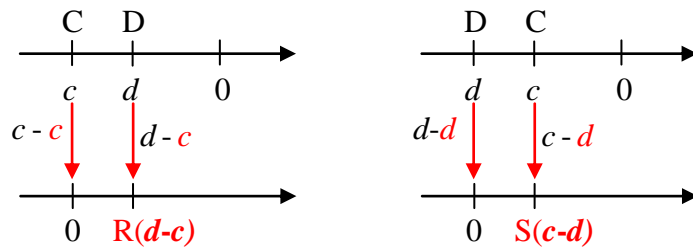


[狀況一]  $\overline{CD} = E$ 點到原點的距離  $= |(d-c)-0| = |d-c|$

[狀況二]  $\overline{CD} = F$ 點到原點的距離  $= |(c-d)-0| = |c-d|$

$c-d$  與  $d-c$  互為相反數，表示 E、F 兩點到原點等距離，  
也就是  $\overline{CD} = |c-d| = |d-c|$

(3) 兩數皆為負數



[狀況一]  $\overline{CD} = R$ 點到原點的距離  $= |(d-c)-0| = |d-c|$

[狀況二]  $\overline{CD} = S$ 點到原點的距離  $= |(c-d)-0| = |c-d|$

$c-d$  與  $d-c$  互為相反數，表示 R、S 兩點到原點等距離，  
也就是  $\overline{CD} = |c-d| = |d-c|$

結論：A(a)、B(b)，則 A、B 兩點間的距離

$$\overline{AB} = |a-b| = |b-a|$$

例如 A(3)、B(-3)，則 A、B 兩點間的距離  $\overline{AB} = |3-(-3)|$


(二) 以本題目說明解題步驟。

①  $a$  到原點的距離小於與  $b$  到原點的距離， $\therefore |a| < |b|$

②  $d$  到原點的距離大於與  $c$  到原點的距離， $\therefore |d| > |c|$

③  $a$  到  $b$  的距離小於與  $d$  到  $c$  的距離， $\therefore |a-b| < |d-c|$

④  $|b+c| = |b-(-c)|$ ，從數線上  $b$  與  $c$  的相對位置而言， $b$  與  $-c$  兩點的位置很接近， $a$  到  $d$  的距離大於與  $b$  到  $-c$  的距離， $\therefore |a-d| > |b+c|$

題號	7		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a - b $ 表示數線上兩點 $a, b$ 的距離。		
試題內容	<p>7. 數線上 <math>A、B、C、P</math> 四點的相對位置關係如下圖。</p>  <p>已知 <math>\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 5</math>，<math>P</math> 為 <math>\overline{AB}</math> 的中點，且 <math>\overline{PB} = 3</math>，則 <math>\overline{AC} = ?</math></p> <p>① 5 ② 6 ③ 10 ④ 16</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.19	0.01
2	0.11	0.25	0.01
3	0.30	0.35	0.21
4*	0.50	0.21	0.78
未作答	0.00		
通過率	0.50	鑑別度	0.57
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明</p> <p>本題給定數線上數個點的相對位置，要求學生算出兩點間的距離，評量學生應用數線與絕對值的能力。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本題鑑別度為 0.57，正確答案為選項 4，通過率為 50%，顯示五成的學生已具備應用數線與絕對值的能力。</li> <li>2. 有 11% 的學生選擇選項 2(低分組有 25%)，這些學生可能對題意不了解，而選擇了錯誤的答案。</li> <li>3. 有 30% 的學生選擇選項 3(低分組有 35%)，這些學生可能對題意上未完全了解，將 <math>\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 5</math> 看成 <math>\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 5 = 6 : 10</math>，而得到 <math>\overline{AC} = 10</math> 錯誤的答案。</li> </ol>		

教材地位 分析	學習 內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	補救教學 建議			N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a-b $ 表示數線上兩點 a,b 的距離。 備註 絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。

(一) 複習數線

- ① 一直線上任取一點為基準點，稱為原點 O，代表數字為 0。
- ② 箭頭表示正向。
- ③ 取適當長作為單位長，以原點為起點，每向右 1 個單位長標記為 1、2、...。每向左 1 個單位長標記為 -1、-2、...。

將以上三點所繪製的這條直線，稱為數線。

(二) 數線上點的坐標

例如在數線上有一點 A，在原點右邊 3 個單位長的位置，即表示 A 點的坐標是 3，記為 A(3)。若是在原點左邊 2 個單位長的位置，即表示 B 點的坐標是 -2，記為 B(-2)。

(三) 數線上絕對值的意義  
(請參閱第 6 題的教學建議)

(四) 以本題目說明解題步驟。

因為  $\overline{PB} = 3$ ，我們可將 P 坐標設為原點，則 B 點坐標為 3。  
 因為 P 是中點，所以 A 點坐標為 -3， $\overline{AB} = |3 - (-3)| = 6$ 。又  
 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 5$ ，可得  $\overline{BC} = 10$ ，故 C 點坐標為 13，得  
 $\overline{AC} = |13 - (-3)| = 16$ 。

題號	8		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。		
試題內容	<p>8. 桌上有若干個大小不同的柱體容器，已知容量最小的柱體底面積為 24 平方公分，高為 8 公分，現將其裝滿水，接著把水倒進另一個柱體容器中並觀察水位高度。請問下列選項的敘述何者正確？ (柱體體積 = 底面積 × 柱高)</p> <p>① 底面積 12 平方公分的柱體容器，水位高度會是 4 公分</p> <p>② 不同柱體容器的「底面積」和「水位高度」會成反比</p> <p>③ 不同柱體容器「底面積」和「水位高度」的比值皆為 3</p> <p>④ 不管用哪一個柱體容器裝水，水位高度都會是 8 公分</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.18	0.30	0.03
2*	0.55	0.28	0.86
3	0.20	0.26	0.10
4	0.07	0.15	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.55	鑑別度	0.58
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明</p> <p>本題給定一個給定底面積與高度並裝滿水的柱體容器，要求學生判斷將水倒進其他柱體容器的水位高度，評量學生是否理解正比與反比的概念。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明</p> <p>1. 本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項 2，通過率為 55%，顯示超過五成的學生已具備應用正比與反比解題的能力。</p> <p>2. 有 18% 的學生選擇選項 1 (低分組有 30%)，這些學生可能誤以為這些柱體的底面積和高成正比，檢驗底面積和高的比得到 <math>24:8=3:1</math>，<math>12:4=3:1</math>，具有相同的比，故選此答案。</p> <p>3. 有 20% 的學生選擇選項 3 (低分組有 26%)，這些學生不理解同容積的水裝到不同柱體容器時其底面積和水位高體成反比，而誤以為底面積：水位高度的比值為固定值得到 <math>24:8=\frac{24}{8}=3</math>。</p>		

教材地位 分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	N-6-6 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。 備註：比中各數原則上為整數，但也可包含簡單之小數與分數。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註 不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。	S-8-8 三角形的基本性質：等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；三角形兩邊和大於第三邊；外角等於其內對角和。

補救教學建議	(一) 講解「正比」與「反比」的意義。						
	1. 正比：以媽媽到米店買米為例，說明正比的意義						
	假設媽媽買米的重量為 $x$ ，所花的錢為 $y$						
	米重 $x$ (台斤)	1	2	3	4	5	6
	買米的錢 $y$ (元)	30	60	90	120	150	180
	米重 $x$ ：買米的錢 $y$ 的最簡整數比	1：30	2：60= 1：30	3：90 =1：30	4：120 =1：30	5：150 =1：30	6：180 =1：30
	米重 $x$ 與買米的錢 $y$ 的比值(最簡分數)	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{60} = \frac{1}{30}$	$\frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	$\frac{4}{120} = \frac{1}{30}$	$\frac{5}{150} = \frac{1}{30}$	$\frac{6}{180} = \frac{1}{30}$
	① 將每種米重和買米的錢的比化為最簡整數比之後，每種情形都是 1：30						
	② 將每種米重和買米的錢化為最簡分數的比值之後，每種情形都是 $\frac{1}{30}$						
	③ 由上可以得到 $x:y=1:30$ ，由內項乘積等於外項乘積得到 $y=30x$ 或者 $\frac{x}{y} = \frac{1}{30}$ 得到 $\frac{y}{x} = 30$ ， $y=30x$						
④ 給定兩個變數 $x$ 、 $y$ ，當 $x$ 值改變時， $y$ 值也隨著改變，保持 $x$ 值與 $y$ 值的最簡整數比數=1： $k$ ( $k \neq 0$ )，此時我們稱 $x$ 與 $y$ 成正比，再由比例式 $x:y=1:k$ 性質可以改寫成 $y=kx$ (或 $\frac{y}{x}=k$ )。							
2. 反比：以長方形的面積為 $60\text{cm}^2$ 為例，探討長與寬的關係為例，說明反比的意義							
設長為 $x$ (cm)，寬為 $y$ (cm)							
長 $x$ (cm)	60	30	20	15	12	10	
寬 $y$ (cm)	1	2	3	4	5	6	
長的倒數 $\frac{1}{x}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30} = \frac{2}{60}$	$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$	$\frac{1}{15} = \frac{4}{60}$	$\frac{1}{12} = \frac{5}{60}$	$\frac{1}{10} = \frac{6}{60}$	

長：寬	60 : 1	30 : 2 =15 : 1	20 : 3	15 : 4	12 : 5	10 : 6 =5 : 3
長的倒數：寬	$\frac{1}{60} : 1$ =1 : 60	$\frac{1}{30} : 2$ =1 : 60	$\frac{1}{20} : 3$ =1 : 60	$\frac{1}{15} : 4$ =1 : 60	$\frac{1}{12} : 5$ =1 : 60	$\frac{1}{10} : 6$ =1 : 60
長的倒數：寬 比值 (最簡分數)	$\frac{1}{60} : 1$ = $\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30} : 2$ = $\frac{1}{60}$	$\frac{1}{20} : 3$ = $\frac{1}{60}$	$\frac{1}{15} : 4$ = $\frac{1}{60}$	$\frac{1}{12} : 5$ = $\frac{1}{60}$	$\frac{1}{10} : 6$ = $\frac{1}{60}$

① 將每種長和寬的比化為最簡整數比之後，沒有固定的比。但將每種長的倒數比和寬的比都化為最簡整數比之後，發現每種情形都是 1 : 60。

② 將每種長的倒數和寬的比值都化為最簡分數之後，發現每種情形都是  $\frac{1}{60}$ 。

③ 由上可以得到  $\frac{1}{x} : y = 1 : 60$ ，由內項乘積等於外項乘積得到  $y = \frac{60}{x}$ ，故  $xy = 60$ 。或者  $\frac{1}{x} : y = \frac{1}{60}$  得到  $\frac{1}{xy} = \frac{1}{60}$ ，故  $xy = 60$ 。

④ 給定兩個變數  $x$ 、 $y$ ，當  $x$  值改變時， $y$  值也隨著改變，而且保持  $x$  值的倒數和  $y$  值最簡整數比 = 1 :  $k$  ( $k \neq 0$ )，此時我們稱  $x$  與  $y$  成反比。再由比例式性質可以改寫成

$$\frac{1}{x} : y = 1 : k, \quad y = k \times \frac{1}{x}, \quad \text{最後得到 } xy = k。$$

寬(x)	1	2	3	4	6	8	12	24
面積(x)	6	12	18	24	36	48	72	144

(二) 以生活情境的例子說明「正比」的意義。例如：設一長方形的長固定為 6 單位，則長方形的面積會隨著長方形的寬的變化而改變，如下表所示：

根據上表，引導學生發現「面積 = 6 × 寬」，得到  $y = 6x$ 。

(三) 以生活情境的例子說明「反比」的意義。例如爺爺購買每斤  $x$  元的茶葉  $y$  斤，總價為 1000 元。

茶葉的重量(x)	1000	500	250	200	125	100
茶葉的總價(y)	1	2	4	5	8	10

題號	9		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-7-4 數的運算規律：交換律；結合律；分配律； $-(a+b)=-a-b$ ； $-(a-b)=-a+b$ 。		
試題內容	<p>9. 已知甲、乙、丙為三個整數，且</p> $\text{甲} + [(-98) + (-27)] = (-98) - [(-27) - \text{乙}] = (-27) - [(-98) - \text{丙}]$ <p>關於甲、乙、丙的大小關係，下列何者正確？</p> <p>① 甲 &gt; 乙 &gt; 丙          ② 甲 &gt; 丙 &gt; 乙          ③ 乙 &gt; 丙 &gt; 甲          ④ 丙 &gt; 乙 &gt; 甲</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.44	0.21	0.75
2	0.24	0.30	0.14
3	0.15	0.24	0.03
4	0.18	0.24	0.07
未作答	0.00		
通過率	0.44	鑑別度	0.54
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定三個具有未知數且等值的算式，要求學生比較三個未知數的大小關係，評量學生應用交換律、結合律及分配律計算的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.54，正確答案為選項 1，通過率為 44%，顯示超過四成的學生已具備應用交換律、結合律及分配律計算的能力。</p> <p>2. 有 24% 的學生選擇選項 2 (低分組有 30%)，這些學生可能將算式的值設為 0</p> $\text{甲} + [(-98) + (-27)] = 0, \text{甲} = 98 + 27$ $(-98) - [(-27) - \text{乙}] = 0, \text{乙} = (-98) + 27$ $(-27) - [(-98) - \text{丙}] = 0, \text{丙} = (-27) + 98$ <p>故得甲 &gt; 丙 &gt; 乙</p> <p>3. 有 15% 的學生選擇選項 3 (低分組有 24%)，這些學生可能直接比較常數的值：</p> $\text{甲} = (-98) + (-27) = -105$		

	<p> <math>-乙 = (-98) - (-27) = -71</math>，得乙=71  <math>丙 = (-27) - (-98) = 71</math>，得丙=-71            故得乙&gt;丙&gt;甲            4.有 18%的學生選擇選項 4(低分組有 24%)，這些學生可能直接比較常數的值：  <math>甲 = (-98) + (-27) = -105</math>  <math>乙 = (-98) - (-27) = -71</math>  <math>丙 = (-27) - (-98) = 71</math>            故得丙&gt;乙&gt;甲         </p>			
教材地位分析	學習內容	<p> <b>先備的知識</b>            N-6-3  <b>分數的除法</b>：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。            N-6-4  <b>小數的除法</b>：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。            N-6-5  <b>解題</b>：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。         </p>	<p> <b>本題所需的知識</b>            N-7-4            數的運算規律：            交換律；            結合律；            分配律；  <math>-(a+b)=-a-b</math>；  <math>-(a-b)=-a+b</math>。         </p>	<p> <b>延伸的知識</b>            N-8-1  <b>二次方根</b>：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。  <b>備註</b>：可使用乘法公式來化簡的根式，待乘法公式單元再提及。         </p>
		<p> <b>補救教學建議</b>            (一) 複習：(1) <math>-(a+b)=-a-b</math>；(2) <math>-(a-b)=-a+b</math>            例如：(1) <math>19-(7+8)=19-7-8</math>                      (2) <math>19-(7-8)=19-7+8</math>            (二) 以「已知甲、乙、丙為三個整數，且  <math>甲+(-27)=乙+(-17)=丙-(-27)</math>，關於甲、乙、丙的大小關係，下列何者正確？」為例，說明如何幫助學生解題：            (1) <math>甲+(-27)=乙+(-17)</math>，因為 <math>-27 &lt; -17</math>，所以甲&gt;乙            (2) <math>乙+(-17)=丙-(-27)</math>，<math>乙+(-17)=丙+27</math>，因為 <math>-17 &lt; 27</math>，所以乙&gt;丙            (3) 由(1)及(2)，得到甲&gt;乙&gt;丙         </p>		



題號	10		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-7-8 科學記號：以科學記號表達正數，此數可以是很大的數（次方為正整數），也可以是很小的數（次方為負整數）。		
試題內容	<p>10. 地球與太陽的平均距離為 150000000 公里，換成以公尺表示是多少公尺？ (1 公里 =1000 公尺)</p> <p>① <math>1.5 \times 10^5</math>  ② <math>1.5 \times 10^7</math>  ③ <math>1.5 \times 10^{10}</math>  ④ <math>1.5 \times 10^{11}</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.18	0.09
2	0.27	0.45	0.06
3	0.17	0.23	0.08
4*	0.42	0.13	0.77
未作答	0.00		
通過率	0.42	鑑別度	0.64
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b>  本題給定一個距離量，要求學生轉換單位並以科學記號表示，評量學生以科學記號表達正數的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b>  1.本題鑑別度為 0.64，正確答案為選項 4，通過率為 42%，顯示超過四成的學生已具備以科學記號表達正數的能力。  2.有 13%的學生選擇選項 1(低分組有 18%)，這些學生可能在轉換單位時誤以為距離為 <math>\frac{150000000}{1000} = 150000 = 1.5 \times 10^5</math> (公里)。  3.有 27%的學生選擇選項 2(低分組有 45%)，這些學生可能以為科學記號 10 的次方直接計算原數後面有幾個零，故得 <math>150000000 = 1.5 \times 10^7</math> (公里)。  4.有 17%的學生選擇選項 3(低分組有 23%)，這些學生可能知道如何將公里轉換成公尺得到 <math>150000000 \times 1000 = 150000000000</math> (公尺)，但誤以為科學記號 10 的次方直接計算原數後面有幾個零得到 <math>1.5 \times 10^{10}</math> (公尺)</p>		

教材地位 分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	無	N-7-8 科學記號：以科學記號表達正數，此數可以是很大的數（次方為正整數），也可以是很小的數（次方為負整數）。 備註 本條目旨在科學記號的了解與使用，例如 1 奈米等於 10 <sup>-9</sup> 公尺，其中含有負數次方的部分，可以使用小數與之轉換來解釋，不宜牽涉到其他底數的負次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。	無

補救教學 建議	(一) 介紹 10 進位的數值表							
	位名	千	百	十	個	十分	百分	千分
	位值	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
	10 的指數形式	10 <sup>3</sup>	10 <sup>2</sup>	10 <sup>1</sup>	10 <sup>0</sup>	10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-3</sup>
	指數次方	3	2	1	0	-1	-2	-3
	由上面我們可以歸納出：							
(1) 當 n 為正整數時， $(\frac{1}{10})^n = 10^{-n}$ (2) 10 <sup>0</sup> = 1								
(二) 以「請將 2,560,000 以科學記號表示」為例，說明如何幫助學生用科學記號表示大於 1 的數。								
位名	百萬	十萬	萬	千	百	十	個	
10 的指數形式	10 <sup>6</sup>	10 <sup>5</sup>	10 <sup>4</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>2</sup>	10 <sup>1</sup>	10 <sup>0</sup>	
指數次方	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	
各位數字	2	5	6	0	0	0	0	
由表可知最高位 2 代表 2 個百萬，也就是 2 個 10 <sup>6</sup> ，2,560,000 可表示為 2.56 個 10 <sup>6</sup> 我們可以從個位的指數次方(0 次方)數到最高位數的指數次方(6 次方)，得到 2,560,000 可用科學記號表示為 2.56×10 <sup>6</sup> 。								

(三) 再以「請將 0.000234 以科學記號表示」為例，說明如何幫助學生用科學記號表示小於 1 的數。

位名	個	十分	百分	千分	萬分	十萬分	百萬分
10 的指數形式	$10^0$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
指數次方	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>-2</b>	<b>-3</b>	<b>-4</b>	<b>-5</b>	<b>-6</b>
各位數字	0	0	0	0	2	3	4

由表可知最高位 2 代表 2 個萬分之一( $\frac{1}{10000}$ )，也就是 2 個

$10^{-4}$ ，0.000234 可表示為 2.34 個  $10^{-4}$  我們可以從個位的指數次方(0 次方)數到最高位數的指數次方(-4 次方)，得到 0.000234 可用科學記號表示為  $2.34 \times 10^{-4}$ 。

題號	11		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。		
試題內容	<p>11. 已知 <math>a = 2^x \times 3^3 \times 5^2</math>、<math>b = 2^2 \times 3^y \times 5</math>，且 <math>a</math> 和 <math>b</math> 的最小公倍數為 <math>2^3 \times 3^3 \times 5^z</math>，其中 <math>x, y, z</math> 為正整數或零。請問下列何者<u>不可能</u>是 <math>x+y+z</math> 之值？</p> <p>① 9 ② 8 ③ 6 ④ 5</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.40	0.20	0.67
2	0.15	0.21	0.06
3	0.17	0.24	0.08
4	0.28	0.33	0.19
未作答	0.01		
通過率	0.40	鑑別度	0.47
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定兩個含有未知數指數次方的標準分解式，要求學生根據兩數的最小公倍數判斷標準分解式及最小公倍數的質因數次方，評量學生應用標準分解式求因數及倍數的問題的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1.本題鑑別度為 0.47，正確答案為選項 1，通過率為 40%，顯示成的學生已具備應用標準分解式求因數及倍數的問題的能力。</p> <p>2.有 15%的學生選擇選項 2(低分組有 21%)，這些學生可能不了解如何用標準分解式求最小公倍數。</p> <p>3.有 17%的學生選擇選項 3(低分組有 24%)，這些學生可能誤解題意要求最小公倍數，得到 <math>x=3, y=3, z=2</math>，<math>x+y+z=8</math></p> <p>4.有 28%的學生選擇選項 4(低分組有 33%)，這些學生可能以為 <math>x=3, z=2</math>，但誤以為 <math>y</math> 至少大於 0，故以為 <math>x+y+z&gt;5</math></p>		

		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位 分析	學習內容	N-6-1 <b>20 以內的質數和質因數分解</b> ：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 <b>備註</b> ：被分解數的因數，在扣除 2、3、5 或其次方的部分後、只剩一因數，且此數除了 49、77 或 91 之外，只能是 11、13、17 或 19。 N-6-2 <b>最大公因數與最小公倍數</b> ：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。 <b>備註</b> ：不做三數的最大公因數與最小公倍數。應包含練習將分數化成最簡分數的問題。	N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。	
補救教學 建議	<p>(一) 下面以「找出 30 和 36 的最小公倍數」為例，說明如何幫助學生用質因數分解法解題。</p> <p>步驟一：先將 30 及 36 進行質因數分解：<math>30=2\times 3\times 5</math>；<math>36=2\times 2\times 3\times 3</math>。</p> <p>步驟二：幫助學生看到 <math>2\times 2\times 3\times 3</math> 再乘上 5 就是 30 的倍數，所以 <math>2\times 2\times 3\times 3\times 5</math> 就是 30 和 36 的最小公倍數。</p> <p>步驟三：透過觀察下面的分解式</p> $30= \boxed{2} \times \boxed{2 \times 3} \times \boxed{5}$ $36= \boxed{2} \times \boxed{2 \times 3} \times \boxed{3}$ <p>幫助學生發現 30 和 36 的最小公倍數，除了納入共同質因數，還要將非共同質因數都納入，即為兩數的最小公倍數。此時最小公倍數[30,36]的標準分解式（即 <math>2\times 2\times 3\times 3\times 5=2^2\times 3^2\times 5</math>），質因數 2 和 3 的指數次方剛好是 30 的標準分解式（即 <math>2\times 3\times 5</math>）及 36 的標準分解式（即 <math>2^2\times 3^2</math>）取兩者共同質因數次方的最大者，最後還要將非共同質因數都納入。因此</p> $[30,36]=2\times 2\times 3\times 3\times 5$ $=2^2\times 3^2\times 5$			

(二) 下面以「已知  $a=2^x \times 3^2 \times 5$ ， $b=2^2 \times 3^y \times 5^2$ ，且  $a$  和  $b$  的最小公倍數為  $2^3 \times 3^2 \times 5^z$ ，其中  $x, y, z$  為正整數或零。請問  $x + y + z$

的最小值為何？」為例，說明如何幫助學生解題：

質因數	$a$ 的質因數其指數次方	$b$ 的質因數其指數次方	$a$ 和 $b$ 的最小公倍數其質因數指數次方	結論
2	$x$	2	3	$x = 3$
3	2	$y$	2	$0 \leq y \leq 2$
5	1	2	$z$	2

