

## 三年級試題選項分析與教學建議

題號	1		
內容領域	關係	認知歷程向度	概念理解
學習內容	R-3-2 數量模式與推理 (I)：以操作活動為主。一維變化模式之觀察與推理，例如數列、一維圖表等。 備註：含學生之簡單推理與說明。本教學活動不可出現公式，此非本條目之學習目標。可結合表格教學 (D-3-1)。		
試題內容	1. 想一想，下一個是什麼圖案？  ①  ②  ③  ④ 		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.96	0.93	0.98
2	0.03	0.04	0.01
3	0.00	0.01	0.00
4	0.01	0.02	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.96	鑑別度	0.06
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.06，正確答案為選項①，通過率為96%，顯示近十成的學生已具備一維變化模式推理的能力。 2. 有3%的學生選擇②(低分組有4%)，這些學生可能不理解題意；也可能尚未具備一維變化模式推理的能力。 3. 有1%的學生選擇④(低分組有2%)，這些學生可能不理解題意；也可能尚未具備一維變化模式推理的能力。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>D-2-1 分類與呈現：以操作活動為主。能蒐集、分類、記錄、呈現資料、生活物件或幾何形體。討論分類之中還可以再分類的情況。 備註：非正式表格與統計圖表教學(見D-1-1備註)。可配合平面圖形與立體形體教學(S-2-2)。</p>	<p>R-3-2 數量模式與推理(I)：以操作活動為主。一維變化模式之觀察與推理，例如數列、一維圖表等。 備註：含學生之簡單推理與說明。本教學活動不可出現公式，此非本條目之學習目標。可結合表格教學(D-3-1)。</p>	<p>R-4-2 四則計算規律(I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。</p>
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不理解題意。</li> <li>2. 學生可能沒有察覺圖像是 4 個一循環。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 三年級首次引入數量模式與推理，希望學生透過觀察數列、一維圖表等，能說出一維變化模式之規律；找出一維變化模式的下一項，並說明理由。</li> <li>2. 以問題「想想看，第 4 個圖形有幾個圈？○○○、○○○○、○○○○○」為例，本學習內容只要求學生找出下一個圖形有 6 個圈，並說明理由即可，不必要求學生找出其它項，例如不必找出第 18 個圖形是什麼。</li> <li>3. 教師提供數列讓學生討論時，並沒有定義數列的一般項，因此當我們只給定數列前幾項時，可以有很多定義數列的方法。 以「2、3、5、□、□」為例，下面都是合理的答案。 (1) 2、3、5、8、12 (3 比 2 多 1、5 比 3 多 2、8 比 5 多 3、12 比 8 多 4) (2) 2、3、5、8、13 (2+3=5、3+5=8、5+8=13) (3) 2、3、5、10、20 (2+3=5、2+3+5=10、2+3+5+10=20) (4) 2、3、5、7、11 (將質數由小至大依序排列) 教師提供數列讓學生討論時，應接受不同的合理答案，但學生只要能說出一種合理的答案即可。</li> </ol>			

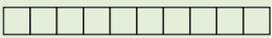
題號	2		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-3-2 加減直式計算：含加、減法多次進、退位。 註：須處理數字中有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。		
試題內容	2. 算算看看， $5000 - 3286 = ?$  ① 1714 ② 1824 ③ 2714 ④ 8286		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.93	0.85	0.98
2	0.04	0.07	0.01
3	0.03	0.07	0.01
4	0.00	0.01	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.93	鑑別度	0.12
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.12，正確答案為選項①，通過率為93%，顯示超過九成的學生已具備減法直式計算的能力。</p> <p>2. 有4%的學生選擇②(低分組有7%)，這些學生可能不具備減法直式計算的能力，在退位時計算錯誤。</p> <p>3. 有3%的學生選擇③(低分組有7%)，這些學生可能不具備減法直式計算的能力，在退位時計算錯誤。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-2 加減算式與直式計算：用位值理解多位數加減計算的原理與方法。初期可操作、橫式、直式等方法並陳，二年級最後歸結於直式計算，做為後續更大位數計算之基礎。直式計算的基礎為位值概念與基本加減法，教師須說明直式計算的合理性。	N-3-2 加減直式計算：含加、減法多次進、退位。 備註：須處理數字中有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。	R-4-2 四則計算規律(I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

## (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備減法直式計算的能力，在退位時計算錯誤。
2. 學生可能誤解題意，利用加法來解題。

## (二) 核心概念與本題的教學重點

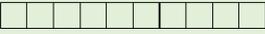
1. 本學習內容 N-3-2 為 N-2-2 之後續學習概念，故學生應該已經理解三位數加減直式計算(不含兩次退位)。本學習內容是整數加、減直式計算的總結，要求學生熟練整數加、減的直式計算。
2. 以退位減法計算問題「 $537-251$ 」為例，在說明減法退位計算時，教師經常用「向百位借 1」的說法，這種說法並不正確，因為借了並沒有還回來。建議教師改用「拿一個  $100$  換 10 個 ①」的說法。
3. 一年級加減法教學重點：基本加減法。  
二年級加減法教學重點：二位數的加減直式計算(含進位及退位)；三位數的加減直式計算(不含兩次退位)。  
三年級加減法教學重點：四位數以內的加減直式計算；並總結整數的加減直式計算。
4. 本學習內容是整數加減直式計算的總結，四年級不再出現與加減法相關的學習內容，教師應幫助學生熟練加減直式計算。因為三年級只引入 10000 以內的數，因此限制和及被減數都必須小於 10000。
5. 以退位減法計算問題「 $1235-678$ 」為例，進行個位計算時，因為 5 減 8 不夠減，拿 1 個十換 10 個一之後，有兩種解題的方法，第一種是利用基本加減事實來解題，直接利用  $15-8=7$ ，算出和的個位數字是 7，第二種是利用拆十來解題，透過  $10-8=2$ ， $2+5=7$ ，算出和的個位數字是 7。三年級學生應該已熟記基本加減事實，建議教師幫助學生利用第一種方法來解題。
6. 有兩種使用定位板的時機，第一種是溝通數字的位值及位名，第二種是直式計算溝通不同單位的個數，引入定位板時，教師應說明下面三個限制：
  - (1) 記錄「幾」個十的時候，只能將「幾」記錄在十位，記錄「幾」個一的時候，只能將「幾」記錄在個位。以「將 3 個十，5 個一記在定位板上」為例，定位板記錄不同單位的個數，因此必須將 3 個十的 3 記在十位，5 個一的 5 記在個位，才能夠溝通不同單位計數的意義。
  - (2) 一個位置只能記錄 1 個數碼。

十位	個位
	
3	15

以「將 3 個十，15 個一記在定位板上」為例，將 3 個十的 3 記在十位，將 15 個一的 15 記在個位，如上圖。當定位板存在時，可以清楚的溝通有 3 個十，15 個一，但是脫離定位板記成 315 後，會和三百一十五混

淆。因此數學上限制一個位置只能記錄 1 個數碼，必須將 3 個十，15 個一改記成 4 個十，5 個一。

(3) 某位值的個數是 0 時，必須記 0。

十位	個位
	
5	0

以「將 5 個十記在定位板上」為例，將 5 個十的 5 記在十位，如上圖。當定位板存在時，可以清楚的溝通有 5 個十，但是脫離定位板記成 5 後，會和 5 個一混淆，因此數學上限制當個位數字是 0 時，必須在個位上記 0。

題號	3		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-7 解題：兩步驟應用問題（加減與除、連乘）。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。 備註： 乘除混合、連除在四年級（N-4-3）。		
試題內容	3. 一盒自動鉛筆有 12 枝，一箱有 6 盒，文具店買進 8 箱，共買進多少枝自動鉛筆？ ① 26 枝 ② 48 枝 ③ 72 枝 ④ 576 枝		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.02	0.07	0.00
2	0.14	0.28	0.02
3	0.13	0.27	0.03
4*	0.71	0.39	0.95
未作答	0.00		
通過率	0.71	鑑別度	0.56
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.56，正確答案為選項④，通過率為71%，顯示超過七成的學生已具備連乘兩步驟問題解題的能力。 2. 有2%的學生選擇①(低分組有7%)，這些學生可能不理解題意，將連乘兩步驟問題解讀成連加的兩步驟問題。 3. 有14%的學生選擇②(低分組有28%)，這些學生可能不具備連乘兩步驟問題解題的能力，只算出每箱有6盒，8箱共有48盒後就停止解題。 4. 有13%的學生選擇③(低分組有27%)，這些學生可能不具備連乘兩步驟問題解題的能力，僅算出每盒12枝，6盒共72枝後就停止解題。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-8 解題：兩步驟應用問題（加、減、乘）。加減混合、加與乘、減與乘之應用解題。不含併式。不含連乘。	N-3-7 解題：兩步驟應用問題（加減與除、連乘）。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。 備註：乘除混合、連除在四年級（N-4-3）。	N-4-3 解題：兩步驟應用問題（乘除，連除）。乘與除、連除之應用解題。

(一) 錯誤類型的可能原因

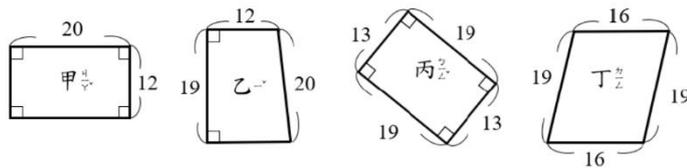
1. 學生在進行兩步驟應用問題解題時，最常遇到的困難是不知道用「 $12 \times 6 = 72$ 」算出「一箱有 72 枝自動鉛筆」後，所得到的「72 枝」還可以繼續運算，因此只算出一個步驟後就停止解題。建議教師透過分段布題的策略幫助學生解題。
2. 學生可能不理解題意。  
如果學生不理解題意，建議教師透過操作具體物的方式來說明題意，並要求學生再操作一次具體物，檢查學生是否理解題意。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 本學習內容 N-3-7 為 N-2-8 之後續學習概念，故學生應該已經能夠在具體情境中，解決加、減兩步驟問題；也應該已經能解決先乘後加（減）與先加（減）後乘兩步驟問題。本學習內容延伸兩步驟問題情境至「先除後加及先除後減問題」和「先加後除及先減後除問題」。
2. 單步驟問題是包含一個運算的文字題，兩步驟問題是包含兩個運算的文字題，三步驟問題是包含三個運算的文字題。  
二年級引入「加、減」及「加（減）、乘」兩步驟問題；三年級引入「加（減）、除」及「連乘」兩步驟問題；四年級引入「乘、除」及「連除」兩步驟問題；五年級引入三步驟問題。  
二年級至四年級的兩步驟問題，以及五年級的三步驟問題，都限制在整數情境，六年級才引入分數及小數的多步驟問題。
3. 本學習內容教學重點是解決連乘的兩步驟問題，並用二個算式記錄解題活動，不討論利用數學性質簡化計算的問題。例如：面對「 $37 \times 25 \times 4$ 」的文字題情境時，不討論先算「 $37 \times 25$ 」與先算「 $25 \times 4$ 」，何種算法較有效率。四年級引入乘法結合律之後，才開始討論簡化計算的問題。  
教師不宜命「丙=20，甲是乙的 3 倍，乙是丙的 4 倍，請問甲是丙的多少倍？」的問題，「甲是乙的 3 倍」是基準量與比較量關係的描述。  
教師應命「丙=20，乙的 3 倍和甲一樣大，丙的 4 倍和乙一樣大，請問丙的多少倍和甲一樣大？」的問題，學生較容易將「乙的 3 倍和甲一樣大」記成「 $乙 \times 3 = 甲$ 」。