$x + y + z$  的最小值 =  $3 + 0 + 2 = 5$

題號	12		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。		
試題內容	<p>12. 今年是西元 2021 年，<math>2021 = 43 \times 47</math> 恰好可以分解為兩個連續質數的乘積，請問滿足「可以分解為兩個連續質數乘積」的下一西元年是幾年呢？(例如：<math>15 = 3 \times 5</math>，3 和 5 為連續質數，故 15 可分解為兩個連續質數的乘積)</p> <p>① 3127 ② 2491 ③ 2397 ④ 2023</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.21	0.23	0.20
2*	0.34	0.23	0.51
3	0.27	0.29	0.21
4	0.17	0.25	0.07
未作答	0.01		
通過率	0.34	鑑別度	0.28
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個可分解成兩連續質數相乘的數字，要求學生算出下一個可以分解成兩連續質數相乘的數字，評量學生是否理解質數的定義。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.28，正確答案為選項 2，通過率為 34%，顯示超過三成的學生已理解質數的定義。</p> <p>2. 有 21% 的學生選擇選項 1(低分組有 23%)，這些學生以為找尋 43、47 之後的兩個質數 53、59 的乘積，得到 <math>53 \times 59 = 3127</math>。</p> <p>3. 有 27% 的學生選擇選項 3(低分組有 29%)，這些學生可能誤以為 51 為質數，得到 <math>47 \times 51 = 2397</math>。</p> <p>4. 有 17% 的學生選擇選項 4(低分組有 25%)，這些學生誤解題意，以為要找質數年並誤以為 2023 為質數。</p>		

教材地位 分析	學習 內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識																																																																																																		
		N-6-1 <b>20 以內的質數和質因數</b> <b>分解：</b> 小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 <b>備註：</b> 被分解數的因數，在扣除 2、3、5 或其次方的部分後、只剩一因數，且此數除了 49、77 或 91 之外，只能是 11、13、17 或 19。	N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。																																																																																																			
補救教學 建議	<p>(一) 複習國小質數及合數的定義：</p> <p>(1) 質數：除了 1 和自己以外沒有其它因數的整數稱為質數，也就是只有 2 個因數的整數稱為質數。            例如：2、3、5、7 的因數都只有 1 和本身，所以 2、3、5、7 都是質數。</p> <p>(2) 合數：一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的因數，則稱此數為合數。            例如：6 的因數有 1、2、3、6，所以 6 是合數。</p> <p>(二) 說明判斷 2、3、5 倍數的方法。</p> <p>(三) 透過「埃拉托賽尼篩法」，幫助學生察覺如果 100 以內的正整數不是 2、3、5、7 的倍數，它就是質數。</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tbody> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr> <tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td><td>40</td></tr> <tr><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td><td>50</td></tr> <tr><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td><td>60</td></tr> <tr><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td><td>70</td></tr> <tr><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td><td>78</td><td>79</td><td>80</td></tr> <tr><td>81</td><td>82</td><td>83</td><td>84</td><td>85</td><td>86</td><td>87</td><td>88</td><td>89</td><td>90</td></tr> <tr><td>91</td><td>92</td><td>93</td><td>94</td><td>95</td><td>96</td><td>97</td><td>98</td><td>99</td><td>100</td></tr> </tbody> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
	1		2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																																																											
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20																																																																																													
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30																																																																																													
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40																																																																																													
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50																																																																																													
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60																																																																																													
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70																																																																																													
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80																																																																																													
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90																																																																																													
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100																																																																																													



題號	13		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方； $a \neq 0$ 時 $a^0=1$ ；同底數的大小比較；指數的運算。		
試題內容	<p>13. 甲 <math>= (-0.5)^0</math>、乙 <math>= (-0.5)^1</math>、丙 <math>= (-0.5)</math> 大小關係為何？</p> <p>① 甲 <math>&gt;</math> 乙 <math>&gt;</math> 丙          ② 丙 <math>&gt;</math> 乙 <math>&gt;</math> 甲          ③ 甲 <math>&gt;</math> 丙 <math>&gt;</math> 乙          ④ 丙 <math>&gt;</math> 甲 <math>&gt;</math> 乙</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.29	0.05
2	0.25	0.36	0.11
3*	0.26	0.14	0.52
4	0.30	0.21	0.32
未作答	0.00		
通過率	0.26	鑑別度	0.39
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明 本題給定三個同底數的指數，要求學生比較三數的大小關係，評量學生比較同底數指數大小關係的能力。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明</p> <p>1. 本題鑑別度為 0.39，正確答案為選項 3，通過率為 26%，顯示二成五的學生已具備比較同底數指數大小關係的能力。</p> <p>2. 有 17%的學生選擇選項 1(低分組有 29%)，這些學生可能誤解算式如下：</p> $\text{甲} = (-0.5)^0 = (-0.5) \times 0 = 0$ $\text{乙} = (-0.5)^1 = (-0.5) \times 1 = -0.5$ $\text{丙} = (-0.5)^2 = (-0.5) \times 2 = -1$ <p>故得甲 <math>&gt;</math> 乙 <math>&gt;</math> 丙</p> <p>3. 有 25%的學生選擇選項 2(低分組有 36%)，這些學生可能誤解算式如下：</p> $\text{甲} = (-0.5)^0 = (-0.5) \times 0 = 0$ $\text{乙} = (-0.5)^1 = 0.5 \times 1 = 0.5$		

	<p>丙<math>=(-0.5)^2=0.5\times 2=1</math></p> <p>故得丙<math>&gt;</math>乙<math>&gt;</math>甲</p> <p>4. 有 30% 的學生選擇選項 4(低分組有 21%)，這些學生可能誤解算式如下：</p> <p>甲<math>=(-0.5)^0=(-0.5)\times 0=0</math>、乙<math>=(-0.5)^1=-0.5</math>、丙<math>=(-0.5)^2=0.25</math></p> <p>故得丙<math>&gt;</math>甲<math>&gt;</math>乙</p>			
教材地位分析	學習內容	<p>先備的知識</p> <p>N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 備註：被分解數的因數，在扣除 2、3、5 或其次方的部分後、只剩一因數，且此數除了 49、77 或 91 之外，只能是 11、13、17 或 19。</p>	<p>本題所需的知識</p> <p>N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方；<math>a\neq 0</math> 時 <math>a^0=1</math>；同底數的大小比較；指數的運算。</p>	<p>延伸的知識</p> <p>N-8-6 等比數列：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。 備註：不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公比」，例如：給定 <math>a_5</math> 和 <math>a_9</math> 的值，求首項和公比。</p>
		<p>(一) 復習指數的定義：  <math>7+7+7+7+7+7</math>，6 個 7 相加可以記成 <math>7\times 6</math>，  <math>7\times 7\times 7\times 7\times 7\times 7</math>，6 個 7 相乘可以記成 <math>7^6</math>，  <math>a+a+a+a+a</math>，5 個 <math>a</math> 相加可以記成 <math>a\times 5</math>，  <math>a\times a\times a\times a\times a</math>，5 個 <math>a</math> 相乘可以記成 <math>a^5</math></p> <p>(二) 任何正數乘以真分數或小於 1 的正小數其值會變小</p> <p>(三) 復習除法指數律：  舉一些同底指數相除的例子，以 <math>7^6\div 7^2</math> 為例，幫助學生察覺：  <math>7^6\div 7^2=(7\times 7\times 7\times 7\times 7\times 7)\div(7\times 7)=\frac{7\times 7\times 7\times 7\times 7\times 7}{7\times 7}=7^{6-2}=7^4</math>  <math>7^2\div 7^2=(7\times 7)\div(7\times 7)=\frac{7\times 7}{7\times 7}=7^{2-2}=7^0</math>，此時 <math>7^2\div 7^2=1</math>，故  定義 <math>7^0=1</math>  由上可知：(1) 如果 <math>a\neq 0</math>，<math>m</math>、<math>n</math> 為任意兩個正整數 (<math>m&gt;n</math>)，  <math>a^m\div a^n=a^{m-n}</math>  (2) 如果 <math>a\neq 0</math>，<math>a^0=1</math></p>		
補救教學建議				

	<p>(四) 以「已知甲<math>=(-\frac{1}{3})^0</math>，乙<math>=(-\frac{1}{3})^1</math>，丙<math>=(-\frac{1}{3})^2</math>，則甲、乙、丙三數的大小關係為何？」為例，說明如何幫助學生解題：</p> <p>甲<math>=(-\frac{1}{3})^0=1</math>， 乙<math>=(-\frac{1}{3})^1=-\frac{1}{3}</math>， 丙<math>=(-\frac{1}{3})^2=(-\frac{1}{3})\times(-\frac{1}{3})=\frac{1}{9}</math></p> <p>故得甲<math>&gt;</math>丙<math>&gt;</math>乙</p>		
題號	14		
內容領域	座標幾何	認知歷程向度	程序執行
學習內容	G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。		
試題內容	<p>14. 直角坐標平面上，A 點坐標為 (1,1)。已知從 P 點向下走 2 單位、向右走 3 單位可以走到 A 點。下列何者為 P 點的坐標？</p> <p>① (4,3)          ② (-2,3)          ③ (-2,-1)          ④ (4,-1)</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.20	0.02
2*	0.58	0.35	0.82
3	0.10	0.20	0.02
4	0.21	0.24	0.13
未作答	0.00		
通過率	0.58	鑑別度	0.47
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定直角坐標平面上兩點(一點已知、一點未知)並描述兩點間的位置關係，要求學生算出未知點的坐標，評量學生是否能掌握在直角坐標平面上運用方位距離標定位置的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1.本題鑑別度為 0.47，正確答案為選項 2，通過率為 58%，顯示近六成的學生已具備在直角坐標平面上運用方位距離標定位置的能力。</p> <p>2.有 11%的學生選擇選項 1(低分組有 20%)，這些學生可能在計算從 A 點逆向走向 P 點的過程中僅將上下方向相反，從 A(1,1)向上走 2 單位、向右走 3 單位而到達(4,3)。</p> <p>3.有 10%的學生選擇選項 3(低分組有 20%)，這些學生可能在計算從 A 點逆向走向 P 點的過程中僅將左右方向相反，從</p>		

	<p>A(1,1)向下走 2 單位、向左走 3 單位而到達(-2,-1)。</p> <p>4.有 21%的學生選擇選項 4(低分組有 24%)，這些學生可能不理解題意，直接從 A(1,1)向下走 2 單位、向右走 3 單位而到達(4,-1)。</p>
--	---

		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位 分析	學習 內容	S-6-2 解題：地圖比例尺。地圖比例尺之意義、記號與應用。地圖上兩邊長的比和實際兩邊長的比相等。	G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。	G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 A(a,b) 和 B(c,d) 的距離為線段 AB= $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ ；生活上相關問題。
補救教學 建議	<p>(一) 先複習平面直角坐標系，確認學生能運用直角坐標來標定位置，並能在直角坐標系上描出已知坐標對應的點，例如：A(1,-3)、B(-2,0)。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 先利用班級座位舉例，例如第五排第三個可記錄為(5,3)，讓學生理解坐標紀錄方式是先看橫坐標、再看縱坐標。</li> <li>2. 從班級座位過渡到第一象限，先讓學生熟悉坐標記錄方式，再擴展到其他象限。</li> </ol> <p>(二) 加入方位指令，逐步幫助學生能運用方位距離來標定位置。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 先以原點為起點，確認學生理解方位指令。 Q：以原點為起點，向右走 3 單位，向下走 4 單位後，其坐標為何？</li> <li>2. 以任意一點為起點，加入方位指令，請學生在坐標平面上實際操作一次。 Q：以 A(1,-3) 為起點，向右走 3 單位，向下走 4 單位後，其坐標為何？</li> <li>3. 以任意一點為終點，加入方位指令，請學生在坐標平面上實際操作一次。 Q：以 B 點為起點，向右走 3 單位，向下走 4 單位後會走到 A(1,-3)，則 B 點坐標為何？ 這裡需逆向由 A 走回 B，透過實際操作讓學生理解方位指令在逆向操作的過程中會上下顛倒、左右相反。</li> </ol>			

題號	15		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	A-7-4 二元一次聯立方程式的意義；二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。		
試題內容	<p>15. 王老師有一個可以猜中同學生日的數學魔術，作法如下：  「請同學將出生月份乘於 4，加上 9，將結果乘以 25，再加上出生的日期，只要告訴老師最後的答案，老師就知道同學的生日是幾月幾日。」  若小櫻的生日是 <math>x</math> 月 <math>y</math> 日出生，最後得到的數字是 432，根據上述作法列出二元一次方程式，下列選項何者正確？</p> <p>① <math>(4x + 9) \times 25 + y = 432</math>  ② <math>4x + 9 \times 25 + y = 432</math>  ③ <math>4(x + 9) + y = 432 \times 25</math>  ④ <math>4x + 9 + y = 432 \times 25</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.73	0.40	0.98
2	0.11	0.24	0.01
3	0.09	0.22	0.00
4	0.06	0.14	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.73	鑑別度	0.58
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b>  本題給定一個包含兩個未知數 <math>x</math>、<math>y</math> 的情境，要求學生透過未知數間的關係列出二元一次方程式，評量學生在具體情境中列出二元一次方程式的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項 1，通過率為 73%，顯示超過七成的學生已具備在兩個未知數的具體情境中列出二元一次方程式的能力。</li> <li>2. 有 11% 的學生選擇選項 2(低分組有 24%)，這些學生可能在依照題意列式時僅由左而右進行紀錄，但忽略了算式需滿足四則運算規則，因此未將 <math>4x+9</math> 補上括號。</li> </ol>		

教材地位 分析	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習 內容	A-7-2 一元一次方程 式的意義：一 元一次方程式 及其解的意義 ；具體情境 中列出一元一 次方程式。	A-7-4 二元一次聯立方程式的 意義：二元一次方程式及 其解的意義；具體情境中 列出二元一次方程式；二 元一次聯立方程式及其 解的意義；具體情境中列 出二元一次聯立方程式。
補救教學 建議	<p>(一) 面對應用問題，可先以實際數字請學生代入計算，確認學生了解題意。以本題為例，假設生日是2月5日，請學生計算代入後的結果。</p> $2 \times 4 = 8$ $8 + 9 = 17$ $17 \times 25 = 425$ $425 + 5 = 430$ <p>(二) 請學生將上述的多步驟運算，改為透過四則運算的形式表為單一算式。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>此時學生可能發生的錯誤是，僅依照題意列式由左而右進行紀錄，但忽略了算式需滿足四則運算規則，因此誤將算式紀錄為：<math>2 \times 4 + 9 \times 25 + 5 = 430</math>。</li> <li>教師宜先確認學生是否了解四則運算的規則，接著從學生的錯誤紀錄<math>2 \times 4 + 9 \times 25 + 5</math>和學生討論，請學生依照四則運算規則再算一次，讓學生和原來的算式比較看看有哪裡不一樣。</li> <li>若要維持原算式想呈現結果，應該如何在算式「<math>2 \times 4 + 9 \times 25 + 5 = 430</math>」中進行修改？引導學生補上括號，修改為<math>(2 \times 4 + 9) \times 25 + 5 = 430</math></li> </ol> <p>(三) 熟悉數字代入的運算後，請學生改以<math>x</math>、<math>y</math>代入，並以單一算式呈現。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>若學生以未知數列式有困難，教師宜多寫幾個實際數字的例子，讓學生觀察，例如： <math display="block">2 \text{ 月 } 5 \text{ 日, } (2 \times 4 + 9) \times 25 + 5 = 430</math> <math display="block">2 \text{ 月 } 6 \text{ 日, } (2 \times 4 + 9) \times 25 + 6 = 431</math> <math display="block">3 \text{ 月 } 5 \text{ 日, } (3 \times 4 + 9) \times 25 + 5 = 530</math> <math display="block">3 \text{ 月 } 6 \text{ 日, } (3 \times 4 + 9) \times 25 + 6 = 531</math> </li> <li>從上述算式中，將月、日抽換成代數符號，列出二元一次方程式。 <math display="block">x \text{ 月 } y \text{ 日} \rightarrow (x \times 4 + 9) \times 25 + y = 432</math> </li> </ol>		

題號	16		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。		
試題內容	<p>16. 已知二元一次聯立方程式 <math>\begin{cases} x = 3y + 4 \\ x + 2y = -1 \end{cases}</math> 的解為 <math>x = a</math>、<math>y = b</math>。</p> <p>求 <math>a + b = ?</math></p> <p>① -6 ② 0 ③ 8 ④ 24</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.24	0.01
2*	0.60	0.23	0.95
3	0.19	0.34	0.03
4	0.08	0.17	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.60	鑑別度	0.72
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明</p> <p>本題給定一個二元一次聯立方程式，要求學生解出 <math>x</math>、<math>y</math> 的值，評量學生是否能掌握二元一次聯立方程式的解題。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明</p> <p>1. 本題鑑別度為 0.72，正確答案為選項 2，通過率為 60%，顯示有六成的學生已具備利用加減消去法或代入消去法解二元一次聯立方程式的能力。</p> <p>2. 有 12% 的學生選擇選項 1 (低分組有 24%)，這些學生可能在利用加減消去法解題時，未將第(1)式的 <math>3y</math> 移項到左式，便直接兩式相減，因而求出 <math>y = 5</math>，接著代入第(2)式求出 <math>x = -11</math>，<math>-11 + 5 = -6</math>。</p> <p>3. 有 19% 的學生選擇選項 3 (低分組有 34%)，這些學生可能在利用代入消去法解題的過程中發生疏漏，由(1)代入(2)先求出 <math>y = 1</math> (正確應為 <math>y = -1</math>)，接著將 <math>y</math> 代入第(1)式求出 <math>x = 7</math>，<math>1 + 7 = 8</math>。</p>		



教材地位 分析	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。
補救教學 建議	<p>(一) 複習一元一次方程式的解</p> <p>(二) 複習二元一次方程式解的意義</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 給定二元一次式，未知數先用□和○挖空，例如：<math>2 \times \square - \circ</math>，□和○給定不同數字，請學生計算代入後的值。</li> <li>2. 將□和○換成<math>x</math>、<math>y</math>，強調<math>2 \times x - y</math>簡記為<math>2x - y</math>的過程，再給定幾組<math>x</math>、<math>y</math>，請學生計算代入後的值。</li> <li>3. 給定二元一次方程式，例如：<math>x + 2y = 5</math>，先由教師給定<math>x</math>(或<math>y</math>)，讓學生算<math>y</math>(或<math>x</math>)，最後再由學生自行找到一組<math>x</math>、<math>y</math>的解。</li> </ol> <p>(三) 複習代入消去法解二元一次聯立方程式</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 先舉實例列式，學生在「以一個未知數代入換掉另一個未知數」的過程會較有感，例如：  <u>好吃麵店</u>一碗牛肉麵比一碗香辣麵多 10 元，老師請全班同學吃麵，全班吃了 10 碗牛肉麵、20 碗香辣麵，共花了 2200 元，請問一碗牛肉麵多少元？</li> </ol> <p>列式 <math display="block">\begin{cases} \text{牛} = \text{辣} + 10 \\ 10\text{牛} + 20\text{辣} = 2200 \end{cases}</math></p> <p>當全班都吃同一種麵時，價格就很容易算出來，因此我們可以這麼做：</p> <p>假設全班都改吃香辣麵，於是我們拿牛肉麵去跟老闆換成香辣麵，每「一碗牛肉麵」可以換回「一碗香辣麵和 10 元」，因此第 2 式中的「牛」我們改以「辣+10」代換：</p> <p>列式 <math display="block">\begin{cases} \text{牛} = \text{辣} + 10 \\ 10\text{牛} + 20\text{辣} = 2200 \end{cases}</math></p> <p>此時第 2 式變成 <math>10(\text{辣} + 10) + 20\text{辣} = 2200</math>，<math>30\text{辣} + 100 = 2200</math>，<math>30\text{辣} = 2100</math>，可得香辣麵一碗 70 元，牛肉麵一碗 <math>70 + 10 = 80</math> 元。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>2. 將牛肉麵、香辣麵的價格設未知數<math>x</math>、<math>y</math>，再操作一次上述例題，幫助學生以代數符號進行解題。</li> </ol>		

$$\begin{cases} x = y + 10 \\ 10x + 20y = 2200 \end{cases}, \text{將 } x = y + 10 \text{ 代入第 2 式 (也就是用 } y + 10$$

換掉  $x$ )，可得

$$10(y + 10) + 20y = 2200, 30y = 2100, y = 70,$$

$$x = 70 + 10 = 80。$$

3. 以本題進行練習，讓學生使用代入消去法進行解題。

題號	17		
內容領域	代數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。		
試題內容	<p>17. 小婷全家去壽司店用餐，餐廳只使用白色盤子和紅色盤子裝壽司販賣，白色盤子裝的壽司每盤 60 元、紅色盤子裝的壽司每盤 40 元。已知小婷全家吃掉 30 盤的壽司，總共消費 1600 元。請問小婷全家吃掉多少盤白色盤子裝的壽司？</p> <p>① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.20	0.04
2	0.11	0.25	0.01
3*	0.68	0.36	0.94
4	0.08	0.17	0.01
未作答	0.01		
通過率	0.68	鑑別度	0.58
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個包含兩個未知量及兩個關聯訊息的具體情境，要求學生算出其中一個未知量的值，評量學生在具體情境中應用二元一次聯立方程式解題的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項 3，通過率為 68%，顯示近七成的學生已具備在兩個未知量的情境中列出二元一次聯立方程式並解題的能力。</p> <p>2. 有 12% 的學生選擇選項 1(低分組有 20%)，這些學生可能在列出二元一次聯立方程式並求出其解之後，將 <math>x</math>、<math>y</math> 的值代回情境時紀錄相反，原本是白盤子 20 個、紅盤子 10 個，誤紀錄成白盤子 10 個、紅盤子 20 個。</p> <p>3. 有 11% 的學生選擇選項 2(低分組有 25%)，這些學生可能不理解題意，直接猜測紅、白盤子各 15 個。</p>		

教材地位 分析	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習 內容	A-7-3 一元一次方程式的 解法與應用：等量公 理；移項法則；驗 算；應用問題。	A-7-5 二元一次聯立方程 式的解法與應用：代 入消去法；加減消去 法；應用問題。
補救教學 建議	<p>建議教師以下列教學步驟幫助學生解題：</p> <p>(一) 複習一元一次方程式的列式</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>從情境轉化為數學式的過程中，若學生對代數符號較為陌生，可先以情境中的文字列式，待熟悉之後再轉換為代數符號，例如： 哥哥比弟弟多 5 歲，列式：哥=弟+5、哥-5=弟、哥-弟=5，讓學生熟悉相同情境下不同的算式間的轉換。</li> <li>練習以代數符號進行列式。</li> </ol> <p>(二) 複習一元一次方程式的解(可參考第 16 題的教學建議)</p> <p>(三) 複習二元一次方程式解的意義(可參考第 16 題的教學建議)</p> <p>(四) 複習二元一次聯立方程式的列式與解題</p> <p>本題的情境正好適合拿來說明加減消去法的過程，教學步驟如下：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>先幫助學生理解題意，發現有兩個未知量(白盤子、紅盤子)，並能找到描述紅、白盤子數量之間關係的兩個句子。</li> <li>將這兩個描述關係的句子以數學式表達，未知量先用文字代替，列式           <math display="block">\begin{cases} \text{白} + \text{紅} = 30 \\ 60\text{白} + 40\text{紅} = 1600 \end{cases}</math> </li> <li>接著引導學生思考，如果假設白、紅盤子一盤都是 60 元，會花多少錢？            生：總共吃 30 盤，花 <math>60 \times 30 = 1800</math> 元。            師：但是我們有花 1800 元嗎？            生：沒有，只花了 1600 元。            師：那麼多出來的 200 元是什麼？            生：是紅盤子多算的，紅盤子只要 40 元。            師：所以紅盤子一盤 40 元，我們卻算 60 元，一盤多算了 20 元，現在多算了 200 元，表示什麼？            生：表示紅盤子應該有 <math>200 \div 20 = 10</math> 個。            師：很好，那麼你能算白盤子了嗎？            生：全部盤子有 30 個，白盤子有 <math>30 - 10 = 20</math> 個。            師：很好，那麼我們把剛剛的過程用算式紀錄下來看看。</li> </ol>		