題號	4		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	<p>N-3-4 除法：除法的意義與應用。基於 N-2-9 之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十十乘法範圍的除法，做為估商的基礎。</p> <p>備註：建議先處理整除情境，再處理有餘數的情境。教學中應有乘、除法並陳之單元，讓學生能主動察覺乘法與除法問題的差異。</p>		
試題內容	<p>4. 林阿姨將 46 塊餅乾分裝成袋，並用除法算式「<math>46 \div 7 = 6 \cdots 4</math>」記錄分裝的結果。</p> <p>下列哪個可能是在林阿姨分裝餅乾的結果？</p> <p>① 分裝成 6 袋，每袋裝 4 塊餅乾，總共裝滿了 7 袋</p> <p>② 分裝成 7 袋，每袋裝 6 塊餅乾，可以全部裝完</p> <p>③ 每袋裝 7 塊餅乾，總共裝滿了 4 袋，還剩下 6 塊沒有裝完</p> <p>④ 每袋裝 7 塊餅乾，總共裝滿了 6 袋，還剩下 4 塊沒有裝完</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.05	0.13	0.01
2	0.05	0.13	0.01
3	0.05	0.13	0.00
4*	0.84	0.60	0.98
未作答	0.00		
通過率	0.84	鑑別度	0.38
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.38，正確答案為選項④，通過率 84%，顯示超過八成的學生已具備除法算式擬題的能力。</p> <p>2. 有 5% 的學生選擇①(低分組有 13%)，這些學生可能不具備除法算式擬題的能力，混淆除數和餘數的意義。</p> <p>3. 有 5% 的學生選擇②(低分組有 13%)，這些學生可能不具備除法算式擬題的能力，也可能不理解餘數的意義。</p> <p>4. 有 5% 的學生選擇③(低分組有 13%)，這些學生可能不具備除法算式擬題的能力，混淆被除數和除數的意義。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-9 解題：分裝與平分。以操作活動為主。除法前置經驗。理解分裝與平分之意義與方法。引導學生在解題過程，發現問題和乘法模式的關連。	N-3-4 除法：除法的意義與應用。基於 N-2-9 之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十乘乘法範圍的除法，做為估商的基礎。 備註：建議先處理整除情境，再處理有餘數的情境。教學中應有乘、除法並陳之單元，讓學生能主動察覺乘法與除法問題的差異。	N-3-5 除一位數：除法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。 備註：除法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。 N-3-6 解題：乘除應用問題。乘數、被乘數、除數、被除數未知之應用解題。連結乘與除的關係 (R-3-1)。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 可能不具備除法算式擬題的能力。</li> <li>2. 可能不理解除法算式中「被除數」、「除數」、「商」及「餘數」的意義。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師應幫助學生理解除法算式的意義： <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 知道「被除數」、「除數」、「商」、「餘數」的名稱及意義。</li> <li>(2) 理解商及餘數的意義，知道餘數可以為 0，而且一定要小於除數。</li> <li>(3) 理解商及餘數的意義，知道被除數減餘數後就能整除。</li> </ol> </li> <li>2. 運用 N-2-9 的前置經驗，先學習整除（餘數為 0）的情境，從「分裝」和「平分」兩種不同的情境（包含連續量和離散量），理解除法與「商」的意義，並學習除法的橫式記法，為「被除數÷除數=商」（如 <math>42 \div 6 = 7</math>）。然後再學習有「餘數」的情境，知道「餘數」的意義，並能用橫式記為「<math>44 \div 6 = 7</math> 餘 2」或「<math>44 \div 6 = 7 \dots 2</math>」。</li> <li>3. 除法問題有兩種記錄的格式： <ol style="list-style-type: none"> <li>第一種：<math>a \div b = q \dots r</math>，<math>q</math> 是整數，<math>0 \leq r &lt; b</math>。</li> <li>第二種：<math>a \div b = a/b</math>，<math>b \neq 0</math>。</li> </ol>           五年級引入「整數除以整數、商是分數」問題之前，只處理第一種記錄格式。         </li> <li>4. 「<math>a \div b = q \dots r</math>，<math>q</math> 是整數，<math>0 \leq r &lt; b</math>」中，餘數的範圍是「<math>0 \leq r &lt; b</math>」，也就是說，剩下 0 個中的 0 也是餘數。            例如「將 12(或 13、14)個蘋果平分給 3 個人」，學生必須解題成功，才知道餘數是 0(或 1、2)。            建議教師命題時，不論餘數是否為 0，都要同時詢問商數及餘數。例如：將 14 個蘋果平分給 3 個人，每人最多分到幾個蘋果，還剩下多少個蘋果？         </li> </ol>			

將 12 個蘋果平分給 3 個人，每人最多分到幾個蘋果，還剩下多少個蘋果？			
題號	5		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-3-2 正方形和長方形：以邊與角的特徵來定義正方形和長方形。 備註：知道如何判斷斜擺的長方形或正方形依舊是長方形或正方形。		
試題內容	<p>5. 下面哪些圖形是長方形？</p>  <p>(單位：公分)</p> <p>① 只有丙          ② 只有甲、丙          ③ 只有甲、乙、丙          ④ 只有甲、丙、丁</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.03	0.07	0.01
2*	0.61	0.50	0.73
3	0.06	0.12	0.02
4	0.30	0.31	0.24
未作答	0.00		
通過率	0.61	鑑別度	0.23
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.23，正確答案為選項②，通過率為61%，顯示超過六成的學生已具備以邊及角的特徵來辨識長方形的能力。</p> <p>2. 有3%的學生選擇①(低分組有7%)，這些學生可能不具備以邊及角的特徵來辨識長方形的能力，這些學生可能知道長方形的對邊等長，但是圖形甲只標示一組長邊和寬邊，因此不認為圖形甲是長方形。</p> <p>3. 有6%的學生選擇③(低分組有12%)，這些學生可能不具備以邊及角的特徵來辨識長方形的能力，這些學生可能認為有直角的圖形就是長方形。</p> <p>4. 有30%的學生選擇④(低分組有31%)，這些學生可能不具備以邊及角的特徵來辨識長方形的能力，認為只要對邊等長的圖形就是長方形。</p>			

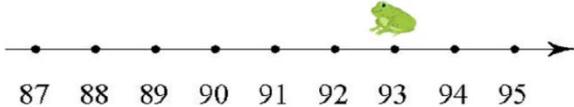
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-2-4 平面圖形的邊長：以操作活動與直尺實測為主。認識特殊幾何圖形的邊長關係。含周長的計算活動。	S-3-2 正方形和長方形：以邊與角的特徵來定義正方形和長方形。 備註：知道如何判斷斜擺的長方形或正方形依舊是長方形或正方形。	S-4-8 四邊形：以邊與角的特徵(含平行)認識特殊四邊形並能作圖。如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能誤以為只要對邊等長的圖形就是長方形。</li> <li>2. 學生可能誤以為只要有直角的圖形就是長方形。</li> <li>3. 學生可能不具備以邊與角的特徵來辨識長方形的能力。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本學習內容 S-3-2 為 S-2-4 之後續學習概念，故學生應該已經認識給定的正方形、長方形、正三角形、等腰三角形的邊長關係。 本學習內容幫助學生由邊長和角的特性來認識正方形、由邊長和角的特性來認識長方形。</li> <li>2. 教師常混淆「長方形的定義(如何辨識圖形為長方形)」與「長方形的性質(長方形有哪些特徵)」，誤認為一個四邊形要同時滿足「四個角都是直角，對邊等長、對邊互相平行，對角線互相平分且等長」這些條件，才能辨識這個四邊形是長方形。 數學上利用最少的條件來辨識長方形，一個四邊形，只要四個角都是直角，就能確認該四邊形為長方形。 各版本都定義四個角都是直角的四邊形為長方形，因此只要一個四邊形的四個角都是直角，該四邊形就是長方形。 定義長方形之後，可以探討長方形還有哪些共同特徵，例如長方形對邊等長、長方形對邊互相平行等，都屬於長方形的性質。</li> <li>3. 各版本的課本都以邊和角的特徵來定義正方形與長方形。 長方形：四個角都是直角的四邊形稱為長方形。 正方形：四個角都是直角且四邊等長的四邊形稱為正方形。 在還沒有定義正方形與長方形之前，教學時討論的都是給定的正方形與長方形，定義正方形與長方形之後，教學時討論的是所有正方形與長方形共同的特徵。</li> <li>4. 學生可能會認為斜擺的長方形或正方形不是長方形或正方形，教師可協助學生利用直尺和三角板檢查斜擺的長方形或正方形依舊是長方形或正方形。</li> </ol>			

5. 長方形哪一邊稱為長邊、哪一邊稱為寬邊常引起爭議。數學上並沒有給長邊或寬邊下定義，日常生活中，常見下面這三種定義長邊和寬邊的方式。

第一種：因為受到「長」這個關鍵字的影響，稱比較長的那一邊為長邊，比較短的那一邊稱為寬邊。

第二種：由長方形擺放的位置決定長邊和寬邊，將長方形擺正後，稱水平方向的那一邊為長邊，鉛直方向的那一邊為寬邊。這種定義的方式有一個缺點，如果兩個人擺放的方式不相同，他們所稱的長邊和寬邊就不相同。

第三種：因為只要確定長邊和寬邊就能決定一個長方形，因此長邊和寬邊是同等的重要，只要約定其中的一邊為長邊，那麼剩下的另一邊就是寬邊。

題號	6		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。 備註：數線須從 0 開始。運用長度加減法 (N-2-11)，理解在數線上做加、減的意義。		
試題內容	6. 「如圖，青蛙從位置 93 向左跳 25 格，再向右跳 39 格，最後會停在哪個位置？」  <p style="text-align: center;"> <math>87 \quad 88 \quad 89 \quad 90 \quad 91 \quad 92 \quad 93 \quad 94 \quad 95</math> </p> 下列哪個算式和答案都正確？ ① $93 + 25 = 118$ 、 $118 + 39 = 157$ ，答：數字 157 ② $93 + 25 = 118$ 、 $118 - 39 = 79$ ，答：數字 79 ③ $93 - 25 = 68$ 、 $68 + 39 = 107$ ，答：數字 107 ④ $93 - 25 = 68$ 、 $68 - 39 = 29$ ，答：數字 29		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.05	0.14	0.00
2	0.15	0.26	0.06
3*	0.75	0.51	0.92
4	0.04	0.09	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.75	鑑別度	0.41
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.48，正確答案為選項③，通過率為 73%，顯示超過七成的學生已認識整數數線，能進行坐標和長度轉換及利用加減算式解題的能力。 2. 有 6%的學生選擇①(低分組有 17%)，這些學生可能無法進行坐標和長度轉換及利用加減算式解題的能力，他們都利用加法算式算出往左和往右移動後的坐標。 3. 有 16%的學生選擇②(低分組有 27%)，這些學生可能無法進行坐標和長度轉換及利用加減算式解題的能力，他們利用加法算式算出往左移動的結果，利用減法算式算出往右移動的結果。 4. 有 5%的學生選擇④(低分組有 11%)，這些學生可能無法進行坐標和長度轉換及利用加減算式解題的能力，他們都利用減法算式算出往左和往右移動後的坐標。			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-11 長度：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 S-2-3 直尺操作：測量長度。報讀公分數。指定長度之線段作圖。	N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。 備註：數線須從0開始。運用長度加減法（N-2-11），理解在數線上做加、減的意義。	N-4-8 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。

補救教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不認識整數數線。
2. 學生可能不能進行坐標和長度轉換。
3. 學生可能不具備利用加減算式解題的能力。
4. 學生可能混淆左邊和右邊的方向。

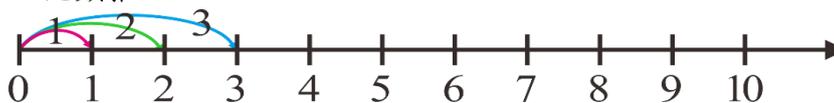
(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 可以利用直尺測量物長的經驗來認識數線，例如透過直尺測量物長是5公分，指的是刻度5和刻度0的距離是5公分，幫助學生認識數線上的刻度5有下列兩種意義：
  - (1)在數線上的位置(或坐標)是5。
  - (2)和原點0的距離是5。
2. 教師也可以將數線上奇數刻度擦掉，只留下刻度0、2、4、6、8等，為後面引入省略部分刻度的數線鋪路。  
建議教師先討論留下刻度是0、2、4、6、8等的數線，再討論留下刻度是5、10、15等或其它數字的數線。
3. 教師可以透過下列方法繪製數線，幫助學生理解整數數線的意義。

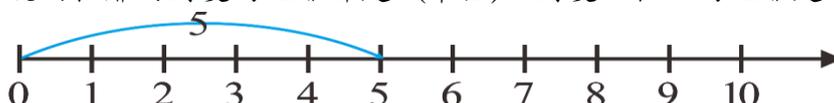
步驟一：先利用直尺上的公分刻度繪製有刻度的數線，並標示相鄰兩刻度間的距離都是1(單位)。



步驟二：再幫助學生將最左邊的刻度上標示0，在和0距離1的刻度上標示1，在和0距離2的刻度上標示2，在和0距離3的刻度上標示3，以此類推。



步驟三：說明相鄰兩刻度的距離都是1(單位)，刻度5和0的距離是5(單位)



題號	7		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	<p>N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於1」的意義。</p> <p>備註： 本年級分數教學只用「分數」一詞，不出現「真分數」與「假分數」的名詞，也不含帶分數的教學（N-4-5）。應區分真分數與假分數之教學（例如分開於上、下學期）。初步認識分數的應用時，情境應以連續量為主。若要處理離散量情境，必須與連續模型表徵強烈結合，而且其計數單位須為以整體數量為分母的單位分數（如1盒餅乾有6塊，則只處理分母6之分數，不處理2或3的情況）。</p>		
試題內容	<p>7. 一盒原子筆有12枝，媽媽買了1盒，哥哥拿走2枝，姐姐拿走<math>\frac{5}{12}</math>盒，請問還剩下多少原子筆？</p> <p>① <math>\frac{5}{12}</math> 盒</p> <p>② <math>\frac{7}{12}</math> 盒</p> <p>③ 7 枝</p> <p>④ 10 枝</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.85	0.64	0.97
2	0.10	0.22	0.02
3	0.04	0.09	0.01
4	0.01	0.04	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.85	鑑別度	0.33
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.33，正確答案為選項①，通過率為85%，顯示近九成的學生已具備在離散量情境下解決分數減法的能力。</p> <p>2. 有10%的學生選擇②(低分組有22%)，這些學生可能不具備在離散量情境下解決分數減法的能力；也可能誤解題意，算出哥哥和姐姐共拿走幾盒原子筆。</p> <p>3. 有4%的學生選擇③(低分組有9%)，這些學生可能不具備在離散量情境下解決分數減法的能力；也可能誤解題意，算出哥哥和姐姐共拿走幾枝原子筆。</p> <p>4. 有1%的學生選擇④(低分組有4%)，這些學生可能不具備在離散量情境下解決分數減法的能力；也可能不認識分數，只算出題目中兩個整數的差。</p>			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-2-10 單位分數的認識：從等分配的活動（如摺紙）認識單部分為全部的「幾分之一」。知道日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的溝通意義。在已等分割之格圖中，能說明一格為全部的「幾分之一」。</p>	<p>N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於1」的意義。 備註：本年級分數教學只用「分數」一詞，不出現「真分數」與「假分數」的名詞，也不含帶分數的教學（N-4-5）。應區分真分數與假分數之教學（例如分開於上、下學期）。初步認識分數的應用時，情境應以連續量為主。若要處理離散量情境，必須與連續模型表徵強烈結合，而且其計數單位須為以整體數量為分母的單位分數（如1盒餅乾有6塊，則只處理分母6之分數，不處理2或3的情況）。</p>	<p>N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。</p>

補救教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備在離散量情境下解決分數減法問題的能力。
2. 本題是離散量情境的減法問題，在離散量情境中使用到總量1盒、分量2枝及真分數 $\frac{5}{12}$ 盒。學生無法同時掌握1盒、1枝及 $\frac{1}{12}$ 盒這些單位的意義。
3. 學生可能不熟悉分數減法兩步驟問題。

## (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 只要題目中有兩個或兩個以上的單位，教師教學或評量時應強調處理或運算的是甚麼單位，養成學生注意單位的習慣。

2. 分數問題主要包含連續量情境和離散量情境兩部分：

連續量情境：被分割的單位量是連續完整的物件，例如繩子、披薩、果汁、蛋糕等。

離散量情境：被分割的單位量是離散的個物，例如一盒蘋果(6 個)、一袋水餃(10 個)等。

連續量情境真分數命名活動：將 1 條繩子平分剪成 5 段，其中的 2 段是  $\frac{2}{5}$  條。

離散量情境真分數命名活動：一袋糖果有 10 顆，將 1 袋糖果平分成 10 份，其中的 3 份是  $\frac{3}{10}$  袋。

在上面的情境中，連續量情境中只有「條」和「段」2 個單位，而離散量情境中有「顆」、「份」和「袋」3 個單位，建議教師先處理連續量情境分數問題，再處理離散量情境分數問題。

3. 分數的做數，也包含連續量和離散量兩部分：

連續量情境：給定一條繩子或一塊披薩，要求畫出  $\frac{3}{4}$  條繩子或  $\frac{3}{4}$  塊披薩。

離散量情境：一盒蘋果有 4 顆，要求拿出  $\frac{3}{4}$  盒蘋果。

4. 以一盒蘋果有 8 顆為例：

將 1 盒蘋果平分成 8 份，其中的 1 份是 1 顆，其中的 1 份是  $\frac{1}{8}$  盒。

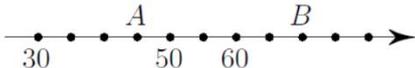
1 份是 1 顆，我們稱單位分數  $\frac{1}{8}$  盒的內容物 1 顆為單一個物。

將 1 盒蘋果平分成 4 份，其中的 1 份是 2 顆，其中的 1 份是  $\frac{1}{4}$  盒。

1 份是 2 顆，我們稱單位分數  $\frac{1}{4}$  盒的內容物 2 顆為多個個物。

5. 三年級學生可能無法掌握三個單位計數的意義，單位分數內容物為單一個物時，1 份剛好是 1 顆，學生混淆 1 顆和 1 份兩個單位也能成功的解題。但單位分數內容物為多個個物時，學生常誤認為 1 份為 1 顆。

本基本學習內容首次引離散量情境分數問題，故僅處理單位分數內容物單一個物的問題。

題號	8		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。 備註：數線須從0開始。運用長度加減法（N-2-11），理解在數線上做加、減的意義。		
試題內容	8. 下面數線上位置A和位置B各是多多少？  ① 位置A是49，位置B是62 ② 位置A是48，位置B是64 ③ 位置A是45，位置B是70 ④ 位置A是40，位置B是80		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.24	0.05
2	0.02	0.06	0.00
3*	0.80	0.61	0.93
4	0.04	0.09	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.80	鑑別度	0.32
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.32，正確答案為選項③，通過率為80%，顯示有八成的學生已認識間隔是5個單位且端點不是刻度0的整數數線。 2. 有13%的學生選擇①(低分組有24%)，這些學生可能不認識間隔是5個單位且端點不是刻度0的整數數線；這些學生也可能不理解題意，誤認為題目給定的間格都是以1為單位。 3. 有2%的學生選擇②(低分組有6%)，這些學生可能不認識間隔是5個單位且端點不是刻度0的整數數線；這些學生也可能不理解題意，誤認為題目給定的間格都是以2為單位。 4. 有4%的學生選擇④(低分組有9%)，這些學生可能不認識間隔是5個單位且端點不是刻度0的整數數線；這些學生也可能不理解題意，誤認為題目給定的間格都是以10為單位。			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-11 長度：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 S-2-3 直尺操作：測量長度。報讀公分數。指定長度之線段作圖。	N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。 備註：數線須從0開始。運用長度加減法（N-2-11），理解在數線上做加、減的意義。	N-4-8 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。

補救教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不認識間隔是5個單位且端點不是刻度0的整數數線。
2. 學生只熟悉間隔是1個、2個及10個單位的整數數線。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 可以利用直尺測量物長的經驗來認識數線，例如透過直尺測量物長是5公分，指的是刻度5和刻度0的距離是5公分，幫助學生認識數線上的刻度5有下列兩種意義：

- (1) 在數線上的位置(或坐標)是5。
- (2) 和原點0的距離是5。

2. 教師也可以將數線上奇數刻度擦掉，只留下刻度0、2、4、6、8等，為後面引入省略部分刻度的數線鋪路。

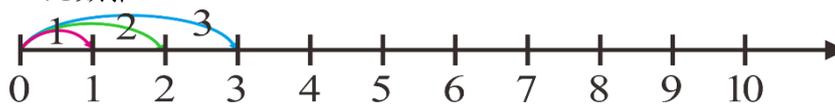
建議教師先討論留下刻度是0、2、4、6、8等的數線，再討論留下刻度是5、10、15等或其它數字的數線。

3. 教師可以透過下列方法繪製數線，幫助學生理解整數數線的意義。

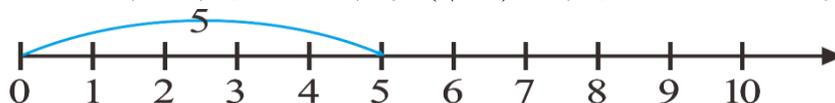
步驟一：先利用直尺上的公分刻度繪製有刻度的數線，並標示相鄰兩刻度間的距離都是1(單位)。



步驟二：再幫助學生將最左邊的刻度上標示0，在和0距離1的刻度上標示1，在和0距離2的刻度上標示2，在和0距離3的刻度上標示3，以此類推。



步驟三：說明相鄰兩刻度的距離都是1(單位)，刻度5和0的距離是5(單位)



題號	9		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-3-1 一萬以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「千」。位值單位換算。 備註：教學可進行到最後的「一萬」，但不進行超過一萬的教學。		
試題內容	<p>9. 下列哪一個四位數的千位數字比百位數字小<math>\frac{1}{2}</math>，十位數字比個位數字大？</p> <p>① 8921</p> <p>② 8050</p> <p>③ 3567</p> <p>④ 1356</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.74	0.46	0.93
2	0.09	0.18	0.03
3	0.09	0.18	0.03
4	0.08	0.17	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.74	鑑別度	0.47
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.47，正確答案為選項①，通過率為74%，顯示超過七成的學生已認識四位數的位名。</p> <p>2. 有9%的學生選擇②(低分組有18%)，這些學生可能不認識四位數的位名。</p> <p>3. 有9%的學生選擇③(低分組有18%)，這些學生可能不認識四位數的位名。</p> <p>4. 有8%的學生選擇④(低分組有17%)，這些學生可能不認識四位數的位名。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-1 一千以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「百」。位值單位換算。	N-3-1 一萬以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「千」。位值單位換算。 備註：教學可進行到最後的「一萬」，但不進行超過一萬的教學。	N-4-1 一億以內的數：位值單位「萬」、「十萬」、「百萬」、「千萬」。建立應用大數時之計算習慣，如「30萬1200」與「21萬300」的加減法。