4. 上述過程就是加減消去法的歷程，先引導學生在情境中思考，學生先有感之後，再幫助學生以數學算式進行解題紀錄。

(1) 假設每一盤都是 60 元 → 第 1 式乘以 60

$$60 \text{ 白} + 60 \text{ 紅} = 1800$$

(2) 1800 比 1600 多 200，多的是紅盤子多算的錢

→ 第 1 式乘以 60 - 第 2 式

$$\begin{array}{r} 60 \text{ 白} + 60 \text{ 紅} = 1800 \\ -) 60 \text{ 白} + 40 \text{ 紅} = 1600 \\ \hline \end{array}$$

$$20 \text{ 紅} = 200$$

(3) 紅盤子一盤多算了 20 元，總共多算 200 元，所以紅盤子有 10 個 →

$$20 \text{ 紅} = 200, \text{ 紅} = 10$$

(4) 總共 30 個盤子，所以白盤子有  $30 - 10 = 20$  個 →

$$\text{紅} = 10 \text{ 代入第 1 式, 白} + 10 = 30, \text{ 白} = 30 - 10 = 20$$

5. 設白盤子  $x$  個、紅盤子  $y$  個，將上述歷程再紀錄一次，讓學生熟悉加減消去法的計算過程。

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 60x + 40y = 1600 \end{cases}, \text{ 第 1 式乘以 60 (假設每一盤都是 60 元)}$$

$$\begin{cases} 60x + 60y = 1800 \\ 60x + 40y = 1600 \end{cases}, \text{ 兩式相減 (紅盤子多算錢, 因此求兩式}$$

價差)

$$20y = 200, y = 10 \text{ (紅盤子有 10 個)}$$

$$x = 30 - 10 = 20 \text{ (白盤子有 20 個)}$$

題號	18		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。		
試題內容	<p>18. 下列哪一個選項是方程式 <math>2[(x-1)-(2x+1)] = 6-(3x+2)</math> 的解？</p> <p>① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.22	0.03
2	0.19	0.29	0.05
3	0.14	0.27	0.03
4*	0.53	0.21	0.89
未作答	0.01		
通過率	0.53	鑑別度	0.68
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個較為複雜(需多步驟去括號和化簡)的一元一次方程式，要求學生解出 <math>x</math> 的值，評量學生是否能掌握一元一次方程式的解題。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1.本題鑑別度為 0.68，正確答案為選項 4，通過率為 53%，顯示超過五成的學生已具備解較為複雜(需多步驟去括號和化簡)的一元一次方程式的能力。</p> <p>2.有 13%的學生選擇選項 1(低分組有 22%)，這些學生可能不熟練多步驟的方程式解題，在去括號、移項...等過程中發生疏漏，因而求得錯誤答案。</p> <p>3.有 19%的學生選擇選項 2(低分組有 29%)，這些學生可能在去括號時左式發生疏漏(沒變號)，誤算為 <math>2(x-1-2x+1)=6-3x-2</math>，解得 <math>x=4</math>。</p> <p>4.有 14%的學生選擇選項 3(低分組有 27%)，這些學生可能不熟練多步驟的方程式解題，在去括號、移項...等過程中發生疏漏，因而求得錯誤答案。</p>		

		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位 分析	學習 內容	R-5-3 以符號表示數學公式：國中代數的前置經驗。初步體驗符號之使用，隱含「符號代表數」、「符號與運算符號的結合」的經驗。應併入其他教學活動。	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。
補救教學 建議	<p>建議教師以下列教學步驟幫助學生解題：</p> <p>(一) 複習一元一次式的化簡：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 去括號：<math>-(a+b)=-a-b</math>、<math>-(a-b)=-a+b</math>，可舉實例感受，而非淪於背誦。</li> <li>2. 分配律：<math>a(b+c)=ab+ac</math>，以買東西結帳時「分開買」和「一起買」舉例。</li> <li>3. 同類項合併：學生常見的錯誤是，各項之間換位置時，僅將數字或符號交換，而忽略了正負號，建議教師教學中先消滅減法，將減一個數改成加上該數的相反數表示，讓學生理解換位置時負號要帶著走的觀念，例如：  <math display="block">3x+2-x-5=3x+2+(-x)+(-5)=3x+(-x)+2+(-5)=2x+(-3)=2x-3</math> </li> </ol> <p>(二) 複習一元一次方程式的解</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 一元一次方程式解的意義。</li> <li>2. 等量公理解一元一次方程式：對於學習成就低落的學生，建議老師以等量公理進行單步驟解題的教學，移項法則待學生較熟悉之後再介紹。</li> <li>3. 練習二步驟的解題，例如：<math>3x+2=5</math>； 練習單邊去括號解題，例如：<math>3(x-2)=5</math>； 練習左右兩式都有 <math>x</math> 的解題，例如：<math>-3x+2=5x-3</math>，循序漸進。</li> <li>4. 練習多步驟解題，以本題為例，較複雜的題型可教學生先將左右兩式視為兩個一元一次式，先分別將其化簡，降低學生的負荷：  左式  <math display="block">=2[(x-1)-(2x+1)]=2[x-1-2x-1]=2(-x-2)=-2x-4</math> 右式=<math>6-(3x+2)=6-3x-2=4-3x</math>  左式=右式，<math>-2x-4=4-3x</math>  <math>3x-2x=4+4</math>，<math>x=8</math> </li> </ol>			

題號	19		
內容領域	代數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。		
試題內容	<p>19. 小歐在解一道卡牌問題，每張卡牌都只有一個數字。已知他只知道以下三個訊息：</p> <p>    訊息一：卡牌總共有 10 張</p> <p>    訊息二：卡牌上的數字只有 3 種，分別為：0、2、5</p> <p>    訊息三：所有卡牌的數字的總和為 30</p> <p>則卡牌中數字是 0 的有多少張？</p> <p>① 1</p> <p>② 2</p> <p>③ 3</p> <p>④ 4</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.51	0.26	0.79
2	0.18	0.28	0.07
3	0.16	0.26	0.06
4	0.14	0.20	0.08
未作答	0.01		
通過率	0.51	鑑別度	0.53
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個包含三個未知量及三個關聯訊息的具體情境，要求學生算出其中一個未知量的值，評量學生在具體情境中應用二元一次聯立方程式解題的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.53，正確答案為選項 1，通過率為 51%，顯示超過五成的學生已具備將三個未知量以兩個未知數表示，且能依題意列出二元一次方程式，並求出符合題意之整數解的能力。</p> <p>2. 有 18% 的學生選擇選項 2 (低分組有 28%)，有 16% 的學生選擇選項 3 (低分組有 26%)，有 14% 的學生選擇選項 4 (低分組有 20%)，這些學生可能不理解題意，或是因為無法列出兩個二元一次方程式而誤以為無法解題 (本題僅能列出一個二元一次方程式，須從該方程式的多組正整數解中，找到滿足題意的其中一組解)，因此只好從選項中進行猜測。</p>		



教材地位 分析	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識												
	學習內容	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。												
補救教學 建議	<p>建議教師以下列教學步驟幫助學生解題：</p> <p>(一) 複習一元一次方程式</p> <p>(二) 複習二元一次方程式解的意義與列式</p> <p>(三) 以本題為例，進行解題說明：</p> <p>首先分析題目給的三個條件，選擇適當的未知數進行假設與列式：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 卡牌總共有 10 張、卡片數字有三種，分別為：0、2、5。 → 訊息一、二其實只提供了一種卡牌數量間的關係，即「卡牌數量總和為 10」</li> <li>2. 卡牌數字總和為 30。 → 數字總和由 2 和 5 提供，從這裡可以決定本題優先考慮 2 和 5 的卡牌數量。</li> <li>3. 綜合上述分析，設數字 2 有 <math>x</math> 張，數字 5 有 <math>y</math> 張，數字 0 有 <math>10-x-y</math> 張，列式 <math>2x+5y=30</math>，然後...就沒有然後了，多數學生會卡在這裡，因為無法列出第二個二元一次方程式，因此無法解聯立。</li> <li>4. 此時教師宜提醒學生，二元一次方程式沒有解嗎？不，它有無限多解，那麼滿足題意的解有幾組呢？引導學生注意到，本題 <math>x</math>、<math>y</math> 是張數，必須是正整數解，且張數皆小於 10，因此先一一列出 <math>2x+5y=30</math> 的正整數解</li> </ol> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>...</td> <td style="border: 2px solid red;">5</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>不是 正整數</td> <td>不是 正整數</td> <td>...</td> <td style="border: 2px solid red;">4</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;"> <span style="color: red; font-size: 2em;">✗</span>    <span style="color: red; font-size: 2em;">✗</span>    <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">張數不合題意</span>    <span style="color: red; font-size: 2em;">✗</span> </p> <p>故可得 <math>x=5</math>、<math>y=4</math>，因此數字 0 有 <math>10-5-4=1</math> 張。</p>			$x$	1	2	...	5	10	$y$	不是 正整數	不是 正整數	...	4	2
$x$	1	2	...	5	10										
$y$	不是 正整數	不是 正整數	...	4	2										

題號	20		
內容領域	代數	認知歷程向度	
學習內容	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。		
試題內容	<p>20. 化簡 <math>\frac{2x+5}{3} - \frac{3x-1}{2} = ?</math></p> <p>① <math>\frac{-5x+13}{6}</math></p> <p>② <math>\frac{-5x+7}{6}</math></p> <p>③ <math>\frac{-5x+6}{6}</math></p> <p>④ <math>-5x+13</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.53	0.21	0.87
2	0.22	0.29	0.07
3	0.14	0.29	0.01
4	0.11	0.19	0.04
未作答	0.00		
通過率	0.53	鑑別度	0.66
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明</p> <p>本題給定一個一元一次的算式，要求學生化簡，評量學生掌握化簡一元一次式的能力。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明</p> <p>1. 本題鑑別度為 0.66，正確答案為選項 1，通過率為 53%，顯示超過五成的學生已具備化簡一元一次式的能力。</p> <p>2. 有 22% 的學生選擇選項 2 (低分組有 29%)，這些學生可能尚未具備掌握化簡一元一次式的能力，或者在運算</p> $\frac{2x+5}{3} - \frac{3x-1}{2} = \frac{2 \times (2x+5) - 3 \times (3x-1)}{6}$ <p>去括號時變號錯誤，得到</p> $\frac{4x+10-9x-3}{6} = \frac{-5x+7}{6}$ <p>的錯誤答案。</p> <p>3. 有 14% 的學生選擇選項 3 (低分組有 29%)，這些學生可能尚未具備掌握化簡一元一次式的能力，或者在運算</p> $\frac{2x+5}{3} - \frac{3x-1}{2} = \frac{2 \times (2x+5) - 3 \times (3x-1)}{6}$ <p>使用分配律去括號時變號錯</p>		

	<p>誤，得到<math>\frac{2x+5-9x+1}{6} = \frac{-5x+6}{6}</math>的錯誤答案。</p> <p>4.有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 19%)，這些學生可能尚未具備掌握化簡一元一次式的能力，或者在運算時未使用通分直接乘以 6 去分母做運算，而得到錯誤的答案。</p>			
教材地位分析	學習內容	<p>先備的知識</p> <p>R-6-1  數的計算規律：小學最後應認識(1)整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2)整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3)逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。  備註：須理解小數和分數乘除混合計算時，常用的約分規則。在生活解題上，乘法和除法意義不同，但在計算上兩者實為一體，學生因此可提高數學認識之抽象層次。乘法和除法視為一體的好處是計算規律大為簡化。本條目不須另立獨立單元教學。</p>	<p>本題所需的知識</p> <p>A-7-1  代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。</p>	<p>延伸的知識</p> <p>A-8-1  二次式的乘法公式：<math>(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2</math>；  <math>(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2</math>；  <math>(a+b)(a-b) = a^2 - b^2</math>；  <math>(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd</math>。  A-8-2  多項式的意義：一元多項式的定義與相關名詞(多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪)。</p>
		補救教學建議	<p>(一) 先複習分配律與分式的運算。</p> <p>(二) 以本題來說</p> <p>1.先舉幾個分配律和去括號的例子，<math>2(3x+2)=2 \times 3x+2 \times 4</math>，<math>-(3x-1)=-3x+1</math> 讓學生熟悉。</p> <p>2.以<math>\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \neq 4 - 3</math>，來說明<math>\frac{2x+5}{3} - \frac{3x-1}{2} \neq 2(2x+5) - 3(3x-1)</math>，用以說明等量公理可在方程式中使用，多項式不適用。</p>	

3.舉幾個例子說明同類項合併，

$$\begin{aligned}5x + 3 - 2x - 2 &= (5x - 2x) + (3 - 2) \\ &= (5 - 2)x + (3 - 2) = 3x + 1\end{aligned}$$

4.化簡本題說明

$$\frac{2x+5}{3} - \frac{3x-1}{2} = \frac{2 \times (2x+5)}{2 \times 3} - \frac{3 \times (3x-1)}{3 \times 2} = \frac{2 \times (2x+5) - 3 \times (3x-1)}{6} =$$

$$\frac{2 \times 2x + 2 \times 5 - 3 \times 3x + 3 \times 1}{6} = \frac{4x + 10 - 9x + 3}{6} = \frac{(4x - 9x) + (10 + 3)}{6} = \frac{-5x + 13}{6}$$

題號	21		
內容領域	代數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。		
試題內容	<p>21. 老師將一些糖果分給幾位同學，若每人分到 4 顆，會剩下 2 顆；若每人分到 5 顆，會不夠 4 顆。請問糖果一共有幾顆？</p> <p>① 30 ② 26 ③ 22 ④ 18</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.25	0.02
2*	0.63	0.31	0.94
3	0.13	0.24	0.02
4	0.12	0.20	0.02
未作答	0.01		
通過率	0.63	鑑別度	0.63
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定兩種不同分法最後剩餘或不足的條件，要求學生利用一元一次方程式列式算出糖果總數，評量學生應用一元一次方程式解決問題的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1.本題鑑別度為 0.63，正確答案為選項 2，通過率為 63%，顯示超過六成的學生已具備應用一元一次方程式解決問題的能力。</p> <p>2.有 12%的學生選擇選項 1(低分組有 25%)，這些學生可能尚未具備應用一元一次方程式解決問題的能力。</p> <p>3.有 13%的學生選擇選項 3(低分組有 24%)，這些學生可能尚未具備應用一元一次方程式解決問題的能力。</p> <p>4.有 12%的學生選擇選項 4(低分組有 20%)，這些學生可能尚未具備應用一元一次方程式解決問題的能力。</p>		

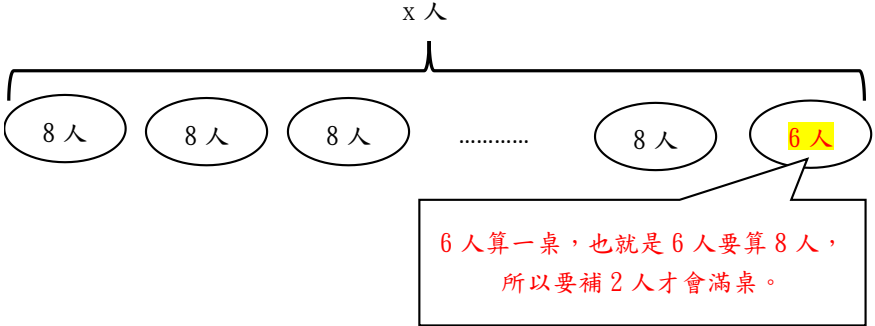
教材地位 分析	學習 內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識				
			A-7-3 一元一次方程式 的解法與應用：等 量公理；移項法 則；驗算；應用問 題。	A-8-7 一元二次 方程式的解法與 應用：利用因式分 解、配方法、公式 解一元二 次方程式；應用問 題；使用計算機計 算一元二次方程 式根的近似值。				
補救教學 建議	<p>(一) 複習等量公理解一元一次方程式</p> <p>(二) 澄清問題中的已知與未知，運用不變找到關係列式解題。</p> <p>(三) 以本題為例</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>已知</th> <th>未知</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>若每人分到 4 顆，會剩下 2 顆； 若每人分到 5 顆，會不夠 4 顆</td> <td>糖果總數 同學人數</td> </tr> </tbody> </table> <p>不變的數可以拿來列等式，未知也是不變的數，因此，可以拿來做假設，也可以拿來列等式，有兩個未知數，一個拿來做假設，另一個拿來列等式。</p> <p>假設同學有 <math>x</math> 人，糖果有 <math>4x + 2</math> 個 ← 若每人分到 4 顆，會剩下 2 顆</p> <p style="padding-left: 100px;">糖果有 <math>5x - 4</math> 個 ← 若每人分到 5 顆，會不夠 4 顆</p> <p><math>4x + 2 = 5x - 4</math>，<math>2 + 4 = 5x - 4x</math>，<math>x = 6</math>，</p> <p><math>4x + 2 = 4 \times 6 + 2 = 26</math>，所以有 6 位同學，26 顆糖果。</p>				已知	未知	若每人分到 4 顆，會剩下 2 顆； 若每人分到 5 顆，會不夠 4 顆	糖果總數 同學人數
	已知	未知						
若每人分到 4 顆，會剩下 2 顆； 若每人分到 5 顆，會不夠 4 顆	糖果總數 同學人數							

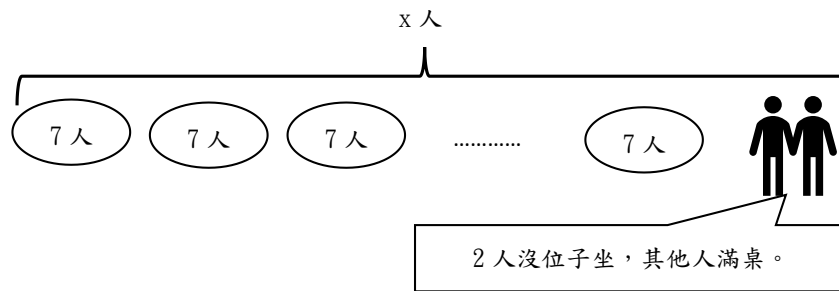
題號	22		
內容領域	代數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax + by = c$ 的圖形； $y = c$ 的圖形（水平線）； $x = c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。		
試題內容	<p>22. 已知二元一次聯立方程式 <math>\begin{cases} 3x + 2y = -9 \\ x - y = 2 \end{cases}</math> 圖形的交點為 <math>P</math>，請問 <math>P</math> 點在哪一個象限？</p> <p>① 第一象限 ② 第二象限 ③ 第三象限 ④ 第四象限</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.20	0.02
2	0.20	0.34	0.06
3*	0.54	0.26	0.85
4	0.15	0.19	0.07
未作答	0.01		
通過率	0.54	鑑別度	0.59
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一組二元一次聯立方程式，要求學生求出圖形交點在第幾象限，評量學生是否理解二元一次聯立方程式幾何意義。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.59，正確答案為選項 3，通過率為 54%，顯示超過五成的學生已具備理解二元一次聯立方程式幾何意義的能力。</p> <p>2. 有 11% 的學生選擇選項 1 (低分組有 20%)，這些學生可能尚未具備理解二元一次聯立方程式幾何意義的能力。</p> <p>3. 有 20% 的學生選擇選項 2 (低分組有 34%)，這些學生可能尚未具備理解二元一次聯立方程式幾何意義的能力。</p> <p>4. 有 15% 的學生選擇選項 4 (低分組有 19%)，這些學生可能尚未理具備解二元一次聯立方程式幾何意義的能力。</p>		

教材地位 分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識																		
	學習內容		A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax+by=c$ 的圖形； $y=c$ 的圖形(水平線)； $x=c$ 的圖形(鉛垂線)；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。	F-8-2 一次函數的圖形；常數函數的圖形；一次函數的圖形。																		
補救教學 建議	(一) 二元一次方程式的圖形 以 $y=x$ 為例 <table border="1" data-bbox="459 831 1283 936" style="margin: 10px auto;"> <tr> <td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td> </tr> <tr> <td>Y</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td> </tr> </table> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 在座標平面上描繪出來，可觀察出二元一次方程式的圖形為一直線，再多舉幾個例子，使學生相信 <math>ax + by = c</math> 的圖形皆為一直線。</li> <li>2. 強調線上每一點都是方程式的一組解。</li> <li>3. 二元一次聯立方程式兩條直線，兩條直線的交點就是共同解。</li> </ol> (二) 複習象限的意義、二元一次聯立方程式解法，帶入消去法或加減消去法。 (三) 以本題來說 $\begin{cases} 3x + 2y = -9 \dots (1) \\ x - y = 2 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = -9 \dots (1) \\ 2x - 2y = 4 \dots\dots (3) \end{cases}$ (1)+(3) $5x = -5$ , $x = -1$ 代入(2) $-1 - y = 2$ , $y = -3$ P(-1, -3)在第三象限				X	0	1	2	3	4	5	6	7	Y	0	1	2	3	4	5	6	7
	X	0	1	2	3	4	5	6	7													
Y	0	1	2	3	4	5	6	7														



題號	23		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。		
試題內容	<p>23.「全班師生去餐廳聚餐，餐廳保留固定桌數給他們，如果每桌坐滿 8 人，則會有 1 桌只坐 6 人；如果每桌只坐 7 人，則會有 2 人無空位可坐。」          假設師生全部有 <math>x</math> 人，依題意可以列出下列哪個一元一次方程式？</p> <p>① <math>\frac{x+2}{8} = \frac{x-2}{7}</math></p> <p>② <math>\frac{x+6}{8} = \frac{x-2}{7}</math></p> <p>③ <math>\frac{x+6}{8} = \frac{x+2}{7}</math></p> <p>④ <math>\frac{x-6}{8} = \frac{x+2}{7}</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.29	0.18	0.49
2	0.28	0.32	0.19
3	0.19	0.26	0.09
4	0.23	0.22	0.22
未作答	0.01		
通過率	0.29	鑑別度	0.31
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定兩組不同的座位安排並假設一個未知數，要求學生列出一元一次方程式，評量學生運用一元一次方程式列式的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1.本題鑑別度為 0.31，正確答案為選項 1，通過率為 29%，顯示近三成的學生已具備運用一元一次方程式列式的能力。</p> <p>2.有 28%的學生選擇選項 2(低分組有 32%)，這些學生可能尚未具備運用一元一次方程式列式的能力，過程中錯將全部人數加上 6 人當成坐滿的桌次。</p> <p>3.有 19%的學生選擇選項 3(低分組有 26%)，這些學生可能尚未具備運用一元一次方程式列式的能力，過程中錯將全部人數加上 6 人當成坐滿的桌次的人數，並將全部的人數加上沒座位的 2 人當成坐滿桌次的人數。</p>		

	<p>4.有 23%的學生選擇選項 4(低分組有 22%)，這些學生可能尚未具備運用一元一次方程式列式的能力，過程中將全部人數減去 6 人算出來少加 6 人那一桌，並錯將全部的人數加上沒座位的 2 人當成坐滿桌次的人數。</p>			
教材地位分析	學習內容	<p>先備的知識</p> <p>R-5-3 以符號表示數學公式：國中代數的前置經驗。初步體驗符號之使用，隱含「符號代表數」、「符號與運算符號的結合」的經驗。應併入其他教學活動。 備註：藉由幾何圖形的面積與體積公式較易進行。也可在分數乘法中運用。本條目並非取代「文字表示公式」(R-4-3)，後者較易理解之優點仍可保持。</p>	<p>本題所需的知識</p> <p>A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。</p>	<p>延伸的知識</p> <p>F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 <math>f(x)</math> 的抽象型式）、常數函數 (<math>y = c</math>)、一次函數 (<math>y = ax + b</math>)。 F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。</p>
		<p>(一) 可適當的利用圖形輔助思考。 (二) 以本題來說 用下列圖示說明</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>滿桌總人數為 <math>x+2</math> 人，8 人一桌，共有 <math>\frac{x+2}{8}</math> 桌。</p>		
補救教學建議				