**(一) 錯誤類型的可能原因**

1. 學生可能不認識四位數的位名。
2. 學生可能不理解題意。

**(二) 核心概念與本題的教學重點**

1. 二年級已處理過「一」和「十」單位、「一」和「百」的換算以及「十」和「百」單位的換算。

本條目建議以此為基礎，先處理「一」和「千」單位的換算，再處理「百」和「千」單位的換算，最後處理「十」和「千」單位的換算。

2. 進行 1000 以內位值單位的換算，指的是：

能將「幾千幾百幾十幾」聚成「幾個千、幾個百、幾個十、幾個一」，例如將「2357」聚成「2 個千、3 個百、5 個十、7 個一」，以及將「幾個千、幾個百、幾個十、幾個一」化成「幾千幾百幾十幾」，例如將「2 個千、3 個百、5 個十、7 個一」化成「2357」的雙向化聚。

題號	10		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 備註：基於 N-3-1 的限制，單位換算公升數限個位數。可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。		
試題內容	10. 請問「3 公升 2 毫升」和多少毫升一樣多？ ① 32000 毫升 ② 3002 毫升 ③ 302 毫升 ④ 32 毫升		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.03	0.06	0.00
2*	0.82	0.67	0.94
3	0.07	0.11	0.03
4	0.08	0.16	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.82	鑑別度	0.28
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.28，正確答案為選項②，通過率為82%，顯示超過八成的學生已具備將公升、毫升複名數化成毫升單名數的能力。 2. 有3%的學生選擇①(低分組有6%)，這些學生可能不具備將公升、毫升複名數化成毫升單名數的能力。 3. 有7%的學生選擇③(低分組有11%)，這些學生可能不具備將公升、毫升複名數化成毫升單名數的能力；也可能誤認為1公升=100毫升。 4. 有8%的學生選擇④(低分組有16%)，這些學生可能不具備將公升、毫升複名數化成毫升單名數的能力；也可能誤認為1公升=10毫升。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-2-12 容量、重量、面積：以操作活動為主。此階段量的教學應包含初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。不同的量應分不同的單元學習。 備註：雖然重量部分的教學主要使用天平，但學生仍須實際體驗重量的量感。本條目教學無常用單位（N-3-14、N-3-15、N-3-16）。</p>	<p>N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 備註：基於N-3-1的限制，單位換算公升數限個位數。可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。</p>	<p>N-5-15 解題：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。 備註：教學中須包含如何以容積的想法求不規則物體的體積。</p>
補救教學建議			
<p><b>(一) 錯誤類型的可能原因</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備將公升、毫升複名數化成毫升單名數的能力。</li> <li>2. 學生誤認為 1 公升=100 毫升或 1 公升=10 毫升。</li> </ol> <p><b>(二) 核心概念與本題的教學重點</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 因為「公升、毫公升」單位間是 1000 倍的關係，建議教師先處理大單位化為小單位的問題，再處理小單位聚成大單位的問題，但兩單位間的化聚限制在整數倍，例如「5 公升=( )毫公升」，「3000 毫公升=( )公升」。</li> <li>2. 二年級只進行容量的直接、間接及個別單位比較。 三年級引入容量單位「公升」及「毫公升(毫升)」。 兩單位間的化聚關係，只處理整數倍的化聚；而複名數的加減計算，只處理不進退位的問題。</li> <li>3. 以長度的單位為例，我國每十倍就會有一個單位的名稱，例如公里、公引、公丈、公尺、公寸、公分、公厘都是長度的單位；公制單位每十倍也會有一個單位的名稱，例如 km(千米)、hm(百米)、dam(十米)、m(米)、dm(分米)、cm(厘米)、mm(毫米)等都是長度的單位，但是日常生活中，並不需要用到這麼多的單位。 以公制長度的基本單位「米」為例，西方人認為 1000 以內的數量都是可以掌握的，因此 13 個「1 米」稱為 13 米即可，並不需引入新的單位「十米」，將 13 米稱為 1「十米」3「米」；278 個「1 米」稱為 278 米即可，並不需引入新的單位「百米」和「十米」，將 278 米稱為 2「百米」7「十米」8「米」。當「1 米」的個數超過 1000 個時，才需引入新的單位「千米」，並將 2465 個「1 米」稱為 2「千米」465「米」。</li> </ol>			

公制單位是西方人發明的，延伸西方人三位一撇的概念，在長度單位中，經常使用的單位是「千米」、「米」、「毫米」、「微米」、「奈米」，其中「千米」是「米」的 1000 倍，「米」是「毫米」的 1000 倍、「毫米」是「微米」的 1000 倍、「微米」是「奈米」的 1000 倍，也就是說，經常使用的單位間都滿足 1000 倍的關係。轉換成我們熟悉的單位，日常生活中經常使用的長度單位是「公里」、「公尺」、「公分」、「公厘」，重量單位是「公噸」、「公斤」、「公克」，容量單位是「公秉」、「公升」、「公撮」，如果將公分拿走，相鄰兩個單位間都是 1000 倍的關係。換句話說，只要能掌握三位一撇的概念，再記憶公分和公尺、公分和公厘的倍數關係，就可以掌握國小階段長度、重量、容量相鄰單位間的倍數關係。

題號	11		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-7 解題：兩步驟應用問題（加減與除、連乘）。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。 備註：乘除混合、連除在四年級（N-4-3）。		
試題內容	<p>11. 「一根長 72 公分的鐵絲，剪去 56 公分後，把剩下的鐵絲摺成一個正方形，這個正方形邊長是多多少公分？」下列哪個算式和答案都正確？</p> <p>① <math>72 - 56 = 16</math>，答：16 公分</p> <p>② <math>72 - 56 = 16</math>，<math>16 \div 4 = 4</math>，答：4 公分</p> <p>③ <math>72 \div 4 = 18</math>，<math>56 - 18 = 38</math>，答：38 公分</p> <p>④ <math>56 \div 4 = 14</math>，<math>72 - 14 = 58</math>，答：58 公分</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.18	0.37	0.04
2*	0.75	0.45	0.95
3	0.04	0.10	0.00
4	0.03	0.07	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.75	鑑別度	0.50
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.50，正確答案為選項②，通過率為75%，顯示近八成的學生已具備在具體情境中，解決先減後除兩步驟問題解題及記錄的能力。</p> <p>2. 有18%的學生選擇①(低分組有37%)，這些學生可能不具備在具體情境中，解決先減後除兩步驟問題的能力，他們只計算72公分剪去56公分得到16公分後就停止解題。</p> <p>3. 有4%的學生選擇③(低分組有10%)，這些學生可能不具備在具體情境中，解決先減後除兩步驟問題的能力；也可能誤解題意，將先減後除的兩步驟問題解讀為先除後減的兩步驟問題。</p> <p>4. 有3%的學生選擇④(低分組有7%)，這些學生可能不具備在具體情境中，解決先減後除兩步驟問題的能力；也可能不理解題意。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-8 解題：兩步驟應用問題（加、減、乘）。加減混合、加與乘、減與	N-3-7 解題：兩步驟應用問題（加減與除、連乘）。連乘、加與除、減與除	N-4-3 解題：兩步驟應用問題（乘除，連除）。乘

	乘之應用解題。不含併式。不含連乘。	之應用解題。不含併式。 備註：乘除混合、連除在四年級 (N-4-3)。	與除、連除之應用解題。
--	-------------------	--	-------------

### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 低分組學生解兩步驟問題時，最常遇到的困難是算出第一個步驟的答案後，因為答案沒有在題目中，就不知道如何繼續往下算。  
建議教師可以透過分段布題的方式，幫助學生解題。
2. 如果學生不理解題意，建議教師透過操作具體物的方式來說明題意，並要求學生再操作一次具體物，檢查學生是否理解題意。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 本學習內容 N-3-7 為 N-2-8 之後續學習概念，故學生應該已經能夠在具體情境中，解決加、減兩步驟問題；也應該已經能解決先乘後加(減)與先加(減)後乘兩步驟問題。本學習內容延伸兩步驟問題情境至「先除後加及先除後減問題」和「先加後除及先減後除問題」。
2. 先除後加(減)的問題，一定是兩步驟的問題；先加(減)後除的問題，可以是兩步驟的問題，也可以是三步驟的問題。建議教師先引入先除後加(減)的兩步驟問題，再引入先加(減)後除的兩步驟問題。
3. 以先加後除的兩步驟問題「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人的錢合起來可以買幾枝？」為例，學生可以用兩個算式「 $15+25=40$ ， $40\div 5=8$ ，答：可以買 8 枝」記錄解題活動；也可以用三個算式「 $15\div 5=3$ ， $25\div 5=5$ ， $3+5=8$ ，答：可以買 8 枝」記錄解題活動。剛開始，教師應先接受三步驟的算法，接下來，應透過分段布題或分段解題，限制學生改用兩個算式記錄解題活動，為四年級引入兩步驟問題的併式記錄及列式鋪路。
4. 以「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」為例，教師可透過分段布題的方式幫助學生用兩個算式記錄解題活動。  
 步驟一：先布問題「甲有 15 元，乙有 25 元，兩人合起來有多少元？」，用算式把做法記下來。幫助學生用算式「 $15+25=40$ 」把做法記下來。  
 步驟二：再布問題「兩人合起來有 40 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」，用算式把做法記下來。幫助學生用算式「 $40\div 5=8$ 」記錄解題活動。  
 步驟三：最後，再布原問題「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」，用兩個算式把先算什麼，再算什麼的算法記下來。幫助學生用兩個算式「 $15+25=40$ ， $40\div 5=8$ 」把做法記下來。

題號	12		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-5 除以一一位數：除法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。 備註： 須處理被除數有 0 的題型。		
試題內容	12. 將一條長 574 公分的棉線，每 8 公分剪成一段，最後剩下不滿一段的棉線長多少公分？ ① 6 公分 ② 7 公分 ③ 13 公分 ④ 71 公分		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.68	0.32	0.95
2	0.05	0.12	0.01
3	0.04	0.10	0.00
4	0.23	0.45	0.04
未作答	0.00		
通過率	0.68	鑑別度	0.63
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.63，正確答案為選項①，通過率為68%，顯示近七成的學生已具備三位數除以一一位數直式計算的能力。 2. 有5%的學生選擇②(低分組有12%)，這些學生可能不具備三位數除以一一位數直式計算的能力；也可能不理解題意。 3. 有4%的學生選擇③(低分組有10%)，這些學生可能不具備三位數除以一一位數直式計算的能力；也可能不理解題意。 4. 有23%的學生選擇④(低分組有45%)，這些學生可能已具備三位數除以一一位數直式計算的能力，但看不懂題意，誤把商看成餘數來作答。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-2-9            解題：分裝與平分。以操作活動為主。除法前置經驗。理解分裝與平分之意義與方法。引導學生在解題過程，發現問題和乘法模式的關連。            備註：本條目非除法教學，不列除式，不用「除」的名稱(N-3-4)。限相當於整除的問題。教學應在「十十乘法」範圍中進行。可用幾個一數或連減協助，但不可成為答題格式。</p>	<p>N-3-5            除是一位數：除法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。            備註：須處理被除數有0的題型。</p>	<p>N-4-9            長度：「公里」。生活實例之應用。含其他長度單位的換算與計算。            備註：量的大單位教學仍應協助學生建立基本量感。</p>
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備三位數除一位數除法直式計算的能力。</li> <li>2. 學生可能不理解題意，誤把商看成餘數來作答。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 基本乘法事實是二位數除一位數及三位數除一位數直式計算的基礎。以<math>78 \div 5</math>為例，直式進行了2次一位數乘以5的計算。以<math>678 \div 5</math>為例，直式進行了3次一位數乘以5的計算。教師應要求學生熟練二位及三位數乘以一位數的乘法直式計算，並將計算的結果記成一行，為除數是二、三位數的除法直式計算鋪路。</li> <li>2. 以「659元平分給4個人，每個人最多分到幾元，還剩下多少元？」為例，說明如何幫助學生學習除法直式計算。           <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 有兩種分解659的方法，第一種是將659分解成<math>600 + 50 + 9</math>，第二種是將659分解成6個百、5個十和9個一。第二種方法會讓計算的數字變小，本基本學習內容透過第二種分解方式引入除法直式計算。</li> <li>(2) 將659元分解成6張百元鈔票、5枚十元硬幣和9個一元硬幣。先將6張百元鈔票平分給4個人，每人分到1張百元鈔票，還剩下2張百元鈔票不夠分；將2張百元鈔票換成20枚的十元硬幣，再加上原有的5枚十元硬幣，合起來有25枚十元硬幣；25枚十元硬幣平分給4個人，每人分到6枚十元硬幣，還剩下1枚十元硬幣不夠分；將1枚十元硬幣換成10個一元硬幣，加上原有的9個一元硬幣，合起來有19個一元硬幣；19個一元硬幣平分給4人，每人分到4個一元硬幣，還剩下3個一元硬幣。合起來每個人分到1張百元鈔票、6枚十元硬幣和4個1元硬幣，還剩下3個一元硬幣，也就是每人分到164元，剩下3元。</li> </ol> </li> </ol>			