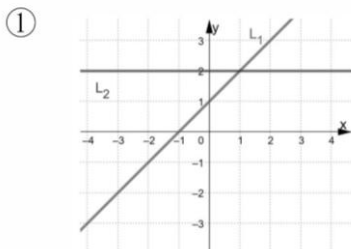
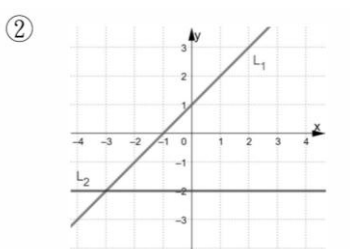
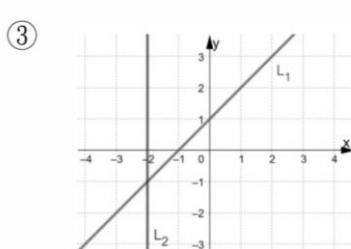
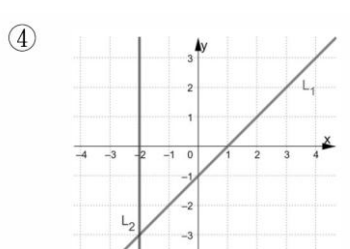


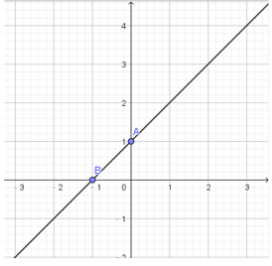
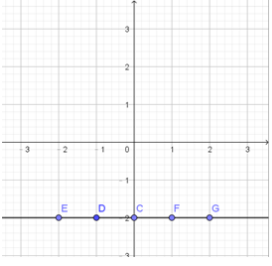
滿桌總人數為  $x-2$  人，7 人一桌，共有  $\frac{x-2}{7}$  桌。

桌數相同所以得到列式  $\frac{x+2}{8} = \frac{x-2}{7}$

題號	24		
內容領域	代數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax + by = c$ 的圖形； $y = c$ 的圖形（水平線）； $x = c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。		
試題內容	<p>24. 坐標平面上，直線 <math>L_1: x - y = a</math> 和直線 <math>L_2: 2x - 3y = b</math> 的圖形交點在第四象限。下列何者正確？</p> <p>① <math>a &gt; 0</math> 且 <math>b &gt; 0</math></p> <p>② <math>a &gt; 0</math> 且 <math>b &lt; 0</math></p> <p>③ <math>a &lt; 0</math> 且 <math>b &gt; 0</math></p> <p>④ <math>a &lt; 0</math> 且 <math>b &lt; 0</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.30	0.20	0.51
2	0.30	0.30	0.24
3	0.21	0.28	0.13
4	0.17	0.21	0.11
未作答	0.01		
通過率	0.30	鑑別度	0.31
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定兩不完整的直線方程式與其交點在第幾象限，要求學生判斷兩方程式中未知係數的正負，評量學生運用二元一次聯立方程式的幾何意義解題的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.31，正確答案為選項 1，通過率為 30%，顯示成的學生已具備運用二元一次聯立方程式的幾何意義解題的能力。</p> <p>2. 有 30% 的學生選擇選項 2 (低分組有 30%)，這些學生可能尚未具備運用二元一次聯立方程式的幾何意義解題的能力。</p> <p>3. 有 21% 的學生選擇選項 3 (低分組有 28%)，這些學生可能尚未具備運用二元一次聯立方程式的幾何意義解題的能力。</p> <p>4. 有 17% 的學生選擇選項 4 (低分組有 21%)，這些學生可能尚未具備運用二元一次聯立方程式的幾何意義解題的能力。</p>		

教材地位分析	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識																		
	學習內容	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax+by=c$ 的圖形； $y=c$ 的圖形(水平線)； $x=c$ 的圖形(鉛垂線)；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。	F-8-2 一次函數的圖形；常數函數的圖形；一次函數的圖形。																		
補救教學建議	<p>(一) 複習象限的意義。</p> <p>(二) 以圖形意義來說</p> <p>1. 二元一次方程式的圖形為一直線</p> <p>以 <math>y=2x</math> 為例</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">X</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;">7</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Y</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;">8</td> <td style="padding: 5px;">10</td> <td style="padding: 5px;">12</td> <td style="padding: 5px;">14</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"> <span style="margin-right: 20px;">+1</span> <span style="margin-right: 20px;">+1</span> <span style="margin-right: 20px;">+1</span> <span style="margin-right: 20px;">+1</span> <span style="margin-right: 20px;">+1</span> </p> <p style="text-align: center;"> <span style="margin-right: 20px;">+2</span> <span style="margin-right: 20px;">+2</span> <span style="margin-right: 20px;">+2</span> <span style="margin-right: 20px;">+2</span> <span style="margin-right: 20px;">+2</span> </p> <p>(1) 先在座標平面上描繪出來，可觀察出二元一次方程式的圖形為一直線。</p> <p>(2) 分析從(0, 0)開始，x 每增加 1，y 就會增加 2。</p> <p>(3) 比較 <math>y=2x+3</math> 和 <math>y=2x</math> 的差別，得到 <math>y=2x+3</math> 是從(0, 3)開始，x 每增加 1，y 就會增加 2，<math>y=2x+3</math> 是將 <math>y=2x</math> 向上平移 3 單位，建立平移概念。</p> <p>2. 說明二元一次聯立方程式兩條直線，兩條直線的交點就是共同解。</p> <p>(三)以本題來說</p> <p>1. <math>x-y=a</math> 可以調整為 <math>y=x-a</math>，是從 <math>y=x</math> 開始平移到 <math>y=x-a</math>，換言之是從(0, 0)平移到(0, -a)，因為交點在第四象限，所以要往下平移，因此<math>-a&lt;0</math>，得到 <math>a&gt;0</math></p> <p><math>2x-3y=b</math> 可以調整為 <math>3y=2x-b</math>，是從 <math>3y=2x</math> 開始平移到 <math>3y=2x-b</math>，換言之是從(0, 0)平移到(0, -b)，因為交點在第四象限，所以也要往下平移，因此<math>-b&lt;0</math>，得到 <math>b&gt;0</math></p> <p>2. 因為交點在第四象限，座標符號為(+, -)，即 <math>x&gt;0</math>，<math>y&lt;0</math>，<math>a=x-y&gt;0</math>，<math>b=2x-3y&gt;0</math></p>			X	0	1	2	3	4	5	6	7	Y	0	2	4	6	8	10	12	14
X	0	1	2	3	4	5	6	7													
Y	0	2	4	6	8	10	12	14													


題號	25		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax + by = c$ 的圖形； $y = c$ 的圖形（水平線）； $x = c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。		
試題內容	<p>25. 已知兩條直線 <math>L_1</math>、<math>L_2</math> 的方程式分別為 <math>x - y + 1 = 0</math>、<math>y = -2</math>，則下列哪一個選項可能為直線 <math>L_1</math>、<math>L_2</math> 的圖形？</p> <p>① </p> <p>② </p> <p>③ </p> <p>④ </p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.18	0.02
2*	0.56	0.27	0.87
3	0.17	0.27	0.05
4	0.17	0.26	0.06
未作答	0.02		
通過率	0.56	鑑別度	0.59
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b> 本題給定兩條二元一次方程式，要求學生判斷兩方程式中在座標平面上的圖形，評量學生是否理解二元一次聯立方程式的幾何意義。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b> 1. 本題鑑別度為 0.59，正確答案為選項 2，通過率為 54%，顯示超過五成的學生已具備理解二元一次聯立方程式的幾何意義的能力。 2. 有 10% 的學生選擇選項 1 (低分組有 19%)，這些學生可能尚</p>		

	<p>未具備理解二元一次聯立方程式的幾何意義的能力。</p> <p>3.有 17%的學生選擇選項 3(低分組有 27%)，這些學生可能尚未具備理解二元一次聯立方程式的幾何意義的能力，或誤解 <math>y=-2</math> 為鉛垂線。</p> <p>4.有 18%的學生選擇選項 4(低分組有 26%)，這些學生可能尚未具備理解二元一次聯立方程式的幾何意義的能力，或誤解 <math>y=-2</math> 為鉛垂線，也誤判 <math>x-y+1=0</math> 的圖形。</p>																																			
教材地位分析	學習內容	先備的知識	<p>本題所需的知識</p> <p>A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義：<math>ax+by=c</math> 的圖形；<math>y=c</math> 的圖形（水平線）；<math>x=c</math> 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。</p> <p>延伸的知識</p> <p>F-8-2 一次函數的圖形；常數函數的圖形；一次函數的圖形。</p>																																	
補救教學建議	<p>(一) 二元一次方程式的圖形為一直線</p> <p>以 <math>y=x+5</math> 為例</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>先在座標平面上描繪出來，可觀察出二元一次方程式的圖形為一直線。</li> <li>因為兩點決定一直線，所以，取兩點即可畫出圖形。</li> </ol> <table border="1" data-bbox="459 1182 759 1281"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>-5</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>5</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>(二) 讓學生有足夠多的時間描繪並觀察鉛直線與水平線，中 x 值與 y 值的變化，再做歸納，以加深學生印象。</p> <p>(三) 以本題為例</p> <table border="1" data-bbox="485 1464 724 1576"> <tr> <td colspan="3"><math>x-y+1=0</math></td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>-1</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table> <table border="1" data-bbox="485 1706 963 1818"> <tr> <td colspan="6"><math>y=-2</math></td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>-2</td> <td>-2</td> <td>-2</td> <td>-2</td> <td>-2</td> </tr> </table> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div>			x	0	-5	y	5	0	$x-y+1=0$			x	0	-1	y	1	0	$y=-2$						x	-2	-1	0	1	2	y	-2	-2	-2	-2	-2
x	0	-5																																		
y	5	0																																		
$x-y+1=0$																																				
x	0	-1																																		
y	1	0																																		
$y=-2$																																				
x	-2	-1	0	1	2																															
y	-2	-2	-2	-2	-2																															

## 八年級試題選項分析與教學建議

題號	1		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。		
試題內容	<p>1. 已知一個等差數列的第 3 項為 22，第 4 項為 18，則第 18 項為？</p> <p>① -29</p> <p>② -34</p> <p>③ -38</p> <p>④ -45</p>		
選答率 選項	答題反應比率（*表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.03	0.09	0.00
2	0.12	0.23	0.03
3*	0.80	0.57	0.96
4	0.05	0.11	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.80	鑑別度	0.38
試題品質 分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定等差數列相鄰兩項的數值，要求學生算出指定項的數值，評量學生是否理解等差數列的意義。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.38，正確答案為選項 3，通過率為 80%，顯示有八成的學生已理解等差數列的意義。</p> <p>2. 有 12% 的學生選擇選項 2（低分組有 23%），這些學生可能尚未理解等差數列的意義，或者將等差數列的第 <math>n</math> 項公式誤記成 <math>a_n = a_1 + nd</math>，而得到錯誤答案 -34。</p>		



教材地位 分析	學習內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
補救教學 建議		R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。	N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。 備註 不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公差」，例如：給定 $a_5$ 和 $a_9$ 的值，求首項和公差。	N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。
				<p>(一) 先複習等差數列的定義： 觀察下面等差數列：</p> $1 \quad 5 \quad 9 \quad 13 \quad 17 \quad \cdots \quad 45 \quad 49$  <p>可以發現後項減去前項都等於 4。像這樣，一個數列中，任意相鄰兩項，後項減去前項所得的差都相同，稱為等差數列，這個差稱為公差，通常用 <math>d</math> 表示。</p> <p>(二) 接下來說明如何用首項、項次及公差形成等差數列的一般項： 設首項為 <math>a_1</math>，公差為 <math>d</math>            第 2 項為 <math>a_2 = a_1 + d</math>（首項加 1 個公差）            第 3 項為 <math>a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d</math>（首項加 2 個公差）            第 4 項為 <math>a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d</math>（首項加 3 個公差）            第 5 項為 <math>a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d</math>（首項加 4 個公差）            ……            依此類推，第 <math>n</math> 項為 <math>a_n = a_1 + (n-1)d</math>（首項加 <math>n-1</math> 個公差）</p> <p>(三) 以本例來說：            由題意知 <math>a_3 = 22</math> 和 <math>a_4 = 18</math>，所以公差 <math>d = -4</math>。            又 <math>a_3 = a_1 + 2d</math>，可得 <math>a_1 = 22 + 2 \times 4 = 30</math>。            因此，<math>a_{18} = a_1 + (18-1)d = 30 + 17 \times (-4) = -38</math>。</p>

題號	2		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）。		
試題內容	<p>2. 小芬將真分數依分母由小到大寫成一列，如下：</p> $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \dots$ <p>例如：第 1 個數是 <math>\frac{1}{2}</math>、第 8 個數是 <math>\frac{2}{5}</math>。請問 <math>\frac{7}{10}</math> 是第幾個數？</p> <p>① 62 ② 52 ③ 43 ④ 37</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.09	0.01
2	0.16	0.24	0.09
3*	0.72	0.52	0.88
4	0.08	0.14	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.72	鑑別度	0.36
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b> 本題給定一串有規律的分數數列，要求學生算出指數值是第幾項，評量學生掌握數列的規律的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b> 1. 本題鑑別度為 0.36，正確答案為選項 3，通過率為 72%，顯示超過七成的學生已具備掌握數列的規律的能力。 2. 有 16% 的學生選擇選項 2 (低分組有 24%)，這些學生可能尚未具備掌握數列的規律的能力，或者直接算分母 1~9，加上分母 10 的七項：<math>(1+2+3+\dots+9)+7</math> 而得到錯誤的答案 52。</p>		
教材地位分析		先備的知識	本題所需的知識
	學習內容	R-6-2 數量關係：代數與函數的前置經驗。從具體情境或數量模式之活動出發，做觀察、推理、說明。	N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）。
			延伸的知識 N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。

(一) 複習四則運算最簡單的一些模式:

- (1) 和不變：例如 24 個蘋果分給小明和小華兩個人。
- (2) 差不變：例如小英和她父親的年齡差是固定的(年齡問題)。
- (3) 積不變：例如總飲料量固定，每杯飲料的容量和杯數的乘積不變。
- (4) 商不變：任何比和比值中相等比的問題，例如物品價格、速度、濃度、利率固定。

(二) 接下來分別針對上述四個模式，引導學生觀察兩變數的變化情況。例如”和不變”模式，可引導學生觀察小明和小華的分得個數變化的規律(每人至少分得 1 個)，從中找到小明增加 1 個，小華減少 1 個，再分析所有整數變化共有 23 種，與總個數 24 個剛好少 1。

晝長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
夜長	23	22	21	20	18	18	17	16	15	14	13	12
晝長	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
夜長	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

補救教學  
建議

(三) 複習等差級數(請參閱第 4 題的教學建議(二))

(四) 以本例來說:

先觀察分子與分母:以分母做分類

分數	分析	個數
$\frac{1}{2}$	分母：2 分子：1	1 個
$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$	分母：3 分子：1、2	2 個
$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$	分母：4 分子：1、2、3	3 個
$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$	分母：5 分子：1、2、3、4	4 個
...	...	...
$\frac{1}{9}$	分母：9 分子：1、2、...、8	8 個
$\frac{1}{10}, \dots, \frac{7}{10}$	分母：10 分子：1、2、...、7	1 個

再將個數加總 $(1+8) \times 8/2 + 7 = 43$  得到正確答案。

題號	3			
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考	
學習內容	N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。			
試題內容	<p>3. 已知 <math>\sqrt{60+a}=3</math>，求 <math>a=?</math></p> <p>① -51</p> <p>② -69</p> <p>③ 31</p> <p>④ 21</p>			
選答率	答題反應比率（*表正確答案）			
選項	整體	低分組	高分組	
1*	0.74	0.38	0.98	
2	0.12	0.26	0.01	
3	0.05	0.15	0.00	
4	0.08	0.20	0.01	
未作答	0.00			
通過率	0.74	鑑別度	0.60	
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個有未知數根式方程式，要求學生算出未知數的數值，評量學生是否能理解平方根的意義。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1.本題鑑別度為 0.60，正確答案為選項 1，通過率為 74%，顯示超過七成的學生已具備理解平方根的意義的能力。</p> <p>2.有 12%的學生選擇選項 2(低分組有 26%)，這些學生可能尚未具備理解平方根的意義的能力，或者運算時，兩邊平方得 <math>60+a=9</math>，<math>a=-60+9=-69</math> 而得到錯誤的答案-69。</p>			
教材地位分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方； $a \neq 0$ 時 $a^0=1$ ；同底數的大小比較；指數的運算。	N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。 備註 可使用乘法公式來化簡的根式，待乘法公式單元再提及。	N-10-3 指數：非負實數之小數或分數次方的意義，幾何平均數與算幾不等式，複習指數律，實數指數的意義，使用計算機的 $x^y$ 鍵。

補救教學  
建議

(一) 複習指數的意義與運算，一元一次方程式解的運算。

1. 以  $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$  為例，讓學生理解次方為底數字成次方次數的結果，並引入“平方”就是“二次方”的概念。

2. 以  $20 + x = 3$  為例， $x = -20 + 3 = -(20+3) = -23$

(二) 平方根教學

1. 以平方是兩個相同的數開始，引導學生先找  $\square \times \square = 4$ ， $\square$  內要填入相同的數，提醒學生可以填入兩個負數，讓學生得到  $2 \times 2 = 2^2 = 4$ ， $(-2) \times (-2) = (-2)^2 = 4$  的結論。

2. 請學生找  $\square \times \square = 3$ ， $\square$  要填多少，因為無法填入整數，引入

$\sqrt{3}$  的符號表示法，依據前述結果  $(\sqrt{3}) \times (\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 =$

$3$ ， $(-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 = 3$ 。

(三) 以本例來說，

$\sqrt{60+a} = 3$ ，代表

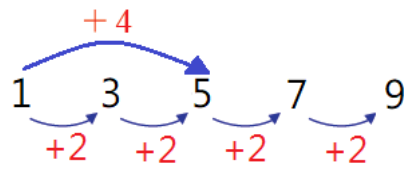
$(\sqrt{60+a}) \times (\sqrt{60+a}) = (\sqrt{60+a})^2 = 3^2$ ，

所以  $60+a = 9$ ， $a = -60+9 = -(60-9) = -51$

題號	4		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。		
試題內容	<p>4. 段考在即，城武決定認真算數學，第一天算 1 題，接下來每一天都比前一天多算 2 題，就這樣努力的算了 10 天。請問這 10 天城武總共算了幾題？</p> <p>① 19 ② 20 ③ 55 ④ 100</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.23	0.35	0.07
2	0.05	0.13	0.00
3	0.09	0.17	0.02
4*	0.63	0.34	0.91
未作答	0.00		
通過率	0.63	鑑別度	0.57
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b> 本題給定首項(第一天的題數)和公差(每天多算題數)，要求學生算出前 10 項總和，評量學生掌握等差級數總和運算的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b> 1.本題鑑別度為 0.57，正確答案為選項 4，通過率為 63%，顯示超過六成的學生已具備掌握等差級數總和運算的能力。 2.有 23%的學生選擇選項 1(低分組有 35%)，這些學生可能尚未具備掌握等差級數總和運算的能力，或者只算出第 10 天算的題數 <math>1+(10-1)\times 2=19</math>，而得到錯誤的答案 19。</p>		
教材地位分析		先備的知識	本題所需的知識
	學習內容	N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。	<p>N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。 備註 不處理「已知級數和反求首項、項數或公差」。</p> <p>延伸的知識 N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。</p>
補救教學	(一) 先複習等差數列的定義：		

建議

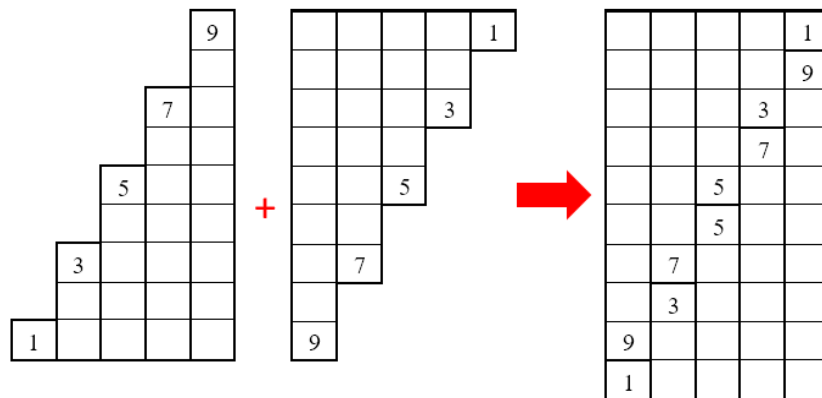
觀察下面等差數列：



可以發現後項減去前項都等於 2。像這樣，一個數列中，任意相鄰兩項，後項減去前項所得的差都相同，稱為等差數列，這個差稱為公差，通常用  $d$  表示。

(二) 等差級數總和計算：

觀察下列兩個圖形的組合



$$\begin{aligned} & (1 + 3 + 5 + 7 + 9) + (9 + 7 + 5 + 3 + 1) \\ &= (1 + 9) + (3 + 7) + (5 + 5) + (7 + 3) + (9 + 1) \\ &= 10 \times 5 \end{aligned}$$

所以， $(1 + 3 + 5 + 7 + 9) = (1 + 9) \times 5/2$ ，亦即  
 $S_n = (a_1 + a_n) \times n/2$

(三) 以本例來說，

第一天算 1 題， $a_1=1$ ，每一天都比前一天多算 2 題， $d=2$ ，努力 10 天， $n=10$

$$a_{10} = a_1 + (n - 1) \times d = 1 + (10 - 1) \times 2 = 19$$

$$S_{10} = (a_1 + a_n) \times n/2 = (1 + 19) \times 10/2 = 100$$

題號	5		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-8-6 等比數列：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項 $a_n$ 。		
試題內容	<p>5. 如圖，圖（一）到圖（三）為具有某種規律的圖形：</p> <div style="text-align: center;"> <p>圖（一）      圖（二）      圖（三）      ……</p> </div> <p>圖（一）有 1 個未著色的正三角形，圖（二）有 3 個未著色的正三角形，圖（三）有 9 個未著色的正三角形，依次類推。 請問圖（五）有幾個未著色的正三角形？</p> <p>① 81 ② 121 ③ 243 ④ 729</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.74	0.51	0.93
2	0.10	0.21	0.01
3	0.12	0.19	0.04
4	0.04	0.09	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.74	鑑別度	0.43
試題品質分析	<p><b>（一）評量目標說明</b> 本題給定一個有規律的等比數列圖形，要求學生從中算出第五項，評量學生是否理解等比數列的第 <math>n</math> 項的意義。</p> <p><b>（二）選項及學生表現說明</b> 1. 本題鑑別度為 0.43，正確答案為選項 1，通過率為 74%，顯示超過七成的學生已具備理解等比數列的第 <math>n</math> 項的意義的能力。 2. 有 10% 的學生選擇選項 2（低分組有 21%），這些學生可能尚未具備理解等比數列的第 <math>n</math> 項的意義的能力。</p>		



	<p>3.有 12%的學生選擇選項 3(低分組有 19%)，這些學生可能尚具備理解等比數列的第 <math>n</math> 項的意義的能力，或在計算時多乘一次公比 3，計算成 <math>1 \times 3^5 = 243</math>，而得到錯誤的答案 243。</p>			
教材地位分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	<p>R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。</p>	<p>N-8-6 等比數列：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。 備註 不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公比」，例如：給定 <math>a_5</math> 和 <math>a_9</math> 的值，求首項和公比。</p>	<p>N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。</p>
補救教學建議	<p>(一) 等比數列教學 觀察下面等比數列：</p> $1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \cdots 128 \xrightarrow{\times 2} 256$ <p>可以發現後項除以前項都等於 2。像這樣，一個數列中，任意相鄰兩項，後項除以前項所得的商都相同，稱為等比數列，這個差稱為公比，通常用 <math>r</math> 表示。</p> <p>(二) 接下來說明如何用首項、項次及公差形成等差數列的一般項： 設首項為 <math>a_1</math>，公差為 <math>r</math></p> <p>第 2 項為 <math>a_2 = a_1 \times r</math> (首項乘 1 個公比) 第 3 項為 <math>a_3 = a_1 \times r^2</math> (首項乘 2 個公比) 第 4 項為 <math>a_4 = a_1 \times r^3</math> (首項乘 3 個公比) 第 5 項為 <math>a_5 = a_1 \times r^4</math> (首項乘 4 個公比) …… 依此類推，第 <math>n</math> 項為 <math>a_n = a_1 \times r^{(n-1)}</math> (首項乘 <math>n-1</math> 個公比)</p> <p>(三) 以本例來說： 由題意知第一個圖未著色為 <math>a_1 = 1</math>，公比 <math>r = 3</math>，得可第五個圖未著色為 <math>a_5 = 1 \times 3^{(5-1)} = 81</math>。</p>			

題號	6		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。		
試題內容	<p>6. 已知一等差數列前 9 項的和大於 0，且大於此等差數列前 10 項的和。對於此等差數列的首項 <math>a</math> 與公差 <math>d</math> 的描述，下列何者正確？</p> <p>① <math>a &gt; 0</math> 且 <math>d &gt; 0</math></p> <p>② <math>a &gt; 0</math> 且 <math>d &lt; 0</math></p> <p>③ <math>a &lt; 0</math> 且 <math>d &gt; 0</math></p> <p>④ <math>a &lt; 0</math> 且 <math>d &lt; 0</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.22	0.02
2*	0.64	0.34	0.94
3	0.14	0.28	0.02
4	0.08	0.16	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.64	鑑別度	0.60
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定等差數列前幾項和的正負大小關係，要求學生從中判斷出手校和公差的正負，評量學生運用等差級數的變化推斷出首項和公差正負的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.60，正確答案為選項 2，通過率為 64%，顯示超過六成的學生已具備運用等差級數的變化推斷出首項和公差正負的能力。</p> <p>2. 有 13% 的學生選擇選項 1 (低分組有 22%)，這些學生可能尚未具備運用等差級數的變化推斷出首項和公差正負的能力。</p> <p>3. 有 14% 的學生選擇選項 3 (低分組有 28%)，這些學生可能尚未具備運用等差級數的變化推斷出首項和公差正負的能力。</p>		
教材地位分析		先備的知識	本題所需的知識
	學習內容		延伸的知識
		<p>N-8-5</p> <p>等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。</p> <p>備註</p> <p>不處理「已知級數和反求首項、項數或公差」。</p>	<p>N-10-6</p> <p>數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。</p>

補救教學  
建議

(一) 等差數列公差對總和的影響

觀察下列等差級數的變化  $a=10$  ,  $d=-2$

$$S_3 = 10 + 8 + 6 = 24$$

$$S_4 = 10 + 8 + 6 + 4 = 28$$

$$S_5 = 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 30$$

$$S_6 = 10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 0 = 30$$

$$S_7 = 10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 0 + (-2) = 28$$

$$S_8 = 10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 0 + (-2) + (-4) = 24$$

.....