(3) 用直式將解題過程記錄下來，並說明每個步驟的意義，如果學生混淆不同單位平分的意義，教師可以在直式上方畫出定①、⑩、100來說明。

	百	十	個	
	<u>100</u>	⑩	①	
	1	6	4	⇒分到 1 張百元、6 枚十元和 4 個一元，也就是 164 元。
4	6	5	9	⇒6 張百元鈔票、5 枚十元硬幣和 9 個一元硬幣。
	4			⇒先分 6 張百元鈔票，每人分到 1 張，還剩下 2 張。
	2	5		⇒換成 20 枚十元，加上原有的 5 枚，有 25 枚十元。
	2	4		⇒再分 25 枚十元，每人分到 6 枚，剩下 1 枚十元。
		1	9	⇒換成 10 個一元，加上原有的 9 個，有 19 個一元。
		1	6	⇒再分 19 個一元，每人分到 4 個一元。
			3	⇒剩下 3 個一元。

題號	13		
內容領域	關係	認知歷程向度	解題思考
學習內容	R-3-2 數量模式與推理 (I)：以操作活動為主。一維變化模式之觀察與推理，例如數列、一維圖表等。 備註：含學生之簡單推理與說明。本教學活動不可出現公式，此非本條目之學習目標。可結合表格教學 (D-3-1)。		
試題內容	<p>13. 觀察下列圖形的排列規律，圖五中共有多少個*？</p> <p>圖一 圖二 圖三</p> <p>① 7 個 ② 9 個 ③ 10 個 ④ 15 個</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.03	0.07	0.01
2	0.12	0.22	0.04
3	0.30	0.36	0.23
4*	0.54	0.33	0.73
未作答	0.00		
通過率	0.54	鑑別度	0.40
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.40，正確答案為選項④，通過率為54%，顯示超過五成的學生已具備一維變化模式推理的能力。</p> <p>2. 有3%的學生選擇①(低分組有%)，這些學生可能尚未具備一維變化模式推理的能力；也可能誤解題意，僅用題目圖三的數量再加1當作答案。</p> <p>3. 有12%的學生選擇②(低分組有22%)，這些學生可能尚未具備一維變化模式推理的能力；也可能誤解題意，僅用題目圖三的數量再加2當作答案。</p> <p>4. 有30%的學生選擇③(低分組有36%)，這些學生可能已具備一維變化模式推理的能力；也可能誤解題意，僅計算出圖四的數量就停止計算。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	D-2-1 分類與呈現：以操作活動為主。能蒐集、分類、記錄、呈現資料、生活物件或幾何形體。討論分類之中還可以再分類的情況。 備註：非正式表格與統計圖表教學（見 D-1-1 備註）。可配合平面圖形與立體形體教學（S-2-2）。	R-3-2 數量模式與推理（I）：以操作活動為主。一維變化模式之觀察與推理，例如數列、一維圖表等。 備註：含學生之簡單推理與說明。本教學活動不可出現公式，此非本條目之學習目標。可結合表格教學（D-3-1）。	R-4-2 四則計算規律（I）：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。
補救教學建議			
<p><b>(一) 錯誤類型的可能原因</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不理解題意，只算出下一個圖形的花片個數。</li> <li>2. 學生可能尚未具備一維變化模式推理的能力。</li> </ol> <p><b>(二) 核心概念與本題的教學重點</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 三年級首次引入數量模式與推理，希望學生透過觀察數列、一維圖表等，能說出一維變化模式之規律；找出一維變化模式的下一項，並說明理由。 二年級至四年級的兩步驟問題，以及五年級的三步驟問題，都限制在整數情境，六年級才引入分數及小數的多步驟問題。</li> <li>2. 以問題「想想看，第 4 個圖形有幾個圈？○○○、○○○○、○○○○○」為例，本學習內容只要求學生找出下一個圖形有 6 個圈，並說明理由即可，不必要求學生找出其它項，例如不必找出第 18 個圖形是什麼。</li> <li>3. 教師提供數列讓學生討論時，並沒有定義數列的一般項，因此當我們只給定數列前幾項時，可以有很多定義數列的方法。 以「2、3、5、□、□」為例，下面都是合理的答案。 <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 2、3、5、8、12 (3 比 2 多 1、5 比 3 多 2、8 比 5 多 3、12 比 8 多 4)</li> <li>(2) 2、3、5、8、13 (2+3=5、3+5=8、5+8=13)</li> <li>(3) 2、3、5、10、20 (2+3=5、2+3+5=10、2+3+5+10=20)</li> <li>(4) 2、3、5、7、11 (將質數由小至大依序排列)</li> </ol>           教師提供數列讓學生討論時，應接受不同的合理答案，但學生只要能說出一種合理的答案即可。         </li> </ol>			

題號	14		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-3-8 解題：四則估算。具體生活情境。較大位數之估算策略。能用估算檢驗計算結果的合理性。 備註： 估算解題的布題應貼近生活情境。本年級剛學除法，因此估算問題須簡單。		
試題內容	14. 將 1 袋糖果平均分成 3 堆，每堆大約有 300 顆糖果，下列哪個選項的答案最接近這 1 袋糖果的顆數？ ① 748 顆 ② 890 顆 ③ 990 顆 ④ 1195 顆		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.28	0.05
2*	0.62	0.34	0.85
3	0.20	0.30	0.10
4	0.03	0.07	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.62	鑑別度	0.51
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.55，正確答案為選項②，通過率為60%，顯示六成的學生已具備利用乘法估算解題的能力。 2. 有17%的學生選擇①(低分組有31%)，這些學生可能不具備利用乘法估算解題的能力。 3. 有20%的學生選擇③(低分組有30%)，這些學生可能已具備利用乘法估算解題的能力，他們這些學生可能用300乘以3得到900，因為沒有900的選項，所以選比900大的990。 4. 有3%的學生選擇④(低分組有8%)，這些學生可能不具備利用乘法估算解題的能力。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-4 解題：簡單加減估算。具體生活情境。以百位數估算為主。 備註：估算解題的布題應貼近生活情境。	N-3-8 解題：四則估算。具體生活情境。較大位數之估算策略。能用估算檢驗計算結果的合理性。 備註：估算解題的布題應貼近生活情境。本年級剛學除法，因此估算問題須簡單。	N-4-4 解題：對大數取概數。具體生活情境。四捨五入法、無條件進入、無條件捨去。含運用概數做估算。近似符號「 $\approx$ 」的使用。 備註：估算解題的布題應貼近生活情境。以概數協助估算須包含四則估算。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備利用乘法估算解題的能力。</li> <li>2. 學生可能用300乘以3得到900，因為沒有900的選項而選錯。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 估算與取概數都無法精確地描述個數，因而容忍少量的差異，只做大概的描述，但是它們最後描述的單位並不相同。估算是計算的問題，例如「<math>402+299</math>」中的402很接近400，299很接近300，<math>400+300=700</math>，所以「<math>402+299</math>」估算的答案是700，估算的答案必須以「1」為單位來描述。概算是先進行單位量轉換後再計算的問題，例如「<math>402+299</math>」中的402很接近4個百，299很接近3個百，4個百加3個百是7個百，所以「<math>402+299</math>」概算的答案是7個百，概算的答案不是以「1」為單位來描述。</li> <li>2. 本學習內容為四捨五入法取概數的前置經驗，在此不宜進行取概數的教學。例如：「甲有699元，甲最多有幾張100元？」是取概數的問題。</li> <li>3. 教師在評量估算問題時，<u>不宜</u>直接要求估算結果的標準答案，例如不可直接提問「<math>398\div 8</math>的答案大約是多少？」，因為50和49都是合理的答案。教師只宜布下列的問題： 例如 <math>398\div 8=(\quad)</math>，答案最接近60、50、40中的哪一個數字？</li> <li>4. 當學生計算發生錯誤時，例如得到「<math>599\times 2=1398</math>」的結果，教師可以透過問話「<math>599\times 2</math>很接近<math>600\times 2</math>，<math>600\times 2=1200</math>，<math>599\times 2=1398</math>是否合理？」，幫助學生檢驗答案的合理性。</li> </ol>			

題號	15		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-7 解題：兩步驟應用問題（加減與除、連乘）。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。 備註： 乘除混合、連除在四年級（N-4-3）。		
試題內容	<p>15. 王奶奶熬煮了 798 公克草莓果醬，全部平均分裝成 7 罐，裝草莓果醬的空罐重 105 公克，一罐果醬重多少公克？</p> <p>① 114 公克 ② 129 公克 ③ 219 公克 ④ 903 公克</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.25	0.34	0.12
2	0.08	0.16	0.02
3*	0.54	0.26	0.82
4	0.12	0.22	0.04
未作答	0.01		
通過率	0.54	鑑別度	0.56
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.56，正確答案為選項③，通過率為54%，顯示超過五成的學生已具備重量情境先除後加兩步驟問題解題的能力。</p> <p>2. 有25%的學生選擇①(低分組有34%)，這些學生可能尚未具備重量情境先除後加兩步驟問題解題的能力，僅計算出798公克平分裝成7罐後，就停止解題。</p> <p>3. 有8%的學生選擇②(低分組有16%)，這些學生可能已具備重量情境先除後加兩步驟問題解題的能力，但在計算「114+105」時發生錯誤。</p> <p>4. 有 12%的學生選擇④(低分組有 22%)，這些學生可尚未具備重量情境先除後加兩步驟問題解題的能力；也可能不理解題意，僅將題目中提到的兩個重量相加當作答案。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-8 解題：兩步驟應用問題(加、減、乘)。加減混合、加與乘、減與乘之應用解題。不含併式。不含連乘。	N-3-7 解題：兩步驟應用問題(加減與除、連乘)。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。 備註：乘除混合、連除在四年級(N-4-3)。	N-4-3 解題：兩步驟應用問題(乘除、連除)。乘與除、連除之應用解題。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 低分組學生解兩步驟問題時，最常遇到的困難是算出第一個步驟的答案後，因為答案沒有在題目中，就不知道如何繼續往下算。 建議教師可以透過分段布題的方式，幫助學生解題。</li> <li>2. 如果學生不理解題意，建議教師透過操作具體物的方式來說明題意，並要求學生再操作一次具體物，檢查學生是否理解題意。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本學習內容 N-3-7 為 N-2-8 之後續學習概念，故學生應該已經能夠在具體情境中，解決加、減兩步驟問題；也應該已經能解決先乘後加(減)與先加(減)後乘兩步驟問題。本學習內容延伸兩步驟問題情境至「先除後加及先除後減問題」和「先加後除及先減後除問題」。</li> <li>2. 先除後加(減)的問題，一定是兩步驟的問題；先加(減)後除的問題，可以是兩步驟的問題，也可以是三步驟的問題。建議教師先引入先除後加(減)的兩步驟問題，再引入先加(減)後除的兩步驟問題。</li> <li>3. 以先加後除的兩步驟問題「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人的錢合起來可以買幾枝？」為例，學生可以用兩個算式「<math>15+25=40</math>，<math>40\div 5=8</math>，答：可以買 8 枝」記錄解題活動；也可以用三個算式「<math>15\div 5=3</math>，<math>25\div 5=5</math>，<math>3+5=8</math>，答：可以買 8 枝」記錄解題活動。剛開始，教師應先接受三步驟的算法，接下來，應透過分段布題或分段解題，限制學生改用兩個算式記錄解題活動，為四年級引入兩步驟問題的併式記錄及列式鋪路。</li> <li>4. 以「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」為例，教師可透過分段布題的方式幫助學生用兩個算式記錄解題活動。            步驟一：先布問題「甲有 15 元，乙有 25 元，兩人合起來有多少元？」，用算式把做法記下來。幫助學生用算式「<math>15+25=40</math>」把做法記下來。            步驟二：再布問題「兩人合起來有 40 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」，用算式把做法記下來。幫助學生用算式「<math>40\div 5=8</math>」記錄解題活動。            步驟三：最後，再布原問題「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」，用兩個算式把先算什麼，再算什麼的算法記下來。幫助學生用兩個算式「<math>15+25=40</math>，<math>40\div 5=8</math>」把做法記下來。</li> </ol>			