可知當公差為負數時，等差級數總和會先變大再變小，但如果公差為正則只會越來越大。

(二) 等差數列首項對總和的影響

觀察下列等差級數的變化  $a=-1$  ,  $d=-2$

$$S_3 = (-1) + (-3) + (-5) = -9$$

$$S_4 = (-1) + (-3) + (-5) + (-7) = -16$$

$$S_5 = (-1) + (-3) + (-5) + (-7) + (-9) = -25$$

.....

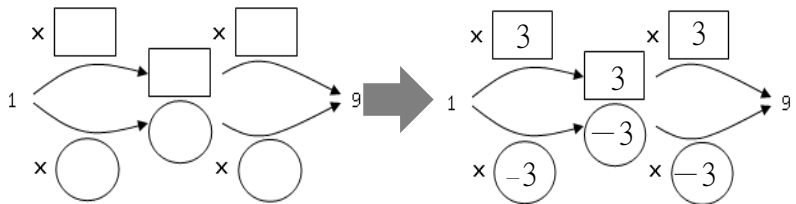
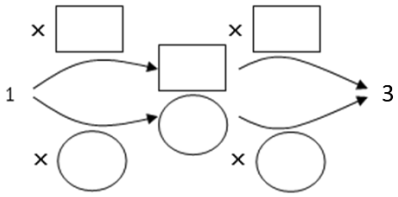
可知當首項為負數時，等差級數總和不可能大大於零。

題號	7		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-8-2 二次方根的近似值：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵。		
試題內容	<p>7. 有一個面積為 1000 平方公分的正方形，請問它的邊長大約是幾公分？</p> <p>① 250</p> <p>② 100</p> <p>③ 32</p> <p>④ 10</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.34	0.00
2	0.19	0.33	0.04
3*	0.51	0.18	0.85
4	0.15	0.15	0.11
未作答	0.00		
通過率	0.51	鑑別度	0.67
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個面積為 1000 的正方形，要求學生從中估算出邊長，評量學生掌握二次方根的近似值估算的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.67，正確答案為選項 3，通過率為 51%，顯示超過五成的學生已具備掌握二次方根的近似值估算的能力。</p> <p>2. 有 15% 的學生選擇選項 1 (低分組有 34%)，這些學生可能尚未具備掌握二次方根的近似值的能力，直接把面積當邊長將 <math>1000/4=250</math>。</p> <p>3. 有 19% 的學生選擇選項 2 (低分組有 33%)，這些學生可能尚未具備掌握二次方根的近似值估算的能力，或運算成 <math>\sqrt{1000} = \sqrt{10 \times 100} = 10 \times 10 = 100</math>。</p> <p>4. 有 15% 的學生選擇選項 4 (低分組有 15%)，這些學生可能尚未具備掌握二次方根的近似值估算的能力。</p>		

		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位分析	學習內容	N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方； $a \neq 0$ 時 $a^0 = 1$ ；同底數的大小比較；指數的運算。 N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」( $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ，其中 $m, n$ 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」( $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ，其中 $m \geq n$ 且 $m, n$ 為非負整數)。	N-8-2 二次方根的近似值：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵。 備註 二次方根的整數部分，可用幾何、十分逼近法、計算機求近似值。	N-10-1 實數：數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算，(2 為無理數的證明★)，科學記號數字的運算。
補救教學建議	<p>(一) 複習指數律</p> <p>舉一些同底指數相乘的例子，以 <math>3^2 \times 3^5</math> 為例，幫學生察覺：</p> $3^2 \times 3^5$ $= (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$ $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 3^{2+5}$ $= 3^7$ <p>(二) 複習平方根的運算並估算平方根</p> <p>1. 舉例說明 <math>\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}</math></p> $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3})$ $= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) = 2 \times 3$ $= (\sqrt{2 \times 3})^2$ <p>2. 舉例說明 <math>2 &lt; \sqrt{8} &lt; 3</math></p> <p>因為 <math>2^2 = 2 \times 2 = 4</math>，<math>(\sqrt{8})^2 = \sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8</math>，<math>3^2 = 3 \times 3 = 9</math>        可得 <math>2^2 &lt; (\sqrt{8})^2 &lt; 3^2</math>，所以 <math>2 &lt; \sqrt{8} &lt; 3</math></p> <p>(三) 以本題來說 <math>\sqrt{1000} = \sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \times 10} = 10 \times \sqrt{10}</math></p> <p>因為 <math>3^2 = 3 \times 3 = 9</math>，<math>(\sqrt{10})^2 = \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10</math>，</p> $4^2 = 4 \times 4 = 16$ <p>可得 <math>3^2 &lt; (\sqrt{10})^2 &lt; 4^2</math>，所以 <math>3 &lt; \sqrt{10} &lt; 4</math>，  <math>10 \times 3 &lt; 10 \times \sqrt{10} &lt; 10 \times 4</math>，故 <math>30 &lt; \sqrt{1000} &lt; 40</math></p>			

題號	8		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。		
試題內容	8. 下列哪個選項中的兩數經化簡後 <u>不是</u> 同類方根？ ① $\sqrt{0.02}$ 和 $\sqrt{72}$ ② $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{12}$ ③ $\sqrt{3}$ 和 $5\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{8}$ 和 $\sqrt{18}$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.26	0.03
2*	0.51	0.16	0.93
3	0.17	0.33	0.02
4	0.15	0.24	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.51	鑑別度	0.77
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b>          本題給定一些二次方根，要求學生找出非同類方根的選項，評量學生是否掌握根式化簡的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b>          1. 本題鑑別度為 0.77，正確答案為選項 2，通過率為 51%，顯示超過五成的學生已具備根式化簡的能力。          2. 有 17% 的學生選擇選項 1 (低分組有 26%)，這些學生可能不知道 <math>\sqrt{0.02}</math> 如何化簡 (或是以為 <math>\sqrt{0.02}</math> 不能化簡)，因此選了此選項。          3. 有 17% 的學生選擇選項 3 (低分組有 33%)，這些學生可能誤解題意，將題目看成「何者是同類方根」，因此選擇不需化簡便呈現同類方根的 <math>\sqrt{3}</math> 和 <math>5\sqrt{3}</math>。          4. 有 15% 的學生選擇選項 4 (低分組有 24%)，這些學生可能不理解同類方根的意義，或是不知道二次方根如何化簡，因此在選項中進行猜測而選到本選項。</p>		

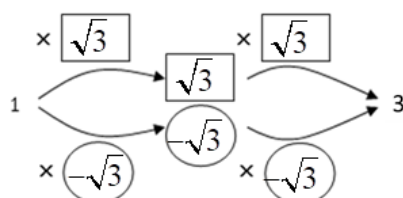
		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位 分析	學習內容	N-7-6 <b>指數的意義</b> ：指數為非負整數的次方； $a \neq 0$ 時 $a^0=1$ ；同底數的大小比較；指數的運算。 N-7-7 <b>指數律</b> ：以數字例表示「同底數的乘法指數律」 ( $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ ，其中 $m, n$ 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」( $a^m / a^n = a^{m-n}$ ，其中 $m \geq n$ 且 $m, n$ 為非負整數)。	N-8-1 <b>二次方根</b> ：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。 備註 可使用乘法公式來化簡的根式，待乘法公式單元再提及。	S-9-6 <b>圓的幾何性質</b> ：圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；圓內接四邊形對角互補；切線段等長。

補救教學 建議	<p>(一) 複習二次方根的意義</p> <p>使用下列圖示，幫助學生理解平方根的意義，平方根就是要找到「經過相同倍率兩次縮放的數字」。</p> <p>1. 先舉完全平方數的例子，下圖中□內可填3，○內可填-3。</p>  <p><math>3 \times 3 = 9 \quad \rightarrow \quad 3 \text{ 的平方是 } 9 \quad \rightarrow \quad 9 \text{ 的平方根是 } 3</math>  <math>(-3) \times (-3) = 9 \quad \rightarrow \quad -3 \text{ 的平方是 } 9 \quad \rightarrow \quad 9 \text{ 的平方根是 } -3</math></p> <p>2. 再舉非完全平方數的例子</p>  <p>(1) 空格先讓學生自己填，找不到就先找最接近的數字，例如：<math>1.7 \times 1.7 = 2.89</math> 或 <math>1.8 \times 1.8 = 3.24</math>，所以□內可先填1.7，○內可先填-1.7。</p> <p>(2) 接著討論其他可能的答案，發現可以更接近3，但無法剛好等於3。</p>
------------	--

(3) 因為找不到「經過相同倍率兩次縮放」剛好是 3 的數，

於是使用新的符號 $\sqrt{3}$ 來代替這個數。

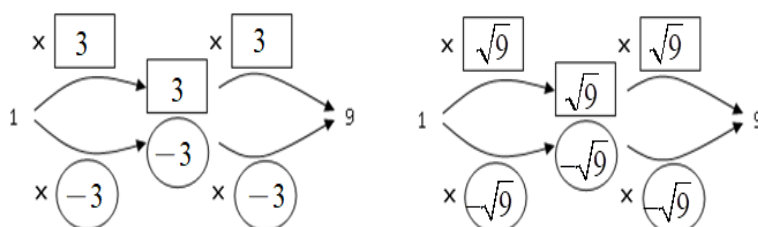
(4) 因此□內可填 $\sqrt{3}$ ，○內可填 $-\sqrt{3}$ 。



## (二) 複習二次方根的化簡

1. 說明 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

(1) 先用完全平方數舉例，例如：9 可表為下列兩種形式的乘積。



因此 $\sqrt{9} = 3$ ，又 $\sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3}$ ， $3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ，故

$$\sqrt{3 \times 3} = \sqrt{3} \times \sqrt{3}。$$

(2) 舉例說明 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ （一樣使用上述圖示輔助讓學生有感，以下省略）

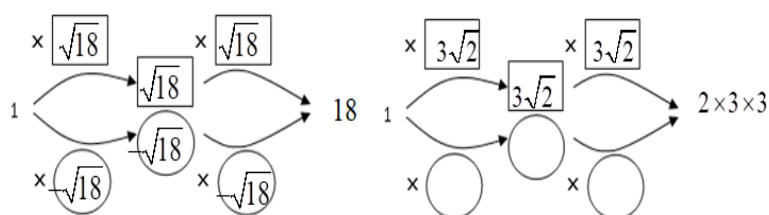
$$6 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3}$$

$$6 = 2 \times 3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3})$$

$$\text{故 } \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

2. 以 $\sqrt{18}$ 為例，說明根式的化簡

(1) 先以圖示輔助，讓學生有感。



(2) 以數字運算再演練一次：



$$\sqrt{18} = \sqrt{3 \times 3 \times 2} = \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

3. 說明  $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$ ，直接舉數字例說明學生較有感。

$$(1) 2 \div 3 = \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

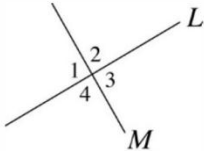
$$2 \div 3 = \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}}$$

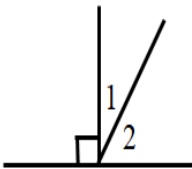
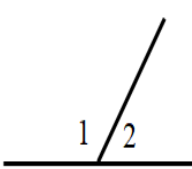
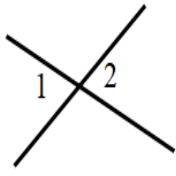
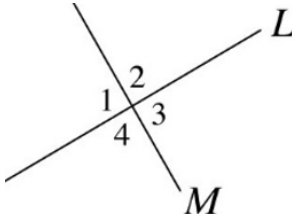
$$\text{故 } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

(2) 以化簡  $\sqrt{0.02}$  為例，說明如何化簡根號內為分數的數。

$$\sqrt{0.02} = \sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

4. 複習同類方根的意涵：以本題為例， $\sqrt{3}$  和  $5\sqrt{3}$  是同類方根，但尚未化簡的根式無法判斷，因此須將選項中所有的根式都化為最簡根式， $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，故選項 2  $\rightarrow \sqrt{2}$  和  $\sqrt{12} (= 2\sqrt{3})$  不是同類方根。

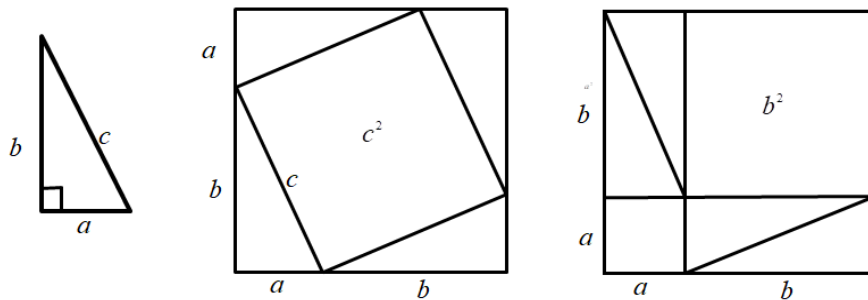
題號	9		
內容領域	空間形狀與座標幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-8-1 角：角的種類；兩個角的關係（互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角）；角平分線的意義。		
試題內容	<p>9. 如圖，直線 <math>L</math> 與 <math>M</math> 交於一點，已知 <math>\angle 2 = 93^\circ</math>。則下列敘述何者<u>錯誤</u>？</p>  <p>① <math>\angle 1 = 87^\circ</math>          ② <math>\angle 1</math> 是 <math>\angle 3</math> 的對頂角          ③ <math>\angle 3 = 87^\circ</math>          ④ <math>\angle 2</math> 與 <math>\angle 4</math> 兩角互補</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.11	0.00
2	0.08	0.21	0.00
3	0.06	0.15	0.00
4*	0.82	0.53	0.99
未作答	0.00		
通過率	0.82	鑑別度	0.46
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b>          本題給定交於一點的兩直線及四個夾角中其中一個角的的角度，要求學生判斷四個角之間的關係，評量學生是否理解對頂角的意義。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b>          1. 本題鑑別度為 0.46，正確答案為選項 4，通過率為 82%，顯示超過八成的學生已經理解對頂角的意義。          2. 有 8% 的學生選擇選項 2 (低分組有 21%)，這些學生可能誤解題意，將題目看成「何者正確」，而本選項「<math>\angle 1</math> 是 <math>\angle 3</math> 的對頂角」最容易判斷為正確選項。</p>		

		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位 分析	學習內容	S-7-1 <b>簡單圖形與幾何符號</b> ：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。 S-7-3 <b>垂直</b> ：垂直的符號；線段的中垂線；點到直線距離的意義。	S-8-1 <b>角</b> ：角的種類；兩個角的關係（互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角）；角平分線的意義。	S-9-1 <b>相似形</b> ：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。 S-9-2 <b>三角形的相似性質</b> ：三角形的相似判定(AA、SAS、SSS)；對應邊長之比=對應高之比；對應面積之比=對應邊長平方之比；利用三角形相似的概念解應用問題；相似符號( $\sim$ )。
補救教學 建議	<p>(一) 複習兩個角之間的關係-互餘、互補、對頂角。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>\angle 1</math>和<math>\angle 2</math>互餘</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>\angle 1</math>和<math>\angle 2</math>互補</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>\angle 1</math>和<math>\angle 2</math>為對頂角</p> </div> </div> <p>(二) 以本題為例，說明交於一點的兩直線所夾的四個角之間的關係。</p> <div style="text-align: center;">  </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 請學生從圖中找出任一組互補的兩個角，確認學生理解兩角互補的概念。</li> <li>2. 請學生找出任一組對頂角，確認學生理解對頂角的意義。</li> <li>3. 由<math>\angle 2 = 93^\circ</math>，請學生算出其他三個角的角角度。</li> </ol>			

題號	10		
內容領域	空間形狀與座標幾何	認知歷程向度	程序執行
學習內容	S-8-6 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。		
試題內容	<p>10. 一個長方形的長為 5 公分，寬為 3 公分，請問對角線長多少公分？</p> <p>① 4 ② <math>2\sqrt{7}</math> ③ <math>\sqrt{34}</math> ④ 8</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.21	0.04
2	0.13	0.29	0.00
3*	0.62	0.23	0.95
4	0.11	0.25	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.62	鑑別度	0.72
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b> 本題給定一長方形的長和寬，要求學生算出長方形的對角線，評量學生是否能掌握畢氏定理的解題。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b> 1. 本題鑑別度為 0.72，正確答案為選項 3，通過率為 62%，顯示超過六成的學生已具備應用畢氏定理進行解題的能力。 2. 有 14% 的學生選擇選項 1 (低分組有 21%)，這些學生可能背誦了畢氏數「3、4、5」，但未看清題目中 3 和 5 在直角三角形中的位置關係，因此選了本選項。 3. 有 13% 的學生選擇選項 2 (低分組有 29%)，這些學生可能在使用畢氏定理解題時發生錯誤，計算 <math>\sqrt{5^2+3}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}</math>。 4. 有 11% 的學生選擇選項 4 (低分組有 25%)，這些學生可能不理解題意，因此直接將長和寬相加，得到 <math>5+3=8</math>。</p>		

		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位 分析	學習內容	S-5-1 三角形與四邊形的性質：操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊相等、對角相等。 S-7-1 簡單圖形與幾何符號：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。	S-8-6 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。	S-9-12 空間中的線與平面：長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係。

- (一) 複習小學學過的長方形性質：有四個直角、對邊等長、對邊平行，對角線等長。
- (二) 複習三角形的性質，確認學生理解何謂直角三角形、鈍角三角形及銳角三角形。
- (三) 複習畢氏定理



補救教學  
建議

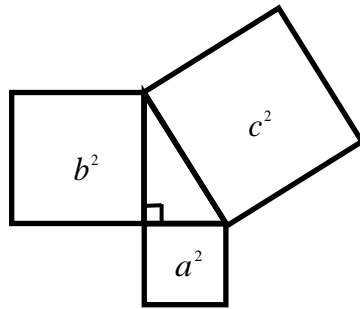
1. 先複習直角三角形。

2. 將四個相同的直角三角形擺成上圖，觀察圖中有大小兩個正方形，其邊長分別為 $(a+b)$ 和 $c$ 。

3. 調整直角三角形的位置，並補上 $a^2$ 、 $b^2$ 這兩個小正方形的邊，發現可以拼成另一個邊長亦為 $a+b$ 的正方形。

4. 觀察上述 2、3 兩個大正方形，由於其邊長皆為 $(a+b)$ ，故面積相等，因此 $a^2 + b^2 + \frac{4 \times a \times b}{2} = c^2 + \frac{4 \times a \times b}{2}$ ，可推得 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

5. 最後歸納一下，並透過下圖說明畢氏定理：  
在直角三角形中，兩股平方和等於斜邊的平方，即  $a^2 + b^2 = c^2$ 。



(四) 以本題為例，說明如何求長方形的對角線長。

1. 請學生畫出一個長方形，長標示為 5、寬標示為 3。
2. 請學生畫出任一條長方形的對角線，詢問學生：「現在你看到哪些形狀？」  
若學生僅回答：「三角形」，則追問：「是哪一種三角形？」
3. 學生發現直角三角形後，幫助學生連結畢氏定理，由其中兩邊(兩股長)求出第三邊(斜邊)， $\sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ 。

題號	11		
內容領域	空間形狀與座標幾何	認知歷程向度	程序執行
學習內容	G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ ；生活上相關問題。		
試題內容	<p>11. 直角坐標平面上有三點 <math>A(3, 4)</math>、<math>B(-5, -2)</math>、<math>C(3, -2)</math>，請問 <math>\triangle ABC</math> 的周長為何？</p> <p>① 24          ② 14          ③ <math>14 + 2\sqrt{2}</math>          ④ <math>2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10}</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.64	0.24	0.98
2	0.10	0.23	0.01
3	0.19	0.35	0.02
4	0.07	0.17	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.64	鑑別度	0.73
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定直角坐標平面上三點，要求學生算出這三點所圍成的三角形周長，評量學生是否能掌握直角坐標系上兩點距離公式。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1.本題鑑別度為 0.73，正確答案為選項 1，通過率為 64%，顯示超過六成的學生已具備運用直角坐標系上兩點距離公式解題的能力。</p> <p>2.有 10%的學生選擇選項 2(低分組有 23%)，這些學生可能不理解題意，且誤用了兩點距離公式，直接將 A、B 兩點的 <math>x</math> 坐標相減、<math>y</math> 坐標相減，得到 6 和 8，<math>6+8=14</math>。</p> <p>3.有 19%的學生選擇選項 3(低分組有 35%)，這些學生可能不會使用兩點距離公式，僅能從坐標平面上三點的位置關係得出<math>\overline{AC}=6</math>、<math>\overline{BC}=8</math>，但是不會算<math>\overline{AB}</math>，於是猜測一個看起來像<math>6+8+\overline{AB}</math>的選項。</p>		

		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位 分析	學習 內容	<p>N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以<math> a-b </math>表示數線上兩點<math>a, b</math>的距離。</p> <p>G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。</p>	<p>G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點<math>A(a, b)</math>和<math>B(c, d)</math>的距離為線段  <math display="block">\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}</math>； 生活上相關問題。</p>	<p>F-9-2 二次函數的圖形與極值：二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪<math>y=ax^2</math>、<math>y=ax^2+k</math>、<math>y=a(x-h)^2</math>、<math>y=a(x-h)^2+k</math>的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線；<math>y=ax^2</math>的圖形與<math>y=a(x-h)^2+k</math>的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。</p>
補救教學 建議		<p>(一) 複習平面直角坐標系：確認學生能正確標示任一點坐標的位置。</p> <p>(二) 複習畢氏定理：畢氏定理需要有直角三角形，而平面直角坐標上很容易製造直角三角形，這部分教師宜幫助學生進行連結。</p> <p>(三) 以本題為例，說明如何幫助學生解題：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 請學生將<math>A(3,4)</math>、<math>B(-5,-2)</math>、<math>C(3,-2)</math>三點分別描繪在直角坐標平面上。</li> <li>2. 接著將<math>A</math>、<math>B</math>、<math>C</math>三點連成三角形，請學生觀察它是哪一種三角形。由於<math>\overline{BC}</math>是水平線、<math>\overline{AC}</math>是鉛直線，因此三角形<math>ABC</math>是直角三角形。</li> <li>3. 詢問學生：「這個三角形有哪些邊長知道？哪些邊長還不知道？」，發現有兩個邊知道（兩股長），斜邊還不知道。</li> <li>4. 直角三角形已知兩股長，如何求出第三邊？引導學生使用畢氏定理解題。</li> </ol>		



題號	12																								
內容領域	資料與不確定性	認知歷程向度	程序執行																						
學習內容	D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。																								
試題內容	<p>12. 下表是某國職棒 2020 年球季單場比賽擊出全壘打數量與場數的統計表，例如：單場擊出剛好 5 支全壘打共有 16 場比賽。</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>全壘打數量 (支)</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>場數 (場)</td> <td>31</td> <td>56</td> <td>56</td> <td>47</td> <td>30</td> <td>16</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> </table> <p>請問 2020 年球季中，單場全壘打合計 4 支以上 (含) 的場數，在總場數中所占的百分率為多少？</p> <p>① 12%</p> <p>② 24%</p> <p>③ 30%</p> <p>④ 76%</p>			全壘打數量 (支)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	場數 (場)	31	56	56	47	30	16	5	4	3	2
全壘打數量 (支)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9															
場數 (場)	31	56	56	47	30	16	5	4	3	2															
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)																								
選項	整體	低分組	高分組																						
1	0.12	0.18	0.05																						
2*	0.57	0.28	0.88																						
3	0.22	0.37	0.05																						
4	0.09	0.16	0.01																						
未作答	0.00																								
通過率	0.57	鑑別度	0.60																						
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定某球季棒球比賽單場擊出全壘打數量與場數的統計表，要求學生算出單場全壘打數 4 支以上之場數佔總場數的比例，評量學生是否掌握統計資料處理(計算相對累積次數)的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1.本題鑑別度為 0.6，正確答案為選項 2，通過率為 57%，顯示近六成的學生已具備統計資料處理(計算相對累積次數)的能力。</p> <p>2.有 12%的學生選擇選項 1(低分組有 18%)，這些學生可能誤解題意，以為是要算 4 支全壘打所佔的比例，因此先求出總場數 250 場後，換算比例 <math>30/250=12\%</math>。</p> <p>3.有 22%的學生選擇選項 3(低分組有 37%)，這些學生可能不理解題意，直接從表格中找到 4 支全壘打的場數有 30 場，</p>																								

	<p>故認為答案是 30。</p> <p>4. 有 9% 的學生選擇選項 4 (低分組有 16%)，這些學生可能誤解題意，計算了未滿 4 支全壘打的場數為 190 場，換算比例 <math>190/250=76\%</math>。</p>																					
教材地位分析	學習內容	<p>先備的知識</p> <p>D-7-1 統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。</p> <p>D-7-2 統計數據：用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。</p>	<p>本題所需的知識</p> <p>D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。</p>	<p>延伸的知識</p> <p>D-9-1 統計數據的分布：全距；四分位距；盒狀圖。</p> <p>D-9-2 認識機率：機率的意義；樹狀圖（以兩層為限）。</p> <p>D-9-3 古典機率：具有對稱性的情境下（銅板、骰子、撲克牌、抽球等）之機率；不具對稱性的物體（圖釘、圓錐、爻杯）之機率探究。</p>																		
		補救教學建議	<p>(一) 複習各種統計圖表，確認學生能解讀以不同形態呈現的資料。</p> <p>(二) 複習累積次數、相對次數、累積相對次數的意義。</p> <p>(三) 以本題為例，說明如何幫助學生解題：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 透過提問確認學生是否能讀懂題目中的統計表。</li> </ol>																			
<table border="1" data-bbox="405 1447 1340 1543"> <tr> <td>全壘打數量(支)</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>場數(場)</td> <td>31</td> <td>56</td> <td>56</td> <td>47</td> <td>30</td> <td>16</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> </table> <p>Q：單場完全沒有出現全壘打的場次有幾場？</p> <p>Q：單場出現最多支的全壘打是幾支？</p> <p>Q：單場出現 4 支全壘打的場次有幾場？</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>2. 請學生計算單場出現 4 支以上(含)全壘打的場次，共 <math>30+16+5+4+3+2=60</math> 場。</li> <li>3. 詢問學生「若是要知道上述這 60 場占總場數的百分率，那麼還需要什麼資料？」，確認學生知道還需要計算總場次，共 250 場。</li> <li>4. 計算百分率，<math>60/250=24\%</math>。</li> </ol>	全壘打數量(支)		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	場數(場)	31	56	56	47	30	16	5	4	3
全壘打數量(支)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9												
場數(場)	31	56	56	47	30	16	5	4	3	2												

題號	13		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	A-8-6 一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。		
試題內容	<p>13. 「有一個長方形的長是寬的 3 倍少 2 公分，其面積為 65 平方公分，請問此長方形的寬為何？」假設長方形的寬為 <math>x</math> 公分，依題意所列出的一元二次方程式為何？</p> <p>① <math>2x + 2(3x + 2) = 65</math></p> <p>② <math>2x + 2(3x - 2) = 65</math></p> <p>③ <math>x(3x + 2) = 65</math></p> <p>④ <math>x(3x - 2) = 65</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.17	0.00
2	0.11	0.27	0.01
3	0.10	0.20	0.03
4*	0.72	0.37	0.97
未作答	0.00		
通過率	0.72	鑑別度	0.60
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一長方形中長和寬的數量關係及其面積，要求學生依題意列式，評量學生是否具備在具體情境中列出一元二次方程式的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.6，正確答案為選項 4，通過率為 72%，顯示超過七成的學生已具備在具體情境中列出一元二次方程式的能力。</p> <p>2. 有 11% 的學生選擇選項 2(低分組有 27%)，這些學生可能誤解題意，在求出長為 <math>3x - 2</math> 之後，將面積誤認為是周長，因此列式 <math>2x + 2(3x - 2) = 65</math>。</p> <p>3. 有 10% 的學生選擇選項 3(低分組有 20%)，這些學生可能在解讀「長是寬的 3 倍少 2 公分」時發生錯誤，誤認為長是 <math>3x + 2</math>，因此列式 <math>x(3x + 2) = 65</math>。</p>		

教材地位 分析	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	A-8-6 一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。	F-9-1 二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。
補救教學 建議	<p>(一) 複習一元一次方程式的意義：以符號代表數、一元一次式、一元一次方程式。</p> <p>(二) 複習一元二次方程式的列式。</p> <p>(三) 以本題為例，說明如何幫助學生解題：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>以提問確認學生理解題意。 師：題目中和長方形有關的東西有哪些？ 生：長、寬、面積 師：那麼有哪些已經知道了？ 生：知道面積是 65。 師：還知道什麼嗎？ 生：知道長是寬的 3 倍少 2 公分。</li> <li>請學生將「長是寬的 3 倍少 2 公分」翻譯為數學式，長=寬<math>\times</math>3-2。</li> <li>依題意設寬為 <math>x</math> 公分，將「長=寬<math>\times</math>3-2」算式中的寬替換成 <math>x</math>，那麼算式會變成「長=<math>x\times</math>3-2」，簡記為「長=<math>3x-2</math>」。</li> <li>師：現在長、寬、面積都有了，接下來就要來「拉關係」了，這者之間有什麼關係嗎？ 生：長乘以寬等於面積。 師：很好，請寫下來：長<math>\times</math>寬=面積，另外我們知道長=<math>3x-2</math>、寬=<math>x</math>，面積=65(教師在黑板上一一寫下)，接下來請把長、寬、面積替換成他們所代表的數字或符號。 生：<math>(3x-2)\times x=65</math>。 師：接下來我們可以省略乘號，將列式簡記為<math>x(3x-2)=65</math>。</li> </ol>		

題號	14		
內容領域	資料與不確定性	認知歷程向度	概念理解
學習內容	D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。		
試題內容	<p>14. 下表為某公司員工月薪的累積相對次數分配折線圖，月薪的單位為萬元。已知該公司全體員工總共有 50 人，請問月薪 4 萬元以上（含 4 萬元）、未滿 5 萬元（不含 5 萬元）的員工人數共有多少人？</p> <p>① 8 ② 14 ③ 16 ④ 44</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.50	0.19	0.82
2	0.14	0.26	0.04
3	0.24	0.37	0.10
4	0.11	0.18	0.04
未作答	0.00		
通過率	0.50	鑑別度	0.64
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b> 本題給定某公司月薪的累積相對次數分配折線圖，要求學生判斷某月薪區間的人數，評量學生是否理解累積相對次數折線圖的意義。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本題鑑別度為 0.64，正確答案為選項 1，通過率為 50%，顯示有五成的學生已判讀累積相對次數折線圖的能力。</li> <li>2. 有 14% 的學生選擇選項 2（低分組有 26%），這些學生可能誤解題意，以為只問具備月薪 4 萬以上的人數，得 <math>50 \times (100 - 72)\% = 14</math>（人）</li> <li>3. 有 24% 的學生選擇選項 3（低分組有 37%），這些學生可能誤解題意，以為求具備此種月薪的人數比例：<math>88\% - 72\% = 16\%</math></li> <li>4. 有 11% 的學生選擇選項 4（低分組有 18%），這些學生可能誤</li> </ol>		

	解題意，以為只問月薪未滿 5 萬的人數，得 $50 \times 88\% = 44$ (人)																																											
教材地位 分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識																																								
	學習 內容	<p>D-7-1 <b>統計圖表</b>：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。</p> <p>D-7-2 <b>統計數據</b>：用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「<math>\Sigma</math>」鍵計算平均數。</p>	<p>D-8-1 <b>統計資料處理</b>：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。</p>	<p>D-9-1 <b>統計數據的分布</b>：全距；四分位距；盒狀圖。 <b>備註</b>： D-7-2 處理單一統計量（平均數、中位數、眾數）表達數據，本條目則傳達以盒狀圖描述數據的集中程度。</p>																																								
補救教學 建議	<p>(一) 複習累積相對次數：</p> <p>下表為大山國中三年級數學競試的次數分配表，製作出累積相對次數分配表的教學過程如下：</p> <p>① 複習相對次數的意義及換算方式，接著在「次數(人)」右邊新增「相對次數(%)」欄位，並請學生完成。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>大山國中三年級數學競試 次數分配表</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>成績(分)</th> <th>次數(人)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>40-50</td><td>45</td></tr> <tr><td>50-60</td><td>55</td></tr> <tr><td>60-70</td><td>60</td></tr> <tr><td>70-80</td><td>36</td></tr> <tr><td>80-90</td><td>30</td></tr> <tr><td>90-100</td><td>24</td></tr> <tr><td>合計</td><td>250</td></tr> </tbody> </table> </div> <div style="text-align: center;"> <p>大山國中三年級數學競試相對 次數分配表</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>成績(分)</th> <th>次數(人)</th> <th>相對次數(%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>40-50</td><td>45</td><td>18</td></tr> <tr><td>50-60</td><td>55</td><td>22</td></tr> <tr><td>60-70</td><td>60</td><td>24</td></tr> <tr><td>70-80</td><td>36</td><td>14.4</td></tr> <tr><td>80-90</td><td>30</td><td>12</td></tr> <tr><td>90-100</td><td>24</td><td>9.6</td></tr> <tr><td>合計</td><td>250</td><td>100</td></tr> </tbody> </table> </div> </div> <p>② 複習「累積」的概念及算法，教師示範累積次數的計算方式，請學生練習相對累積次數，並記入累積相對次數(%)該欄中，完成累積相對次數分配表如下表：</p> <p style="text-align: center;"><b>大山國中三年級數學競試相對次數分配表</b></p>				成績(分)	次數(人)	40-50	45	50-60	55	60-70	60	70-80	36	80-90	30	90-100	24	合計	250	成績(分)	次數(人)	相對次數(%)	40-50	45	18	50-60	55	22	60-70	60	24	70-80	36	14.4	80-90	30	12	90-100	24	9.6	合計	250	100
成績(分)	次數(人)																																											
40-50	45																																											
50-60	55																																											
60-70	60																																											
70-80	36																																											
80-90	30																																											
90-100	24																																											
合計	250																																											
成績(分)	次數(人)	相對次數(%)																																										
40-50	45	18																																										
50-60	55	22																																										
60-70	60	24																																										
70-80	36	14.4																																										
80-90	30	12																																										
90-100	24	9.6																																										
合計	250	100																																										

成績(分)	次數(人)	相對次數(%)	累積相對次數(%)	
40~50	45	18	18	←18
50~60	55	22	40	←18 + 22=40
60~70	60	24	64	←40 + 24=64
70~80	36	14.4	78.4	←64 + 14.4=78.4
80~90	30	12	90.4	←78.4 + 12=90.4
90~100	24	9.6	100	←90.4 + 9.6=100
合計	250	100		

(二) 複習累積相對次數分配折線圖：

我們以右表為例說明累積相對次數分配折線圖的繪製方法。

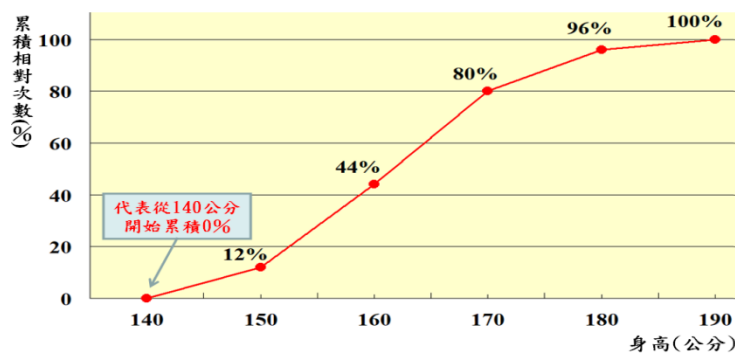
大山國中 203 班學生身高累積相對次數分配表

①定義橫軸：用來表示身高，在橫軸末端標示「身高(公分)」，並標示出各組的刻度，如 140、150、160、170、180、190 等。

身高(公分)	次數(人)	累積次數(人)	累積相對次數(%)
140~150	3	3	12
150~160	8	11	44
160~170	9	20	80
170~180	4	24	96
180~190	1	25	100
合計	25		

②定義縱軸：用來表示分配的累積相對次數，在縱軸末端標示「累積相對次數(%)」，並分別標示出適當的刻度，如 0、20、40、60、80、100。

③標點及連線：將各組的上限與對應累積次數(人)設為一個點的  $x$ 、 $y$  坐標，得到 5 個點坐標(150,12)、(160,44)、(170,80)、(180,96)、(190,100)，連同第一組的下限 140 公分與累積 0% 所得到的點坐標(140,0)，代表從 140 公分起開始累積，再將這些點由左到右依序以線段連接。



大山國中二年三班學生身高累積相對次數分配折線圖

④報讀累積相對次數分配折線圖：

例如：未滿 180 公分的同學佔全體 80%，未滿 160 公分的同學佔全體 44%，故 160 公分以上且未滿 180 公分佔全體的  $(80 - 44)\% = 36\%$

內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。		
試題內容	<p>15. 下列何者為一元二次方程式 <math>x^2 - 4x + 1 = 0</math> 的解？            (一元二次方程式 <math>ax^2 + bx + c = 0</math> 的解為 <math>x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}</math>)</p> <p>① <math>x = -2 + \sqrt{3}</math> 或 <math>x = -2 - \sqrt{3}</math>            ② <math>x = -2 + \sqrt{5}</math> 或 <math>x = -2 - \sqrt{5}</math>            ③ <math>x = 2 + \sqrt{3}</math> 或 <math>x = 2 - \sqrt{3}</math>            ④ <math>x = 2 + \sqrt{5}</math> 或 <math>x = 2 - \sqrt{5}</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.25	0.04
2	0.17	0.29	0.03
3*	0.55	0.25	0.91
4	0.12	0.20	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.55	鑑別度	0.66
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明            本題給定一個一元二次方程式及求解的公式，要求學生利用公式解求解，評量學生是否具備利用公式解求一元二次方程式解的能力。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明            1. 本題鑑別度為 0.66，正確答案為選項 3，通過率為 55%，顯示超過五成的學生已具備利用公式解求一元二次方程式解的能力            2. 有 16% 的學生選擇選項 1 (低分組有 25%)，這些學生錯看公式：<math>\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}</math>，故得  <math display="block">x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}</math>            3. 有 17% 的學生選擇選項 2 (低分組有 29%)，這些學生錯看公</p>		



	<p>式：<math>\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}</math>，且 <math>b^2 - 4ac</math> 變號錯誤，得</p> $x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 + 4 \times 1 \times 1}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$ <p>4. 有 12% 的學生選擇選項 4 (低分組有 20%)，這些學生 <math>b^2 - 4ac</math> 變號錯誤，得到 <math>x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 + 4 \times 1 \times 1}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}</math></p>
--	--

教材地位 分釋習內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。	

補救教學 建議	<p>下面以「解 <math>x^2 + 5x + 2 = 0</math>」為例，說明如何幫助學生解題：</p> <p>(一) 複習配方法</p> <p>例如：<math>x^2 + 2x + \square = (x + \triangle)^2 \rightarrow \square = 1^2 = 1, \triangle = 1</math></p> $x^2 + 3x + \square = (x + \triangle)^2 \rightarrow \square = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \triangle = \frac{3}{2}$ <p>(二) 說明利用配方法解 <math>x^2 + 5x + 2 = 0</math></p> $x^2 + 5x = -2 \quad \text{先將常數項移到等號右邊}$ $x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \text{等號兩邊同時加}\left(\frac{5}{2}\right)^2$ $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \quad \left(x + \frac{5}{2}\right) \text{ 是 } \frac{17}{4} \text{ 的平方根}$ $x + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$ <p>(三) 說明利用公式解 <math>x^2 + 5x + 2 = 0</math></p> <p>一元二次方程式 <math>ax^2 + bx + c = 0</math> 的解為 <math>x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}</math></p> $x^2 + 5x + 2 = 0 \rightarrow a = 1, b = 5, c = 2$ <p>先計算根號裡面的部分：<math>b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 2 = 17 &gt; 0</math> (有兩相異實根)</p> $\text{所以 } x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2 \times 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$
------------	--

題號	16
----	----

內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-8-1 二次式的乘法公式： $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ； $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ； $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ； $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ 。		
試題內容	16. 計算 $2021^2 - 2 \times 2021 \times 21 + 20 \times 22 = ?$ ① 3999 ② 3999979 ③ 3999999 ④ 4000881		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.11	0.01
2	0.23	0.32	0.08
3*	0.53	0.30	0.84
4	0.17	0.27	0.06
未作答	0.01		
通過率	0.53	鑑別度	0.55
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b>            本題給定一個隱含<math>(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2</math>；<math>(a + b)(a - b) = a^2 - b^2</math>樣式的算式，要求學生利用乘法公式計算算式的值，評量學生應用二次式的乘法公式計算的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b>            1. 本題鑑別度為 0.55，正確答案為選項 3，通過率為 53%，顯示超過五成的學生已具備利用二次式的乘法公式計算的能力。            2. 有 23% 的學生選擇選項 2(低分組有 32%)，這些學生計算錯誤如下：  <math display="block">\begin{aligned} &amp; 2021^2 - 2 \times 2021 \times 21 + 20 \times 22 \\ &amp;= 2021^2 - 2 \times 2021 \times 21 + (21 - 1) \times 21 \\ &amp;= 2021^2 - 2 \times 2021 \times 21 + 21^2 - 21 \\ &amp;= (2021 - 21)^2 - 21 = 3999979 \end{aligned}</math>            3. 有 17% 的學生選擇選項 4(低分組有 27%)，這些學生計算錯</p>		

	誤如下： $2021^2 - 2 \times 2021 \times 21 + 20 \times 22$ $= 2021^2 - 2 \times 2021 \times 21 + (21-1) \times (21+1)$ $= [2021^2 - 2 \times 2021 \times 21] + 21^2 + 21^2 - 1^2$ $= (2021-21)^2 + 21^2 \times 2 - 1 = 4000881$			
教材地位 分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。	A-8-1 二次式的乘法公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ； $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ； $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ； $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 。	
補救教學 建議	(一) 下面以「 $2019^2 - 2 \times 2019 \times 19 + 19^2 = ?$ 」為例，說明如何運用 $(a-b)^2$ 幫助解題： ① 透過乘法對加法的分配律，引入 $(a-b)^2$ 的公式 $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ② 將 $a = 2019$ ， $b = 19$ ，代入公式右邊 $a^2 - 2ab + b^2$ ，得到 $2019^2 - 2 \times 2019 \times 19 + 19^2$ ，可改寫為 $(2019-19)^2 = 2000^2 = 4000000$ (二) 下面以「 $201 \times 199 = ?$ 」為例，說明如何運用 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 幫助解題： ① 透過乘法對加法的分配律，引入 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 的公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ 幫助學生察覺若以 $a = 201$ ， $b = 1$ 代入，可得 $201 \times 199 = (200+1)(200-1) = 200^2 - 1^2 = 40000 - 1 = 39999$ (三) 下面以「 $2019^2 - 2 \times 2019 \times 19 + 20 \times 18 = ?$ 」為例，說明如何幫助學生解題： $2019^2 - 2 \times 2019 \times 19 + 20 \times 18$ $= 2019^2 - 2 \times 2019 \times 19 + (19+1)(19-1)$ $= 2019^2 - 2 \times 2019 \times 19 + 19^2 - 1^2$ $= (2019-19)^2 - 1$ $= 4000000 - 1$ $= 3999999$			

內容領域	代數與函數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	A-8-2 多項式的意義：一元多項式的定義與相關名詞（多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪）。		
試題內容	<p>17. 關於多項式 <math>2x^3 - 6x + 1</math> 的敘述，下列選項何者正確？</p> <p>① <math>x</math> 項的係數是 6</p> <p>② <math>x^2</math> 項的係數是 0</p> <p>③ 此多項式是二次多項式</p> <p>④ 將此多項式升冪排列後可表為 <math>1 + 2x^3 - 6x</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.20	0.31	0.04
2*	0.51	0.23	0.84
3	0.19	0.27	0.10
4	0.10	0.18	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.51	鑑別度	0.61
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個 <math>x</math> 的三次多項式，要求學生判斷此多項式的相關名詞（係數、次數、升冪排列...），評量學生是否理解多項式的意義。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.61，正確答案為選項 2，通過率為 51%，顯示超過五成的學生已理解多項式的意義。</p> <p>2. 有 20% 的學生選擇選項 1 (低分組有 31%)，這些學生可能忽略 <math>x</math> 項係數的性質符號。</p> <p>3. 有 19% 的學生選擇選項 3 (低分組有 27%)，這些學生可能誤以為最前項的係數代表多項式的次數。</p> <p>4. 有 10% 的學生選擇選項 4 (低分組有 18%)，這些學生可能誤以為升冪排列指的是將多項式各項次數不管性質符號由小排到大故得 <math>1 + 2x^3 - 6x</math>。</p>		

		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位 分析	學習內容	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。	A-8-2 多項式的意義：一元多項式的定義與相關名詞(多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪)。	
補救教學 建議	<p>(一) 複習「項、係數、次數」的意義</p> <p>例如：多項式 <math>3x^2 + 4x - 1</math> 的最高次數為二次，故為二次多項式，項數為 3。二次項為 <math>3x^2</math>，一次項為 <math>4x</math>，常數項為 <math>-1</math>。各項係數分別為：二次項係數為 3，一次項為 4，常數項為 <math>-1</math>，係數除了數字部份也要考慮其性質符號。</p> <p>(二) 以多項式 <math>4x + 3x^2 - 1</math> 為例，幫助學生認識多項式的排列：</p> <p>① 升冪排列：將最低次項(常數項)<math>-1</math>、一次項 <math>4x</math>、二次項 <math>3x^2</math> 依次由最低次項排到最高次項得到 <math>-1 + 4x + 3x^2</math>。</p> <p>② 降冪排列：將最高次項(二次項)<math>3x^2</math>、一次項 <math>4x</math>、常數項 <math>-1</math> 依次由最高次項排到最低次項得到 <math>3x^2 + 4x - 1</math>。</p>			