題號	16		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-3-3 乘以一位數：乘法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被乘數為二、三位數。 備註：須處理被乘數有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。最後須能以一列算出答案。多位數乘以一位數隱含之分配律來自操作經驗與數感，而非分配律教學。		
試題內容	16. 算算看看，□內要填入哪個數？ $\begin{array}{r} 3 \square 7 \\ \times \quad \quad 6 \\ \hline 2 \ 3 \ 2 \ 2 \end{array}$ <p>           ① 2            ② 3            ③ 7            ④ 8         </p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.26	0.03
2	0.19	0.25	0.10
3	0.14	0.23	0.05
4*	0.54	0.25	0.82
未作答	0.01		
通過率	0.54	鑑別度	0.57
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.57，正確答案為選項④，通過率為54%，顯示超過五成的學生已具備三位數乘以一位數乘法直式計算的能力。 2. 有13%的學生選擇①(低分組有26%)，這些學生可能不具備三位數乘以一位數乘法直式計算的能力，他們不理會7乘以6是42，可以換成4個⑩和2個①，只看到積的十位數字是2， $2 \times 6 = 12$ ，所以認為□內應該填入2。 3. 有19%的學生選擇②(低分組有25%)，這些學生可能不具備三位數乘以一位數乘法直式計算的能力，他們可能算出7個①的6倍是42個①，可以換成4個⑩和2個①，因為被乘數的十位數字未知，積的十位數字是2， $4 + 8 = 12$ ，學生可能從6的乘法中找出個位數字是8的積，6乘3是18，所以認為□內應該填入3。 4. 有14%的學生選擇③(低分組有23%)，這些學生可能不具備三位數乘以一位數乘法直式計算的能力，他們不理會7乘以6是42，可以換成4個⑩和2個①，只看到積的十位數字是2， $7 \times 6 = 42$ ，所以認為□內應該填入7。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。 備註：可在乘法解題脈絡中，自然使用連加算式，不限步驟。最後能以行列模型理解乘法交換律(R-2-3)。</p> <p>N-2-7 十十乘法：乘除直式計算的基礎，以熟練為目標。 備註：本單元應和乘法概念的學習同時進行，不可要求學生死背乘法表。本條目的學習可協助在除法情境（如 N-2-9）中察覺乘與除的關係。</p>	<p>N-3-3 乘以一位數：乘法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被乘數為二、三位數。 備註：須處理被乘數有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。最後須能以一列算出答案。多位數乘以一位數隱含之分配律來自操作經驗與數感，而非分配律教學。</p>	<p>N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。 備註：直式計算乘數與除數限三位。直式計算須注意 0 的教學。較大位數除法須進行估商的教學。知道如「<math>1600 \times 200</math>」與「<math>60000 \div 400</math>」這類算式，可發展出更簡單的計算方法。</p>
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備三位數乘以一位數乘法直式計算的能力。</li> <li>2. 教師應要求學生由被乘數的個位開始計算，並養成算出□內要填入的數字後，必須驗算判斷答案是否正確的習慣。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 二位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為二位數乘法直式計算的基礎，也是除數為二位數除法直式計算的基礎。 以 <math>34 \times 678</math> 為例，直式進行 3 次 34 乘以一位數 6、7、8 的計算。 以 <math>4613 \div 72</math> 為例，學生估商時進行 2 次 72 乘以一位數的計算。 三位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為三位數乘法直式計算的基礎，也是除數為三位數除法直式計算的基礎。 以 <math>345 \times 678</math> 為例，直式進行了 3 次 345 乘以一位數 6、7、8 的計算。 以 <math>4613 \div 172</math> 為例，學生估商時進行了 2 次 172 乘以一位數的計算。</li> <li>2. 有兩種分解 147 的方法，第一種是將 147 分解成 100、40 和 7；第二種是將 147 分解成 1 個百 4 個十和 7 個一。乘法直式計算採用第二種分解方式，使得每一個單位的個數都不超過 10，藉以簡化計算。 下面的圖一是第一種分解方法的乘法直式計算，圖二是第二種分解方法的乘法直式計算。</li> </ol>			

不易將第一種分解方法的乘法直式計算結果記成一行，學生必須先將  $7 \times 6$ 、 $40 \times 6$ 、 $200 \times 6$  的計算結果記在心裡，再心算出這三個數的和，才能將圖一的計算結果改記成一行，國小三年級的學生不易做到。

千	百	十	個
1000	100	10	1
	1	4	7
×			6
		4	2
	2	4	
+	6		
	8	8	2

⇒

千	百	十	個
1000	100	10	1
	1	4	7
×			6
		8	2

因為「4」和「24」都是「十」單位，只要心算出「 $4+24$ 」，就可以省略記成一行。  
 因為「2」和「6」都是「百」單位，只要出「 $2+6$ 」，就可以省略記成一行。  
 因此可以省略記成一行。

3. 以「 $147 \times 6$ 」為例，說明如何幫助學生將乘法直式計算的積摘要的記成一行。

千	百	十	個
1000	100	10	1
	1	4	7
×			6
		4	2
	2	4	
+	6		
	8	8	2

⇒

千	百	十	個
1000	100	10	1
	1	4	7
×			6
	8	8	2

因為「4」和「24」都是「十」單位，只要心算出「 $4+24$ 」，就可以省略記成一行。

因為「2」和「6」都是「百」單位，只要出「 $2+6$ 」，就可以省略記成一行。  
 因此可以省略記成一行。

4. 一位數乘以二位數的直式計算比二位數乘以一位數的直式計算困難，一位數乘以三位數的直式計算比三位數乘以一位數的直式計算困難，而且不是大數字乘法直式計算的先備知識，教師只要幫助學生理解直式計算解題的意義即可，不必要求熟練。

當學生認識乘法交換律後，教師可以幫助學生利用乘法交換律，將一位數乘以二位數的計算問題，例如  $7 \times 34$ ，改用二位數(三位數)乘以一位數的直式，例如  $34 \times 7$  算出答案。將一位數乘以三位數的計算問題，例如  $7 \times 348$ ，改用三位數乘以一位數的直式，例如  $348 \times 7$  算出答案。

題號	17		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-2 加減直式計算：含加、減法多次進、退位。 備註：須處理數字中有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。		
試題內容	<p>17. 哥哥和弟弟分別用 4 張數字卡 <b>4</b>、<b>0</b>、<b>3</b>、<b>7</b> 排四位的數。哥哥排出最大的四位的奇數，弟弟排出最小的四位的偶數，他們排出的四位的數相差多少？</p> <p>① 4329 ② 3933 ③ 3267 ④ 297</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.40	0.26	0.57
2	0.23	0.22	0.22
3	0.19	0.24	0.12
4	0.17	0.27	0.08
未作答	0.01		
通過率	0.40	鑑別度	0.31
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.31，正確答案為選項①，通過率為40%，顯示有四成的學生已具備減法直式計算的能力。</p> <p>2. 有23%的學生選擇②(低分組有22%)，這些學生可能已具備減法直式計算的能力，但誤解題意；誤用7403-3470算出答案。</p> <p>3. 有19%的學生選擇③(低分組有24%)，這些學生可能誤解題意，誤用7304-4037算出答案。</p> <p>4. 有17%的學生選擇④(低分組有27%)，這些學生可能誤解題意，誤用4037-3740算出答案。</p>			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-2-2 加減算式與直式計算：用位值理解多位數加減計算的原理與方法。初期可操作、橫式、直式等方法並陳，二年級最後歸結於直式計算，做為後續更大位數計算之基礎。直式計算的基礎為位值概念與基本加減法，教師須說明直式計算的合理性。</p> <p>N-2-3 解題：加減應用問題。加數、被加數、減數、被減數未知之應用解題。連結加與減的關係 (R-2-4)。</p>	<p>N-3-2 加減直式計算：含加、減法多次進、退位。 備註：須處理數字中有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。</p>	<p>N-4-1 一億以內的數：位值單位「萬」、「十萬」、「百萬」、「千萬」。建立應用大數時之計算習慣，如「30 萬 1200」與「21 萬 300」的加減法。</p>

補救教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備減法直式計算的能力。
2. 學生可能不認識奇數與偶數。
3. 學生可能無法將 4 張數字卡排出最大的四位奇數與最小的四位偶數。

(二) 核心概念與本題的教學重點

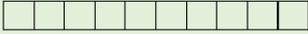
1. 以退位減法計算問題「 $1235 - 678$ 」為例，進行個位計算時，因為 5 減 8 不夠減，拿 1 個十換 10 個一之後，有兩種解題的方法：第一種是利用基本加減事實來解題，直接利用  $15 - 8 = 7$ ，算出和的個位數字是 7，第二種是利用拆十來解題，透過  $10 - 8 = 2$ ， $2 + 5 = 7$ ，算出和的個位數字是 7。三年級學生應該已熟記基本加減事實，建議教師幫助學生利用第一種方法來解題。

2. 有兩種使用定位板的時機，第一種是溝通數字的位值及位名，第二種是直式計算溝通不同單位的個數，引入定位板時，教師應說明下面三個限制：

- (1) 記錄「幾」個十的時候，只能將「幾」記錄在十位，記錄「幾」個一的時候，只能將「幾」記錄在個位。

以「將 3 個十，5 個一記在定位板上」為例，定位板記錄不同單位的個數，因此必須將 3 個十的 3 記在十位，5 個一的 5 記在個位，才能夠溝通不同單位計數的意義。

- (2) 一個位置只能記錄 1 個數碼。

十位	個位
	
3	15

以「將 3 個十，15 個一記在定位板上」為例，將 3 個十的 3 記在十位，將

15 個一的 15 記在個位，如上圖。

當定位板存在時，可以清楚的溝通有 3 個十，15 個一，但是脫離定位板記成 315 後，會和三百一十五混淆。因此數學上限制一個位置只能記錄 1 個數碼，必須將 3 個十，15 個一改記成 4 個十，5 個一。