題號	18		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-3 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。		
試題內容	<p>18. 已知 <math>ax^2 + bx + c</math> 除以 <math>2x + 3</math> 的商式為 <math>3x - 1</math>、餘式為 <math>2</math>，其中 <math>a</math>、<math>b</math>、<math>c</math> 均為整數。請問 <math>(ax^2 + bx + c) + (2x^2 + 3x + 4)</math> 除以 <math>2x + 3</math> 的商式和餘式為下列何者？</p> <p>① 商式為 <math>4x + 3</math>、餘式為 <math>2</math></p> <p>② 商式為 <math>4x + 3</math>、餘式為 <math>6</math></p> <p>③ 商式為 <math>4x - 1</math>、餘式為 <math>2</math></p> <p>④ 商式為 <math>4x - 1</math>、餘式為 <math>6</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.24	0.03
2	0.18	0.29	0.03
3	0.21	0.29	0.09
4*	0.45	0.17	0.84
未作答	0.01		
通過率	0.45	鑑別度	0.68
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個含有未知係數的被除式、除式、商式及餘式，要求學生計算另一個被除式除以原除式的商式及餘式，評量學生是否具備被除式為二次之多項式的除法運算能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.68，正確答案為選項 4，通過率為 45%，顯示超過四成的學生已具備被除式為二次之多項式的除法運算能力。</p> <p>2. 有 14% 的學生選擇選項 1 (低分組有 24%)，這些學生可能計算如下：</p> $\begin{array}{r} x+4 \\ 2x+3 \overline{) 2x^2+3x+4} \\ \underline{2x^2+3x} \phantom{+4} \\ 4 \phantom{+4} \end{array}$ <p>得新商式為 <math>(3x-1) + (x+4) = 4x+3</math>， 新餘式為原餘式 2</p>		

	<p>3.有 18%的學生選擇選項 2(低分組有 29%)，這些學生可能計算如下：</p> $  \begin{array}{r}  x+4 \\  2x+3 \overline{) 2x^2+3x+4} \\  \underline{2x^2+3x} \phantom{+4} \\  4  \end{array}  $ <p>得新商式為 <math>(3x-1)+(x+4)=4x+3</math>，</p> <p>新餘式為原 <math>2+4=6</math></p> <p>4.有 21%的學生選擇選項 3(低分組有 29%)，這些學生可能計算如下：</p> $  \begin{array}{r}  x \\  2x+3 \overline{) 2x^2+3x+4} \\  \underline{2x^2+3x} \phantom{+4} \\  4  \end{array}  $ <p>得新商式為 <math>(3x-1)+x=4x-1</math>，新餘式為原餘式 2</p>			
教材地位分析	學習內容	<p>先備的知識</p> <p>無</p>	<p>本題所需的知識</p> <p>A-8-3          多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。          備註          不涉及使用分離係數法。</p>	<p>延伸的知識</p> <p>無</p>
補救教學建議	<p>(一) 幫助學生複習多項式的乘法，例如：<math>5x(x+2)=5x^2+10x</math></p> <p>(二) 幫助學生複習單項式對單項式的除法，例如：</p> $6x^2 \div 2x = \frac{6 \cdot x \cdot x}{2 \cdot x} = 3x$ <p>(三) 幫助學生複習整數除法直式算則舊經驗，然後再將方法類比至多項式除法，比如：</p> $  \begin{array}{r}  13 \\  12 \overline{) 158} \\  \underline{12} \phantom{0} \\  38 \\  \underline{36} \\  2  \end{array}  \rightarrow  \begin{array}{r}  1 \times 10 + 3 \\  1 \times 10 + 2 \overline{) 1 \times 10^2 + 5 \times 10 + 8} \\  \underline{1 \times 10^2 + 2 \times 10} \phantom{+ 8} \\  3 \times 10 + 8 \\  \underline{3 \times 10 + 6} \\  2  \end{array}  \rightarrow  \begin{array}{r}  1x + 3 \\  1x + 2 \overline{) 1x^2 + 5x + 8} \\  \underline{1x^2 + 2x} \phantom{+ 8} \\  3x + 8 \\  \underline{3x + 6} \\  2  \end{array}  $ <p>(四) 說明「餘式」的限制：運算時先將被除式與除式依降冪排列，</p>			

進行除法運算，直到餘式的次數比除式的次數低或餘式為 0。

(五) 下面以「 $(4x^2 + x - 3) \div (x + 2)$ 」為例，說明如何幫助學生解題。

$$\begin{array}{r}
 \phantom{x+2} \overline{4x-7} \\
 x+2 \overline{)4x^2+x-3} \\
 \underline{4x^2+8x} \phantom{-3} \\
 -7x-3 \\
 \underline{-7x-14} \\
 11
 \end{array}$$

①  $4x^2 \div x = 4x$       ④  $-7x \div x = -7$   
 ②  $4x(x+2) = 4x^2+8x$       ⑤ 每次降一項  
 ③  $x-8x = -7x$       ⑥ 餘式的次數小於除式的次數

(六) 複習除法原理：被除式 = 除式  $\times$  商式 + 餘式

(七) 底下以「已知多項式  $A = ax^2 + bx + c$ ，多項式  $B = 2x^2 - x + 1$ 。若多項式 A 除以  $(2x - 1)$  的商式為  $(3x + 1)$ ，餘式為 3，請問多項式  $(A + B)$  除以  $(2x - 1)$  的商式及餘式為何？」說明如何幫助學生解題：

多項式  $B = 2x^2 - x + 1$  除以  $(2x - 1)$  的商式為  $x$ ，餘式為 1。

依除法原理將 A、B 改寫為：

$$A = ax^2 + bx + c = (2x - 1)(3x + 1) + 3 \dots\dots ①$$

$$B = 2x^2 - x + 1 = (2x - 1) \cdot x + 1 \dots\dots\dots ②$$

① + ② 得到

$$A + B =$$

$$(2x - 1) \cdot x + 1 + (2x - 1)(3x + 1) + 3$$

$$= (2x - 1)(x + 3x + 1) + (1 + 3)$$

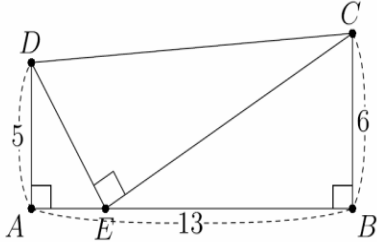
$$= (2x - 1)(4x + 1) + 4$$

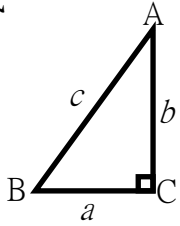
故得到商式為  $(4x + 1)$ ，餘式為 4



題號	19		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	A-8-6 一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。		
試題內容	<p>19. 已知 <math>x = -3</math> 是方程式 <math>(ax + 1)(ax + 2) = 7x^2 - x - 10</math> 的一個解，其中 <math>a</math> 為整數。則 <math>x = -3</math> 也是下列哪個一元二次方程式的解？</p> <p>① <math>(ax + 1)(ax + 2) = 56</math></p> <p>② <math>(ax + 1)(ax + 2) = 50</math></p> <p>③ <math>(ax + 1)(ax + 2) = -50</math></p> <p>④ <math>(ax + 1)(ax + 2) = -56</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.48	0.20	0.87
2	0.19	0.29	0.05
3	0.18	0.28	0.05
4	0.14	0.22	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.48	鑑別度	0.67
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個含有未知數係數的一元二次方程式及其中一解，要求學生判斷該解亦為哪一個方程式的解，評量學生是否理解一元二次方程式及其解的意義。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.67，正確答案為選項 1，通過率為 48%，顯示四成五的學生已理解一元二次方程式及其解的意義。</p> <p>2. 有 19% 的學生選擇選項 2 (低分組有 29%)，這些學生可能等號右邊計算如下：  <math>7x^2 - x - 10</math> 代入 <math>x = -3</math> 得 <math>7 \times 9 - 3 - 10 = 50</math>，故選此答案。</p> <p>3. 有 18% 的學生選擇選項 3 (低分組有 28%)，這些學生可能等號右邊計算如下：  <math>7x^2 - x - 10</math> 代入 <math>x = -3</math> 得 <math>7 \times (-9) + 3 + 10 = -50</math>，故選此答案。</p> <p>4. 有 14% 的學生選擇選項 4 (低分組有 22%)，這些學生可能等號右邊計算如下：  <math>7x^2 - x - 10</math> 代入 <math>x = -3</math> 得 <math>7 \times (-9) - 3 + 10 = -56</math>，故選此答案。</p>		

教材地位 分析	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	無	A-8-6 一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。
補救教學 建議	<p>下面以「2、-5 是否為一元二次方程式 <math>x^2-7x+10=0</math> 的解？」為例，說明如何幫助學生解題。</p> <p>(一) 複習方程式解的意義。 將 <math>x=a</math> 代入方程式之後，能讓等號成立，稱 <math>a</math> 為方程式的解。 一元一次方程式「<math>x-1=0</math>」， 將 <math>x=1</math> 代入得到 <math>1-1=0</math>，會讓方程式成立， 所以「1」是方程式「<math>x-1=0</math>」的解； 將 <math>x=2</math> 代入得到 <math>2-1\neq 0</math>，方程式不成立， 所以「2」不是方程式「<math>x-1=0</math>」的解。</p> <p>(二) 說明一元二次方程式的解。 一元二次方程式「<math>x^2-7x+10=0</math>」， 將 <math>x=2</math> 代入得到 <math>2^2-7\times 2+10=0</math>，會讓方程式成立， 所以「2」是一元二次方程式「<math>x^2-7x+10=0</math>」的解； 將 <math>x=-5</math> 代入得到 <math>(-5)^2-7\times(-5)+10=70\neq 0</math>，方程式不成立， 所以「-5」不是一元二次方程式「<math>x^2-7x+10=0</math>」的解。</p> <p>(三) 說明「且」與「或」的意義。 2 的倍數：2、4、6、8、10；3 的倍數：3、6、9。 同時是 2 的倍數和 3 的倍數的數是 6，數學上稱 6 為 2 且 3 的倍數。 可以是 2 的倍數， 也可以是 3 的倍數的數有 2、3、4、6、8、9、10。數學上稱這些數為 2 或 3 的倍數。</p> <p>(四) 進一步說明 <math>x^2-7x+10=0</math> 的解。 若已知 <math>x^2-7x+10=(x-2)(x-5)</math>，則 <math>(x-2)(x-5)=0</math>，當 <math>x-2=0</math>，也就是 <math>x=2</math> 代入方程式會讓等號成立，所以 2 是方程式的解；當 <math>x-5=0</math>，也就是 <math>x=5</math> 代入方程式會讓等號成立，所以 5 也是方程式的解，所以 <math>(x-2)(x-5)=0</math> 的解為「<math>x=2</math> 或 <math>x=5</math>」。</p> <p>(五) 再以「已知 <math>x=1</math> 是方程式 <math>(ax-1)(x+2)=2x^2+3x+1</math> 的一個解，請問另一解為何？」為例，說明如何幫助學生解題。 <math>(ax-1)(x+2)=2x^2+3x+1</math> 代入 <math>x=1</math>，得 <math>(a-1)(1+2)=2+3+1</math>，<math>(a-1)\times 3=6</math>，<math>a=3</math> <math>(3x-1)(x+2)=2x^2+3x+1</math>，<math>3x^2+5x-2=2x^2+3x+1</math>， <math>x^2+2x-3=0</math> <math>(x+3)(x-1)=0</math>，<math>x=-3</math> 或 <math>1</math>，故另一根為 <math>x=-3</math></p>		

題號	20		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。		
試題內容	<p>20. 如下圖，<math>\overline{AB} = 13</math>、<math>\overline{BC} = 6</math>、<math>\overline{AD} = 5</math>，且 <math>\angle A = \angle B = \angle DEC = 90^\circ</math>。 求 <math>\overline{AE}</math> 和 <math>\overline{EB}</math> 的長度差為何？</p>  <p>① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.23	0.09
2*	0.45	0.28	0.69
3	0.19	0.25	0.11
4	0.19	0.24	0.11
未作答	0.01		
通過率	0.45	鑑別度	0.42
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明 本題給定含有直角的梯形及直角三角形的幾何圖形，要求學生算出兩長度的差，評量學生應用畢氏定理列式、解一元二次方程式的能力。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明 1. 本題鑑別度為 0.42，正確答案為選項 2，通過率為 45%，顯示超過四成的學生已具備應用畢氏定理列式、解一元二次方程式的能力。 2. 有 17% 的學生選擇選項 1 (低分組有 23%)，這些學生可能在應用畢氏定理列式及解方程式上的能力仍有不足。</p>		

	<p>3.有 19%的學生選擇選項 3(低分組有 25%)，這些學生可能在應用畢氏定理列式及解方程式上的能力仍有不足。</p> <p>4.有 19%的學生選擇選項 4(低分組有 24%)，這些學生可能在應用畢氏定理列式及解方程式上的能力仍有不足。</p>							
教材地位分析	學習內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識				
		<p>A-7-3 一元一次方程式的解法與應用；等量公理；移項法則；驗算；應用問題。</p>	<p>A-8-7 一元二次方程式的解法與應用；利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。</p>					
補救教學建議	<p>(一) 複習畢氏定理。該題重點在解一元二次方程式，因此畢氏定理基本複習即可。</p> <p>在直角三角形中，假設斜邊長度為 <math>c</math>，兩股長度分別為 <math>a</math> 和 <math>b</math>，則 <math>c^2=a^2+b^2</math>。</p>  <p>(二) 複習利用因式分解解一元二次方程式。</p> <p>1. 因式分解解一元二次方程式概念。</p> <p>若兩數 A 跟 B 的乘積為 0，則 A 等於 0 或 B 等於 0。因此一元二次方程式 <math>(ax+b)(cx+d)=0</math> 的解有兩個，分別為一元一次方程式 <math>ax+b=0</math> 的解或 <math>cx+d=0</math> 的解，亦即解為 <math>x=-\frac{b}{a}</math> 或 <math>x=-\frac{d}{c}</math>。</p> <p>2. 舉例說明。</p> <p>利用因式分解求 <math>2x^2-3x-5=0</math> 的解。</p> <p>常數項可分解成 <math>-5=(-1)\times 5=1\times(-5)</math></p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>\begin{array}{r} x \quad -1 \\ 2x \quad \times \quad 5 \\ \hline 5x-2x=3x \end{array}</math></td> <td style="text-align: center;"><math>\begin{array}{r} x \quad 5 \\ 2x \quad \times \quad -1 \\ \hline -x+10x=9x \end{array}</math></td> <td style="text-align: center;"><math>\begin{array}{r} x \quad 1 \\ 2x \quad \times \quad -5 \\ \hline -5x+2x=-3x \end{array}</math></td> <td style="text-align: center;"><math>\begin{array}{r} x \quad 5 \\ 2x \quad \times \quad -1 \\ \hline x-10x=-9x \end{array}</math></td> </tr> </table> <p>解： <math>2x^2-3x-5</math> 的因式分解為 <math>(x+1)(2x-5)</math>，因此方程式 <math>2x^2-3x-5=0</math> 可寫成 <math>(x+1)(2x-5)=0</math> 有兩個解，分別為 <math>x+1=0</math> 或 <math>2x-5=0</math> 的解，亦即解為 <math>x=-1</math> 或 <math>x=\frac{5}{2}</math>。</p>				$\begin{array}{r} x \quad -1 \\ 2x \quad \times \quad 5 \\ \hline 5x-2x=3x \end{array}$	$\begin{array}{r} x \quad 5 \\ 2x \quad \times \quad -1 \\ \hline -x+10x=9x \end{array}$	$\begin{array}{r} x \quad 1 \\ 2x \quad \times \quad -5 \\ \hline -5x+2x=-3x \end{array}$	$\begin{array}{r} x \quad 5 \\ 2x \quad \times \quad -1 \\ \hline x-10x=-9x \end{array}$
	$\begin{array}{r} x \quad -1 \\ 2x \quad \times \quad 5 \\ \hline 5x-2x=3x \end{array}$	$\begin{array}{r} x \quad 5 \\ 2x \quad \times \quad -1 \\ \hline -x+10x=9x \end{array}$	$\begin{array}{r} x \quad 1 \\ 2x \quad \times \quad -5 \\ \hline -5x+2x=-3x \end{array}$	$\begin{array}{r} x \quad 5 \\ 2x \quad \times \quad -1 \\ \hline x-10x=-9x \end{array}$				

(三) 以本題目說明解題步驟

$$\text{假設 } \overline{AE} = x \text{、} \overline{EB} = 13 - x$$

直角三角形→畢氏定理

$$\overline{DE}^2 = 5^2 + x^2 \text{，} \overline{CE}^2 = 6^2 + (13 - x)^2 \text{，}$$

$$\overline{DC}^2 = 13^2 + (6 - 5)^2 = \overline{DE}^2 + \overline{CE}^2$$

$$13^2 + (6 - 5)^2 = 5^2 + x^2 + 6^2 + (13 - x)^2$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

$$(x - 3)(x - 10) = 0$$

$$x = 3 \text{ 或 } x = 10$$

$$\therefore \text{相差 } 10 - 3 = 7$$

題號	21		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。		
試題內容	<p>21. 已知 <math>(3x-5)(3x-1)+(1-3x)(2x+a)=(x-2)(x-1)-(1-x)(2x-b)</math>，其中 <math>a</math>、<math>b</math> 均為整數。求 <math>a+b=?</math></p> <p>① 3 ② 5 ③ -3 ④ -5</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.22	0.11
2	0.28	0.34	0.17
3	0.32	0.29	0.32
4*	0.23	0.15	0.39
未作答	0.01		
通過率	0.23	鑑別度	0.24
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b> 本題給定一個含有三個文字符號的等式，要求學生算出其中兩數值的和，評量學生是否掌握提公因式進行多項式因式分解的能力。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b> 1. 本題鑑別度為 0.24，正確答案為選項 4，通過率為 23%，顯示超過二成的學生已掌握提公因式進行多項式因式分解的能力。 2. 有 17% 的學生選擇選項 1 (低分組有 22%)，這些學生可能在提公因式上的後續變號產生忽略的狀況，以至於計算錯誤。  <math display="block">(3x-5)(3x-1)+(1-3x)(2x+a)=(3x-5)(3x-1)-(3x-1)(2x+a)</math> <math display="block">=(3x-1)(3x-5-2x+a)=(3x-1)(x-5+a)</math> <math display="block">(x-2)(x-1)-(1-x)(2x-b)=(x-2)(x-1)+(x-1)(2x-b)</math> <math display="block">=(x-1)(x-2+2x-b)</math> <math display="block">=(x-1)(3x-2-b)</math> <math display="block">\therefore -5+a=-1 \Rightarrow a=4, -2-b=-1 \Rightarrow b=-1 \quad \therefore a+b=3</math></p>		

	<p>3.有 28%的學生選擇選項 2(低分組有 34%)，這些學生可能在提公因式上的變號概念正確，但在兩式的對照上產生錯誤，以至於無法正確進行計算。</p> $(3x-5)(3x-1)+(1-3x)(2x+a)=(3x-5)(3x-1)-(3x-1)(2x+a)$ $=(3x-1)(3x-5-2x-a)=(3x-1)(x-5-a)$ $(x-2)(x-1)-(1-x)(2x-b)=(x-2)(x-1)+(x-1)(2x-b)$ $=(x-1)(x-2+2x-b)$ $=(x-1)(3x-2-b)$ $\therefore 5-a=1 \Rightarrow a=4, 2-b=1 \Rightarrow b=1 \quad \therefore a+b=5$ <p>4.有 32%的學生選擇選項 3(低分組有 29%)，這些學生可能在提公因式上的變號概念部分錯誤，再加上兩式的對照上亦產生錯誤，以至於無法正確進行計算。</p> $(3x-5)(3x-1)+(1-3x)(2x+a)=(3x-5)(3x-1)-(3x-1)(2x+a)$ $=(3x-1)(3x-5-2x+a)=(3x-1)(x-5+a)$ $(x-2)(x-1)-(1-x)(2x-b)=(x-2)(x-1)+(x-1)(2x-b)$ $=(x-1)(x-2+2x-b)$ $=(x-1)(3x-2-b)$ $\therefore 5+a=1 \Rightarrow a=-4, 2-b=1 \Rightarrow b=1 \quad \therefore a+b=-3$			
教材地位分析	學習內容	先備的知識	本題所需的知識 A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。 備註 只處理整係數 $ax^2+bx+c$ 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。	延伸的知識
補救教學建議	<p>(一) 複習因、倍式關係。</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;"> <math display="block">\begin{array}{r} x+1 \\ x+3 \overline{) x^2+4x+3} \\ \underline{x^2+3x} \phantom{+3} \\ x+3 \\ \underline{x+3} \\ 0 \end{array}</math> <p style="text-align: center;">乘積展開</p> <math display="block">x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)</math> <p style="text-align: center;">因式分解</p> </div> <div style="flex: 1; border: 1px dashed gray; padding: 5px;"> <p><math>x^2+4x+3</math> 被 <math>x+3</math> 整除</p> <p>所以 <math>x^2+4x+3</math> 與 <math>x+3</math> 的關係是：</p> <p><math>x+3</math> 是 <math>x^2+4x+3</math> 的因式</p> <p><math>x^2+4x+3</math> 是 <math>x+3</math> 的倍式</p> <p>同樣的，<math>x^2+4x+3</math> 能被 <math>x+1</math> 整</p> </div> </div> <p><math>x+3</math> 和 <math>x+1</math> 都是 <math>x^2+4x+3</math> 的因式； <math>x^2+4x+3</math> 是 <math>x+3</math> 和 <math>x+1</math> 的倍式。</p>			

(二) 複習提出公因式的方法分解二次多項式。

1. 公因式

$$x^2+4x+3=(x+3)(x+1), \quad x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$$

$x+1$  是  $x^2+4x+3$  的因式，也是  $x^2+3x+2$  的因式，

則  $x+1$  是  $x^2+4x+3$  和  $x^2+3x+2$  的公因式

2. 提公因式法做因式分解

考慮  $(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)$ ，利用分配律

$$ac+bc=(a+b)c \text{ 可得}$$

$$(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)=[(x+1)+(x-3)](2x-3)=(2x-2)(2x-3)$$

此即為  $(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)$  的一個因式分解。

3. 利用變號提公因式法做因式分解

$$\text{考慮 } (x+1)(2x-3)-(x-3)(3-2x)$$

發現  $(2x-3)$  與  $(3-2x)$  似乎有特別的關係，

$$(2x-3)+(3-2x)=0,$$

也就是  $(2x-3)$  與  $(3-2x)$  互為相反數，說明了

$$(2x-3)=-(3-2x)$$

所以

$$(x+1)(2x-3)-(x-3)(3-2x)$$

$$=(x+1)(2x-3)-(x-3)[- (2x-3)]$$

$$=(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)$$

$$=(2x-3)[(x+1)+(x-3)]$$

$$=(2x-3)(2x-2)$$

(三) 以本題目說明解題步驟。

1. 利用變號提公因式

左式

$$(3x-5)(3x-1)+(1-3x)(2x+a)=(3x-5)(3x-1)-(3x-1)(2x+a)$$

$$=(3x-1)(3x-5-2x-a)=(3x-1)(x-5-a)$$

右式

$$(x-2)(x-1)-(1-x)(2x-b)=(x-2)(x-1)+(x-1)(2x-b)$$

$$=(x-1)(x-2+2x-b)=(x-1)(3x-2-b)$$

2. 左式=右式

$$(3x-1)(x-5-a)=(x-1)(3x-2-b)$$

3. 因式分解後括號內的對應

$$(3x-1)(x-5-a)=(x-1)(3x-2-b)$$

$$\therefore -5-a=-1 \Rightarrow a=-4, -2-b=-1 \Rightarrow b=-1$$

$$\therefore a+b=-5$$



題號	22												
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行										
學習內容	F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數 ( $y=c$ )、一次函數 ( $y=ax+b$ )。												
試題內容	<p>22. LET 辦理 T-shirt 特賣會，會場中顧客只需買一個環保購物袋裝 T-shirt，下表是方便顧客結帳用的「購買 T-shirt 件數」以及「環保購物袋和 T-shirt 的總費用」對照表，已知顧客買了 <math>x</math> 件 T-shirt 時，結帳需付 <math>y</math> 元，且 <math>y</math> 是 <math>x</math> 的一次函數。 假設阿明買了 6 件 T-shirt，請問阿明要付多少元？</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>購買 T-shirt 件數 (<math>x</math>)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>環保購物袋和 T-shirt 總費用 (<math>y</math>)</td> <td>199</td> <td>348</td> <td>497</td> <td>...</td> </tr> </table> <p>① 894 ② 944 ③ 994 ④ 1044</p>			購買 T-shirt 件數 ( $x$ )	1	2	3	...	環保購物袋和 T-shirt 總費用 ( $y$ )	199	348	497	...
購買 T-shirt 件數 ( $x$ )	1	2	3	...									
環保購物袋和 T-shirt 總費用 ( $y$ )	199	348	497	...									
選答率	答題反應比率（*表正確答案）												
選項	整體	低分組	高分組										
1	0.14	0.19	0.07										
2*	0.55	0.33	0.82										
3	0.19	0.28	0.07										
4	0.13	0.19	0.04										
未作答	0.01												
通過率	0.55	鑑別度	0.49										
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b> 本題給定一個含有一次函數的情境題，要求學生算出購買一定量後所需付的價錢，評量學生是否掌握一次函數的解題。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b> 1. 本題鑑別度為 0.49，正確答案為選項 2，通過率為 55%，顯示超過五成的學生已具備掌握一次函數的解題。 2. 有 14% 的學生選擇選項 1 (低分組有 19%)，這些學生掌握計算 1 件 T-shirt 的價格，但在最後的總價上可能未加上環保購物袋的價格。 3. 有 19% 的學生選擇選項 3 (低分組有 28%)，這些學生掌握計算 1 件 T-shirt 的價格，但在最後的總價上可能多加了環保購</p>												

	<p>物袋價格的數量。</p> <p>4.有 13%的學生選擇選項 4(低分組有 19%)，這些學生這些學生掌握計算 1 件 T-shirt 的價格，但在最後的總價上可能多加了環保購物袋價格的數量。</p>																	
教材地位分析	學習內容	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識														
		<p>A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義：<math>ax+by=c</math> 的圖形；<math>y=c</math> 的圖形（水平線）；<math>x=c</math> 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。</p>	<p>F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 <math>f(x)</math> 的抽象型式）、常數函數（<math>y=c</math>）、一次函數（<math>y=ax+b</math>）。</p>	<p>F-9-1 二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。</p>														
補救教學建議	<p>(一) 複習一次函數關係式 <math>y=ax+b</math>。</p> <p>可舉情境例，透過觀察對應關係的規律性，進而表徵為 <math>y=ax+b</math>，認識一次函數。例如：下表是攝氏溫度與華氏溫度的對應表。</p> <table border="1" data-bbox="486 992 1200 1093"> <tr> <td>攝氏溫度(<math>^{\circ}\text{C}</math>)</td> <td>0</td> <td>10</td> <td>20</td> <td>30</td> <td>40</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>華氏溫度(<math>^{\circ}\text{F}</math>)</td> <td>32</td> <td>50</td> <td>68</td> <td>86</td> <td>104</td> <td>122</td> </tr> </table> <p>觀察出「攝氏每增加 10 度，華氏增加 18 度」，也就是「攝氏每增加 1 度，華氏增加 1.8 度」，而且當攝氏 0 度時，華氏 32 度。</p> <p>因此以 <math>x^{\circ}\text{C}</math> 代表攝氏溫度、<math>y^{\circ}\text{F}</math> 代表華氏溫度，攝氏溫度與相對應的華氏溫度之關係 <math>y=1.8x+32</math>，而關係如 <math>y=1.8x+32</math> 稱為一次函數。</p> <p>(二) 複習解二元一次聯立方程式_情境為例子。</p> <p>1.加減消去法</p> <p>有兩家人去動物園玩，<u>小明</u>家買了 5 張全票和 2 張優待票，共花了 1300 元。<u>小華</u>家買了 3 張全票和 2 張優待票，共花了 900 元。</p> <p>兩家一比較，<u>小明</u>家比<u>小華</u>家多 2 張全票，花費則多了 400 元，那麼 1 張全票就是 200 元了。</p> <p>如果寫成關係式，可假設 1 張全票 <math>x</math> 元，1 張優待票 <math>y</math> 元，那麼<u>小明</u>家 <math>5x+2y=1300</math>，<u>小華</u>家 <math>3x+2y=900</math></p> <p>將上述兩個二元一次方程式列在一起，就成了二元一次聯立方程式</p> $\begin{cases} 5x+2y=1300 \\ 3x+2y=900 \end{cases}$				攝氏溫度( $^{\circ}\text{C}$ )	0	10	20	30	40	50	華氏溫度( $^{\circ}\text{F}$ )	32	50	68	86	104	122
攝氏溫度( $^{\circ}\text{C}$ )	0	10	20	30	40	50												
華氏溫度( $^{\circ}\text{F}$ )	32	50	68	86	104	122												

「小明家比小華家多 2 張全票，花費則多了 400 元」就是兩式相減得比較結果

也就是  $2x = 400$   $x = 200$

## 2. 代入消去法

小明一家人去動物園玩，買了 5 張全票和 2 張優待票，共花了 1300 元。忘了 1 張全票是多少元，但知道 1 張優待票比 1 張全票便宜 50 元。

也就是如果將 2 張優待票全換成全票，7 張全票總花費將會是  $1300 + 100 = 1400$  元。

如果寫成關係式，可假設 1 張全票  $x$  元，1 張優待票  $y$  元，那麼小明家  $5x + 2y = 1300$ ， $y = x - 50$

將上述兩個二元一次方程式列在一起，就成了二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1300 \\ y = x - 50 \end{cases}$$

5 張全票 + 2 張(全票 - 50) = 1300

$$\Rightarrow 5x + 2(x - 50) = 1300$$

$$5x + 2x = 1300 + 100 \quad \leftarrow \text{當優待票改買成全票，總花費將多 100 元}$$

$$7x = 1400$$

$$x = 200$$

優待票由「全票 - 50」取代

(三) 以本題目說明解題步驟。

x(購買 T-shirt 件數)	1	2	3
y(環保購物袋和 T-shirt 總費用)	199	348	497

想法一：觀察出「每增加 1 件，費用增加 149」，因此 1 件 T-shirt 價格是 149 元，1 個環保購物袋的費用是  $199 - 149 = 50$  元。因此以  $y = 149x + 50$ 。

想法二：列出一次數的通式，先使用二元一次聯立方程式，算出 1 件 T-shirt 及 1 個環保購物袋的價格，再完成符合該題的一次函數關係式。

$y = ax + b$   $a$  是 1 件 T-shirt 的價格， $b$  是 1 個環保購物袋的價格

$$\begin{cases} 199 = a + b \\ 348 = 2a + b \end{cases}$$

透過加減消去法 得  $a = 149$   $b = 50$

$$\therefore y = 149x + 50$$

題號	23		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數 ( $y=c$ )、一次函數 ( $y=ax+b$ )。		
試題內容	<p>23. 阿宏到觀光果園採草莓，不管有沒有採草莓，入園都要收門票 50 元。已知阿宏採了一些草莓，結帳（含門票）要付 600 元。阿宏想要再加買 0.5 公斤的草莓，老闆說需再多付 100 元。假設採草莓總費用（含門票）是 <math>y</math> 元、購買草莓的重量是 <math>x</math> 公斤，則 <math>y</math> 是 <math>x</math> 的一次函數。下列何者為此一次函數的關係式？</p> <p>① <math>y = 200x + 50</math></p> <p>② <math>y = 200x - 50</math></p> <p>③ <math>y = 100x + 50</math></p> <p>④ <math>y = 100x - 50</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.43	0.20	0.79
2	0.13	0.21	0.05
3	0.33	0.42	0.13
4	0.10	0.17	0.02
未作答	0.01		
通過率	0.43	鑑別度	0.59
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定一個含有一次函數的情境題，要求學生列出符合情境的函數關係式，評量學生是否理解題意並列出函數關係式。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.56，正確答案為選項 1，通過率為 41%，顯示超過四成的學生已理解題意並列出函數關係式。</p> <p>2. 有 13% 的學生選擇選項 2 (低分組有 21%)，這些學生雖然掌握了 1 公斤 100 元，但可能將 <math>y</math> 誤解為不含門票，因此在函數關係式的列式上產生錯誤。</p> <p>3. 有 34% 的學生選擇選項 3 (低分組有 41%)，這些學生雖具有列出函數關係式的能力，但在題意上可能未充分掌握，將 0.5 公斤所付 100 元，理解成 1 公斤 100 元。</p> <p>4. 有 11% 的學生選擇選項 4 (低分組有 17%)，這些學生可能在 1 公斤 100 元，<math>y</math> 有含門票上未能充分掌握，因此列錯函數關係式。</p>		

教材地位 分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識														
	學習 內容	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax+by=c$ 的圖形； $y=c$ 的圖形（水平線）； $x=c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。	F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數（ $y=c$ ）、一次函數（ $y=ax+b$ ）。	F-9-1 二次函數的意義；二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。														
補救教學 建議	<p>(一) 複習一次函數關係式 <math>y=ax+b</math>。</p> <p>可舉情境例，透過觀察對應關係的規律性，進而表徵為 <math>y=ax+b</math>，認識一次函數。例如：下表是攝氏溫度與華氏溫度的對應表。</p> <table border="1" data-bbox="486 922 1299 1025"> <tr> <td>攝氏溫度(°C)</td> <td>0</td> <td>10</td> <td>20</td> <td>30</td> <td>40</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>華氏溫度(°F)</td> <td>32</td> <td>50</td> <td>68</td> <td>86</td> <td>104</td> <td>122</td> </tr> </table> <p>觀察出「攝氏每增加 10 度，華氏增加 18 度」，也就是「攝氏每增加 1 度，華氏增加 1.8 度」，而且當攝氏 0 時，華氏 32。</p> <p>因此以 <math>x^{\circ}\text{C}</math> 代表攝氏溫度、<math>y^{\circ}\text{F}</math> 代表華氏溫度，攝氏溫度與相對應的華氏溫度之關係 <math>y=1.8x+32</math>，進而介紹關係如 <math>y=1.8x+32</math> 稱為一次函數。</p> <p>(二) 以本題目說明解題步驟。</p> <p>「0.5 公斤的草莓，需付 100 元」，也就是「每 1 公斤的草莓，需付 200 元」，門票為 50 元。而草莓重量是 <math>x</math> 公斤時、草莓的總費用(含門票)是 <math>y</math> 元，總費用與草莓重量之關係 <math>y=100x+50</math></p>				攝氏溫度(°C)	0	10	20	30	40	50	華氏溫度(°F)	32	50	68	86	104	122
攝氏溫度(°C)	0	10	20	30	40	50												
華氏溫度(°F)	32	50	68	86	104	122												

題號	24		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。		
試題內容	<p>24. 在直角坐標平面上，已知某函數 <math>y = ax + b</math> 的圖形通過 <math>(-11, 22)</math>、<math>(33, 22)</math>，其中 <math>a</math>、<math>b</math> 均為整數。</p> <p>下列關於這個函數 <math>y = ax + b</math> 的敘述何者正確？</p> <p>① 此函數的圖形與 <math>x</math> 軸有一個交點，與 <math>y</math> 軸也有一個交點</p> <p>② 此函數的圖形是平行 <math>y</math> 軸的直線</p> <p>③ 此函數的圖形會過 <math>(0, 0)</math></p> <p>④ 此函數的圖形會過 <math>(110, 22)</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.18	0.28	0.05
2	0.21	0.30	0.07
3	0.17	0.24	0.06
4*	0.42	0.17	0.81
未作答	0.01		
通過率	0.42	鑑別度	0.65
試題品質分析	<p><b>(一) 評量目標說明</b></p> <p>本題給定兩點坐標，要求學生判斷選項的正確性，評量學生是否掌握一次函數在直角坐標平面上的圖形。</p> <p><b>(二) 選項及學生表現說明</b></p> <p>1. 本題鑑別度為 0.65，正確答案為選項 4，通過率為 42%，顯示四成的學生已掌握一次函數在直角坐標平面上的圖形。</p> <p>2. 有 18% 的學生選擇選項 1 (低分組有 28%)，這些學生可能認為一次函數的圖形既然是一直線，一定會與兩軸皆有交點的迷失概念。</p> <p>3. 有 21% 的學生選擇選項 2 (低分組有 30%)，這些學生可能從兩點有相同的 <math>y</math> 坐標，而認為函數圖形會平行 <math>y</math> 軸的迷失概念。</p> <p>4. 有 17% 的學生選擇選項 3 (低分組有 24%)，這些學生可能在 <math>(33, 22)</math> 點的位置誤認為 <math>(22, 33)</math> 點的位置，因此判斷該一次函數通過原點。</p>		

教材地位 分析	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。	F-9-1 二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。 F-9-2 二次函數的圖形與極值：二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪 $y=ax^2$ 、 $y=ax^2+k$ 、 $y=a(x-h)^2$ 、 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線； $y=ax^2$ 的圖形與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。

補救教學 建議	<p>(一) 複習一次函數表格化及代數式的表徵。</p> <p>可舉情境例，透過觀察對應關係的規律性，進而表徵為 <math>y=ax+b</math>，認識一次函數。例如：下表是攝氏溫度與華氏溫度的對應表。</p> <p>1. 表格表徵的觀察。</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>攝氏溫度(°C)</td> <td>0</td> <td>10</td> <td>20</td> <td>30</td> <td>40</td> <td>50</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>華氏溫度(°F)</td> <td>32</td> <td>50</td> <td>68</td> <td>86</td> <td>104</td> <td>122</td> <td>...</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">+18   +18   +18   +18   +18</p> <p>觀察出「攝氏每增加 10 度，華氏增加 18 度」，也就是「攝氏每增加 1 度，華氏增加 1.8 度」，而且當攝氏 0 時，華氏 32。</p> <p>2. 代數式表徵的呈現。</p> <p>因此以 <math>x^{\circ}\text{C}</math> 代表攝氏溫度、<math>y^{\circ}\text{F}</math> 代表華氏溫度，攝氏溫度與相對應的華氏溫度之關係 <math>y=1.8x+32</math>，關係如 <math>y=1.8x+32</math> 稱為一次函數。</p>	攝氏溫度(°C)	0	10	20	30	40	50	...	華氏溫度(°F)	32	50	68	86	104	122	...
攝氏溫度(°C)	0	10	20	30	40	50	...										
華氏溫度(°F)	32	50	68	86	104	122	...										

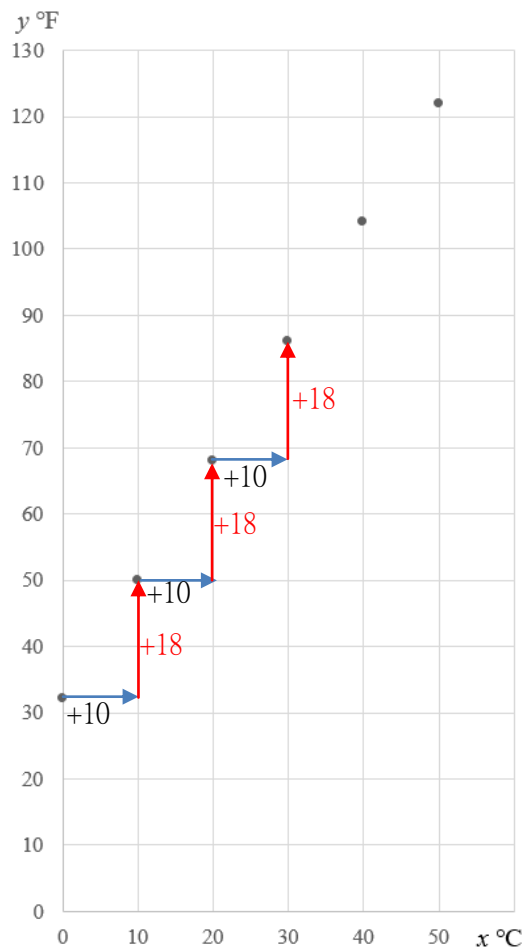
(二) 複習一次函數的圖形表徵。

1. 一次函數的圖形表徵

從下方圖表，可觀察到點到下一個點：在  $x$  軸每增加 10，在  $y$  軸上則增加 18，也就是  $x$  值固定的改變之下， $y$  值的變化是固定的。

因此，所有符合  $y = 1.8x + 32$  的點在圖形上形成一直線。

所以在平面直角坐標上的一次函數圖形會是一直線。



2. 各式一次函數的圖形特性

透過描繪各式一次函數的圖形，了解圖形的特性

$y = \text{常數}$  為一條水平線

$y = ax$  圖形必通過原點

$y = ax + b$  ( $b \neq 0$ ) 為一條直線，但非水平線和鉛垂線

一次函數通在兩點，則可透過解聯立方程式完成。



(三) 以本題目說明解題步驟。

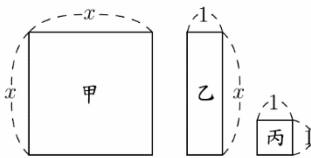
該一次函數通過 $(-11,22)$ 、 $(33,22)$ ，若在直角坐標平面上畫一直線觀察，必為一條水平線，也就是此函數為 $y=22$ 。

則其圖形①與 $y$ 軸有一個交點，但與 $x$ 軸沒有交點

②平行 $x$ 軸的直線

③不會通過 $(0,0)$

④必通過 $y$ 坐標為 $22$ 的任一點

題號	25		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。		
試題內容	<p>25. 如下圖，數學課堂時，<u>南</u>老師提供了甲、乙、丙三種紙片給同學拼成長方形，其中邊長 <math>x = \sqrt{10}</math>。</p>  <p>已知<u>承洙</u>使用 2 個甲種紙片、7 個乙種紙片、6 個丙種紙片拼成長方形。請問<u>承洙</u>拼出長方形的周長最接近下列何者？</p> <p>① 14 ② 29 ③ 47 ④ 84</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.21	0.09
2*	0.36	0.24	0.55
3	0.31	0.30	0.28
4	0.16	0.24	0.06
未作答	0.02		
通過率	0.36	鑑別度	0.31
試題品質分析	<p>(一) 評量目標說明</p> <p>本題給定含有文字符號紙片的情境題，要求學生求出長寬並估算周長，評量學生應用多項式因式分解及估算的能力。</p> <p>(二) 選項及學生表現說明</p> <p>1. 本題鑑別度為 0.31，正確答案為選項 2，通過率為 36%，顯示超過三成五的學生已具備應用多項式因式分解及估算的能力。</p> <p>2. 有 15% 的學生選擇選項 1 (低分組有 21%)，這些學生可能未清楚題意，直接計算長與寬和 <math>(2x+3+x+2)</math> 的概略值。</p> <p>3. 有 31% 的學生選擇選項 3 (低分組有 30%)，這些學生可能未清楚題意，直接計算面積 <math>(2x^2+7x+6)</math> 的概略值。</p> <p>4. 有 16% 的學生選擇選項 4 (低分組有 24%)，這些學生可能未清楚題意，做了錯誤的選擇。</p>		

		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
教材地位 分析	學習內容		A-8-5 因式分解的方法： 提公因式法；利用 乘法公式與十字交 乘法因式分解。 備註 只處理整係數 $ax^2+bx+c$ 的因式分 解或與乘法公式直 接相關者，不處理 一般二元齊次或二 元非齊次式但有一 次介入者。	

補救教學 建議	<p>(一) 複習觀察係數以十字交乘法做二次多項式因式分解。</p> <p>1. 以二次項係數為1、常數項為質數為例。          因式分解 <math>x^2+3x+2</math> 常數項的 <math>2=1 \times 2</math></p> $\begin{array}{r} x \quad 2 \\ \quad \times \\ x \quad 1 \\ \hline x+2x=3x \end{array} \quad \text{由此可知 } x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$ <p>2. 以二次項係數為質數、常數項為質數為例。          因式分解 <math>2x^2+5x+3</math> 二次項係數的 <math>2=1 \times 2</math>，常數項的  <math>3=1 \times 3=3 \times 1</math></p> $\begin{array}{r} 2x \quad 1 \\ \quad \times \\ x \quad 3 \\ \hline 6x+x=7x \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x \quad 3 \\ \quad \times \\ x \quad 1 \\ \hline 2x+3x=5x \end{array}$ <p>由此可知 <math>2x^2+5x+3=(2x+3)(x+1)</math></p> <p>3. 以二次項係數為合數、常數項為質數為例。          因式分解 <math>6x^2+11x+3</math>          二次項係數的 <math>6=1 \times 6=2 \times 3</math>，常數項的 <math>3=1 \times 3=3 \times 1</math></p> $\begin{array}{r} x \quad 1 \\ \quad \times \\ 6x \quad 3 \\ \hline 3x+6x=9x \end{array} \quad \begin{array}{r} x \quad 3 \\ \quad \times \\ 6x \quad 1 \\ \hline x+9x=10x \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x \quad 1 \\ \quad \times \\ 3x \quad 3 \\ \hline 6x+3x=9x \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x \quad 3 \\ \quad \times \\ 3x \quad 1 \\ \hline 2x+9x=11x \end{array}$ <p>由此可知 <math>6x^2+11x+3=(2x+3)(3x+1)</math></p>
------------	---

4.以二次項係數為合數、常數項為合數為例。

因式分解  $4x^2+4x-15$  二次項係數的  $4=1\times 4=2\times 2$ ，

常數項的  $-15=(-1)\times 15=(-3)\times 5=(-5)\times 3=(-15)\times 1$

$$=1\times(-15)=3\times(-5)=5\times(-3)=15\times(-1)$$

$$\begin{array}{r} x \quad -1 \\ \times \\ 4x \quad 15 \\ \hline 15x-4x=11x \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{r} 2x \quad -3 \\ \times \\ 2x \quad 5 \\ \hline 10x-6x=4x \end{array}$$

由此可知  $4x^2+4x-15=(2x-3)(2x+5)$

(二) 複習利用十分逼近法求  $\sqrt{a}$  的近似值。

我們知道  $\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$ ，而且  $3\times 3=9$ 、 $4\times 4=16$ ，所以  $3<\sqrt{10}<4$ 。

接著在 3 與 4 之間分 10 等分，這樣就可以找到  $\sqrt{10}$  更精準的值。

而  $3.1\times 3.1=9.61$ 、 $3.2\times 3.2=10.24$ ，所以  $3.1<\sqrt{10}<3.2$ 。

接著在 3.1 與 3.2 之間分 10 等分，...以此類推，越找越接近  $\sqrt{10}$  精準的值。

(三) 以本題目說明解題步驟。

因式分解  $2x^2+7x+6$

二次項係數的  $2=1\times 2$ ，常數項的  $6=1\times 6=6\times 1=2\times 3=3\times 2$

$$\begin{array}{r} x \quad 1 \\ \times \\ 2x \quad 6 \\ \hline 6x+2x=8x \end{array} \quad \begin{array}{r} x \quad 6 \\ \times \\ 2x \quad 1 \\ \hline x+12x=13x \end{array} \quad \begin{array}{r} x \quad 2 \\ \times \\ 2x \quad 3 \\ \hline 3x+4x=7x \end{array} \quad \begin{array}{r} x \quad 3 \\ \times \\ 2x \quad 2 \\ \hline 2x+6x=8x \end{array}$$

由此可知  $2x^2+7x+6=(x+2)(2x+3)$

周長  $=2\times(x+2+2x+3)=6x+10=6\sqrt{10}+10$

$3.1<\sqrt{10}<3.2 \quad \therefore 28.6<6\sqrt{10}+10<29.2$