(3) 某位值的個數是 0 時，必須記 0。

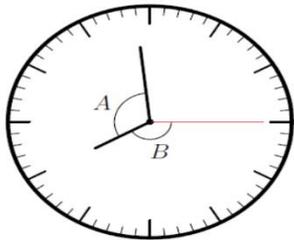
十位	個位
	
5	0

以「將 5 個十記在定位板上」為例，將 5 個十的 5 記在十位，如上圖。

當定位板存在時，可以清楚的溝通有 5 個十，但是脫離定位板記成 5 後，會和 5 個一混淆，因此數學上限制當個位數字是 0 時，必須在個位上記 0。

3. 三年級引入奇數與偶數的定義時。教師可以從生活經驗中幫助學生認識物件的個數是奇數個或偶數個。例如透過點數花片，說明花片兩個一數剛好數完，沒有剩下時，稱花片的個數是偶數個；當兩花片兩個一數無法剛好數完，還剩下 1 個時，稱花片的個數是奇數個。為以後引入奇數與偶數的定義鋪路。

學生在一年級已有利用 2 個一數，點數物件個數的經驗，教師可以拿出百數表，要求學生圈出 2 個一數的數詞序列，幫助學生認識這些數字都是偶數，偶數的個位數字是 0、2、4、6、8。再說明沒有圈到的數字，2 個一數都會剩下 1 個，所以沒有圈到的數字都是奇數，奇數的個位數字是 1、3、5、7、9。

題號	18		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	解題思考
學習內容	S-3-1 角與角度（同 N-3-13）：以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 備註： 同 N-3-13 備註。		
試題內容	<p>18. 如圖，時鐘上面有三根指針。</p>  <p>下面關於「A 角、B 角和直角」這三個角大小的敘述，何者正確？</p> <p>① A 角最大，B 角最小          ② B 角最大，A 角最小          ③ B 角最大，直角最小          ④ 直角最大，A 角最小</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.23	0.36	0.09
2	0.29	0.35	0.18
3*	0.40	0.15	0.70
4	0.08	0.13	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.40	鑑別度	0.55
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.55，正確答案為選項③，通過率為 40%，顯示有四成的學生已認識直角，並具備利用角度直接與間接比較解題的能力。</p> <p>2. 有 23% 的學生選擇①(低分組有 36%)，這些學生可能不具備利用角度直接與間接比較解題的能力，因為標示 A 角的弧比標示 B 角的弧長(或扇形面積比較大)，這些學生誤認為 A 角比 B 角大。</p> <p>3. 有 29% 的學生選擇②(低分組有 35%)，這些學生可能已具備利用角度直接與間接比較解題的能力，但是題目中沒有標示出直角，這些學生只選擇圖中的 A 角比 B 角小的答案。</p> <p>4. 有 8% 的學生選擇④(低分組有 13%)，這些學生可能不具備利用角度直接與間接比較解題的能力；也可能不認識直角，誤以為直角最大。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-2-1 物體之幾何特徵：以操作活動為主。進行辨認與描述之活動。藉由實際物體認識簡單幾何形體(包含平面圖形與立體形體)，並連結幾何概念(如長、短、大、小等)。 備註：本條目之活動以實際物體為主。幾何特徵指非嚴格定義的頂點、角、邊、面、周界、內外。	S-3-1 角與角度(同 N-3-13)：以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 備註：同 N-3-13 備註。	N-4-10 角度：「度」(同 S-4-1)量角器的操作。實測、估測與計算。以角的合成認識 180 度到 360 度之間的角度。「平角」、「周角」。指定角度作圖。 備註：量角器教學須包括從量角器左右兩側進行量角之活動。

### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用角度直接與間接比較解題的能力。
2. 學生可能不認識直角。
3. 學生混淆角張開的程度及標示弧長(或扇形面積)的意義，誤認為標示的弧比較長(或扇形面積比較大)，角就比較大。
4. 圖中沒有標示出直角，學生無法比較未標示的直角和給定角的大小。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師透過直尺、三角板、正方形或長方形幫助學生認識直角，並能判斷給定的角和直角的大小關係。三年級還沒有引入角度的常用單位「度」，不能說直角的角是 90 度。
2. 三年級討論的對象是「張開角」，張開角指的是共端點兩重合線段張開的結果，共同的端點稱為頂點，張開後的兩線段稱為邊，因為張開後的形狀像圖形的角，故稱之為張開角。張開角的角度指的是張開的程度，選定單位量後，可以把角張開的程度數量化，討論張開角的角度不宜超過 180 度(不含平角)。
3. 學生常透過邊的長短、扇形面積的大小、弧的長短等特徵，來比較兩個角張開程度的大小，例如學生常誤認下圖右邊那個角的角度比較大，可能的理由是學生只看到張開角張開後的結果，並沒有看到張開的過程，無法理解張開程度的意義，建議教師透過實作，讓學生經驗張開角張開程度的意義。



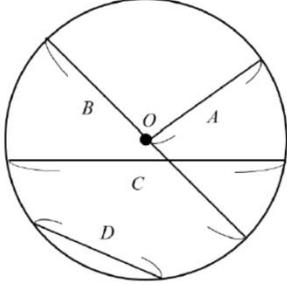
4. 建議教師透過下面的操作，幫助學生理解角的大小指的是張開程度的大小。

先拿出兩把扇子，其中一把扇子的邊比較長，稱為甲扇，另一把扇子的邊比較短，稱為乙扇，先張開甲扇，問學生扇子張開了多大，學生可能描述

扇子的面積、弧長等與張開程度無關的答案；此時可將乙扇張開到和甲扇一樣大，再問學生這兩把扇子張開的程度是否一樣，此時兩把扇子的面積、邊長及弧長都不相同，只有張開的程度相同，強迫學生排除邊的長短、扇形面積的大小、弧的長短等因素，將注意力放在張開程度上。接下來，再將乙扇張開一些，問哪一把扇子張開的程度比較大，此時甲扇的邊長、弧長都比乙扇長，甲扇的面積也比乙扇大，只有張開的程度比較小，可以檢查學生是否掌握張開程度的意義。

題號	19		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-3-1 一萬以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「千」。位值單位換算。 備註：教學可進行到最後的「一萬」，但不進行超過一萬的教學。		
試題內容	<p>19. 四<sub>位</sub>的<sub>數</sub> 5851 中<sub>的</sub>，數<sub>字</sub> 8 代<sub>表</sub>的<sub>數</sub>是<sub>800</sub>。</p> <p>請<sub>問</sub>左<sub>邊</sub>的<sub>數</sub>字<sub>5</sub>和<sub>右</sub>邊<sub>的</sub>的<sub>數</sub>字<sub>5</sub>所<sub>代</sub>表<sub>的</sub>的<sub>數</sub>相<sub>差</sub>多<sub>少</sub>？</p> <p>① 5749 ② 4955 ③ 4950 ④ 4500</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.20	0.02
2	0.11	0.20	0.03
3*	0.62	0.34	0.86
4	0.17	0.25	0.09
未作答	0.01		
通過率	0.62	鑑別度	0.53
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.53，正確答案為選項③，通過率為62%，顯示超過六成的學生已具備位值單位換算及減法直式計算的能力。</p> <p>2. 有9%的學生選擇①(低分組有20%)，這些學生可能尚未具備位值單位換算及減法直式計算的能力；這些學生也可能不理解題意。</p> <p>3. 有11%的學生選擇②(低分組有20%)，這些學生可能不理解題意，他們知道左邊的5代表5000，右邊的5代表50，但是在計算相差多少時，多加了1個5，<math>5000 - 50 = 4950</math>，<math>4950 + 5 = 4955</math>，得到4955的答案。</p> <p>4. 有17%的學生選擇④(低分組有25%)，這些學生可能尚未具備位值單位換算的能力，誤用<math>5000 - 500</math>計算出答案。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-1 一千以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「百」。位值單位換算。	N-3-1 一萬以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「千」。位值單位換算。 備註：教學可進行到最後的「一萬」，但不進行超過一萬的教學。	N-4-1 一億以內的數：位值單位「萬」、「十萬」、「百萬」、「千萬」。建立應用大數時之計算習慣，如「30萬1200」與「21萬300」的加減法。
補救教學建議			
<p><b>(一) 錯誤類型的可能原因</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>有兩種解讀 5851 的方法： <ol style="list-style-type: none"> <li><math>5851 = 5000 + 800 + 50 + 1</math>。</li> <li>5851 和 5 個千、8 個百、5 個十和 1 個一合起來一樣大。 學生可能混淆這兩種解讀方法意義。</li> </ol> </li> <li>學生可能熟悉千位的 5 所代表的值是十位 5 的 100 倍，不熟悉千位的 5 所代表的值和十位的 5 所代表的值相差多少。</li> </ol> <p><b>(二) 核心概念與本題的教學重點</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>二年級已處理過「一」和「十」單位、「一」和「百」的換算以及「十」和「百」單位的換算。建議以此為基礎，先處理「一」和「千」單位的換算，再處理「百」和「千」單位的換算，最後處理「十」和「千」單位的換算。</li> <li>進行 1000 以內位值單位的換算，指的是： <p>能將「幾千幾百幾十幾」聚成「幾個千、幾個百、幾個十、幾個一」，例如將「2357」聚成「2 個千、3 個百、5 個十、7 個一」，以及將「幾個千、幾個百、幾個十、幾個一」化成「幾千幾百幾十幾」，例如將「2 個千、3 個百、5 個十、7 個一」化成「2357」的雙向化聚。</p> </li> <li>建議教師透過下面步驟幫助學生解題 <ol style="list-style-type: none"> <li>步驟一：說明四位數 5851 中，左邊數字 5 及右邊數字 5 各自的意義。 <ol style="list-style-type: none"> <li>溝通個數：千位數字 5 指的是有 5 個千，十位數字 5 指的是有 5 個十。</li> <li>溝通是多少個一：5 個千和 5000 一樣大，5 個十和 50 一樣大。</li> </ol> </li> <li>步驟二：不同單位不可以相加減，須將千位數字和十位數字轉換成相同的單位。 <p>千位數字 5 所表示的值(以一為單位)是 5000。</p> <p>十位數字 5 所表示的值(以一為單位)是 50。</p> </li> <li>步驟三：算出千位數字 5 所代表的值 和 十位數字 5 所代表的值相差多少。 <math>5000 - 50 = 4950</math></li> </ol> </li> </ol>			

題號	20		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	解題思考
學習內容	S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。 備註：知道圓心是認識圓的重要定義元素，但是圓心並不屬於圓。		
試題內容	<p>20. 下圖是一個半徑 3 公分的圓，<math>O</math> 點是圓心，<math>D</math> 線段長 3 公分。</p>  <p>甲說：分別以 <math>A</math> 線段和 <math>D</math> 線段長為半徑，畫出來的兩個圓一樣大。</p> <p>乙說：<math>B</math> 線段和 <math>C</math> 線段都是這個圓的直徑。</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有甲正確          ② 只有乙正確          ③ 甲和乙都正確          ④ 甲和乙都不正確</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.21	0.13	0.34
2	0.20	0.28	0.12
3	0.13	0.20	0.08
4	0.45	0.38	0.46
未作答	0.01		
通過率	0.21	鑑別度	0.20

### 試題品質分析

1. 本題鑑別度為0.20，正確答案為選項①，通過率為21%，顯示超過兩成的學生已認識「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」的意義。
2. 有20%的學生選擇②(低分組有28%)，這些學生可能不認識「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」的意義，他們可能認為過圓心及水平的弦都是直徑。
3. 有13%的學生選擇③(低分組有20%)，這些學生可能不認識「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」的意義，他們可能認為過圓心及水平的弦都是直徑。
4. 有45%的學生選擇④(低分組有38%)，這些學生可能不認識「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」的意義，他們知道沒有過圓心的弦不是直徑，但誤認為畫出來的兩個圓要完全疊合才算一樣大，而不是半徑一樣長的圓就是一樣大。

### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>S-2-1 物體之幾何特徵：以操作活動為主。進行辨認與描述之活動。藉由實際物體認識簡單幾何形體（包含平面圖形與立體形體），並連結幾何概念（如長、短、大、小等）。備註：本條目之活動以實際物體為主。幾何特徵指非嚴格定義的頂點、角、邊、面、周界、內外。</p>	<p>S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。 備註：知道圓心是認識圓的重要定義元素，但是圓心並不屬於圓。</p>	<p>S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合（幾分之幾圓）。能畫出指定扇形。 備註：扇形含圓心角大於180度的情況。理解如「圓心角90度的扇形是<math>\frac{1}{4}</math>圓」等的結論。畫出指定扇形包括「給定一圓，能畫出<math>\frac{1}{3}</math>圓、<math>\frac{1}{6}</math>圓等扇形」、「畫出指定半徑與圓心角的扇形」。</p>

### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不認識「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」的意義。
2. 學生可能認為過圓心及水平的弦都是直徑。
3. 學生可能認為畫出來的兩個圓要完全疊合才算一樣大，而不是半徑一樣長的圓就是一樣大。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師應區分「圓(circle)」和「圓區域(disc)」的意義：  
圓：在平面上選定一定點O，在平面上與定點O的距離是 $r$  ( $r > 0$ )的所有點所成的集合稱為圓，該定點O稱為圓心， $r$ 稱為半徑。

圓區域：圓和圓內部合起來稱為圓區域。利用圓規畫圓時，畫出來的圖形是圓，利用摺紙找出圓的直徑時，所摺的圖形是圓區域。

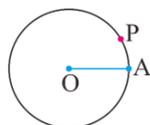
教師應區分圓或圓區域使用的時機及其限制。

2. 以下圖為例，有下列幾種描述半徑的方法：

- (1) 稱 OA 線段為半徑，此時的半徑是一條線段。
- (2) 稱 OP 兩點的距離為半徑，此時的半徑是兩點的距離。
- (3) 稱半徑 = 5 公分，此時的 5 公分可能是 OA 線段的長度，也可能是 OP 兩點的距離。
- (4) 半徑是集合，學生必須發現圓心 O 和圓上任意點連成的線段都一樣或發現

圓心 O 和圓上任意點的距離都相等，才能掌握所有半徑都等長意義。

這四種描述的方法中，第一種是學生最容易接受的方法，但是用圓規畫圓時，學生看不到線段 OA，只能看到針尖和筆尖兩點的距離，建議在圓規兩腳之間綁上繩子或橡皮筋，讓學生在畫圓時，能看到針尖和筆尖的距離，也能看到連接針尖和筆尖的線段。



3. 有兩種溝通半徑與直徑關係的方法：

方法一：分別量出半徑與直徑的長度，例如半徑長 5 公分，直徑長 10 公分，再利用除法算式  $10 \div 5 = 2$ ，說明直徑長是半徑長的 2 倍。

方法二：在圓上畫出直徑，幫助學生發現直徑是由兩條半徑組成的，所以 2 條半徑接起來的長度和直徑一樣長。

10 是 5 的 2 倍是基準量和比較量關係的描述，指的是以 5 為基準量 1 時，

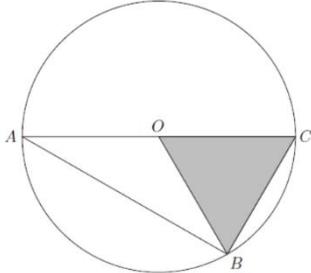
比較量 10 會是 2，三年級學生較無法掌握 10 是 5 的 2 倍的意義。

建議教師利用方法二說明半徑與直徑的關係。

題號	21		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過 2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於 1」的意義。 備註：本年級分數教學只用「分數」一詞，不出現「真分數」與「假分數」的名詞，也不含帶分數的教學（N-4-5）。應區分真分數與假分數之教學（例如分開於上、下學期）。初步認識分數的應用時，情境應以連續量為主。若要處理離散量情境，必須與連續模型表徵強烈結合，而且其計數單位須為以整體數量為分母的單位分數（如 1 盒餅乾有 6 塊，則只處理分母 6 之分數，不處理 2 或 3 的情況）。		
試題內容	21. 甲說：邊長 1 公分的正方形面積是 1 平方公分， 所以一邊長 $\frac{1}{2}$ 公分的正方形面積是 $\frac{1}{2}$ 平方公分。 乙說：把邊長 1 公分的正方形分成 2 塊， 其中 1 塊的面積是 $\frac{1}{2}$ 平方公分。 請問哪些人的說法正確？ ① 只有甲正確 ② 只有乙正確 ③ 甲和乙都正確 ④ 甲和乙都不正確		
試題品質分析			
本題評量的重點是分數的概念，對應指標為 N-3-9，試題的描述及評量重點皆合理，惟題幹被分割的物件是 1 平方公分，考量翰林版本於三下第九單元才引入 1 平方公分的概念，故建議此題不記分。			
教材地位分析			
無			
補救教學建議			
無			

題號	22		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-3-16 重量：「公斤」、「公克」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 備註：基於 N-3-1 的限制，單位換算公斤數限個位數。可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。		
試題內容	<p>22. 王媽媽到市場買了一顆鳳梨和一粒小玉西瓜。已經知道鳳梨的重量是 1800 公克，鳳梨和小玉西瓜合起來的重量是 4 公斤 900 公克，請問小玉西瓜重多少？</p> <p>① 500 公克 ② 1300 公克 ③ 3 公斤 100 公克 ④ 6 公斤 700 公克</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.02	0.06	0.00
2	0.09	0.18	0.03
3*	0.81	0.59	0.96
4	0.06	0.16	0.01
未作答	0.01		
通過率	0.81	鑑別度	0.37
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.37，正確答案為選項③，通過率為81%，顯示超過八成的學生已具備重量單位複名數加減計算的能力。</p> <p>2. 有 2%的學生選擇①(低分組有 6%)，這些學生可能不具備重量單位複名數加減計算的能力；也可能認為 1 公斤=100 公克，利用 4 公斤 900 公克=400 公克+900 公克=1300 公克，1800 公克-1300 公克=500 公克，得到小玉西瓜重 500 公克的答案。</p> <p>3. 有 9%的學生選擇②(低分組有 18%)，這些學生可能已具備重量單位複名數加減計算的能力，但是誤解題意，利用 4 公斤 900 公克-1800 公克-1800 公克=1300 公克，得到小玉西瓜重 1300 公克的答案。</p> <p>4. 有 6%的學生選擇④(低分組有 16%)，這些學生可能已具備重量單位複名數加減計算的能力，但是誤解題意，利用 4 公斤 900 公克+1800 公克=6 公斤 700 公克，得到小玉西瓜重 6 公斤 700 公克的答案。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-2-12 容量、重量、面積：以操作活動為主。此階段量的教學應包含初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。不同的量應分不同的單元學習。 備註：雖然重量部分的教學主要使用天平，但學生仍須實際體驗重量的量感。本條目教學無常用單位（N-3-14、N-3-15、N-3-16）。</p>	<p>N-3-16 重量：「公斤」、「公克」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 備註：基於N-3-1的限制，單位換算公斤數限個位數。可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。</p>	<p>N-5-13 重量：「公噸」。生活實例之應用。含與「公斤」的換算與計算。使用概數。 備註：教師應運用學生熟悉的生活示例，體會各單位的量感。</p>
補救教學建議			
<p><b>(一) 錯誤類型的可能原因</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備重量單位複名數加減計算的能力。</li> <li>2. 學生誤認為 1 公斤 = 100 公克。</li> <li>3. 學生可能不理解重量情境文字題的意義。</li> </ol> <p><b>(二) 核心概念與本題的教學重點</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 長度、面積、角度等可以透過視覺看到單位量的累積，利如透過直尺的刻度，觀察 5 個 1 公分接起來和 5 公分一樣長的關係，也可以透過點數知道 5 個 1 平方公分合起來是 5 平方公分的意義。但重量無法透過視覺看到單位量的累積，例如無法理解為什麼 5 個 1 公克合起來和 5 公克一樣重的意義，教師可以透過天平或秤，建立普遍單位的意義。例如先利用天平，幫助學生發現 5 個 1 公克的砝碼合起來和 1 個 5 公克的砝碼一樣重，所以 5 個 1 公克合起來的重量就是 5 公克；或利用秤，幫助學生發現 5 公克的砝碼重 5 公克，5 個 1 公克砝碼的重量也是 5 公克，所以 5 個 1 公克合起來的重量是 5 公克。</li> <li>2. 因為「公斤、公克」單位間是 1000 倍的關係，建議教師先處理大單位化為小單位的問題，再處理小單位聚成大單位的問題，但兩單位間的化聚限制在整數倍，例如「5 公斤 = ( ) 公克」，「3000 公克 = ( ) 公斤」。</li> <li>3. 教師應幫助學生進行複名數的命名活動，認識 3 公斤和 50 公克合起來的重量是 3 公斤 50 公克，3 公斤 50 公克是 3 公斤和 50 公克合起來的重量。</li> </ol>			

題號	23		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	解題思考
學習內容	S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。 備註：知道圓心是認識圓的重要定義元素，但是圓心並不屬於圓。		
試題內容	<p>23. 如圖，<math>A</math>、<math>B</math>、<math>C</math> 三點都在圓周上，<math>O</math> 是圓心，塗色部分是一個邊長為 5 公分的正三角形。</p>  <p>甲說：<math>AB</math> 線段比 10 公分短。 乙說：圓的半徑是 5 公分。 丙說：<math>BC</math> 線段和 <math>OA</math> 線段一樣長。</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有甲、乙正確 ② 只有甲、丙正確 ③ 只有乙、丙正確 ④ 甲、乙、丙都正確</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.22	0.24	0.19
2	0.26	0.30	0.18
3	0.29	0.27	0.31
4*	0.22	0.17	0.32
未作答	0.02		
通過率	0.22	鑑別度	0.15

試題品質分析

1. 本題鑑別度為 0.15，正確答案為選項④，通過率為 22%，顯示超過兩成的學生已具備半徑、直徑及弦長度長短比較的能力。
2. 有 22%的學生選擇①(低分組有 24%)，這些學生可能不具備半徑、直徑及弦長度長短比較的能力；也可能無法利用正三角形三邊等長來推論 BC 線段和 OA 線段一樣長。
3. 有 26%的學生選擇②(低分組有 30%)，這些學生可能不具備半徑、直徑及弦長度長短比較的能力；也可能無法利用正三角形三邊等長的特徵來推論出圓的半徑是 5 公分。
4. 有 29%的學生選擇③(低分組有 27%)，這些學生可能不具備半徑、直徑及弦長度長短比較的能力；也可能不知道直徑是最長的弦。

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>S-2-2 簡單幾何形體：以操作活動為主。包含平面圖形與立體形體。辨認與描述平面圖形與立體形體的幾何特徵並做分類。</p>	<p>S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。 備註：知道圓心是認識圓的重要定義元素，但是圓心並不屬於圓。</p>	<p>S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合（幾分之幾圓）。能畫出指定扇形。 備註：扇形含圓心角大於 180 度的情況。理解如「圓心角 90 度的扇形是 <math>\frac{1}{4}</math> 圓」等的結論。畫出指定扇形包括「給定一圓，能畫出 <math>\frac{1}{3}</math> 圓、<math>\frac{1}{6}</math> 圓等扇形」、「畫出指定半徑與圓心角的扇形」。</p>

**(一) 錯誤類型的可能原因**

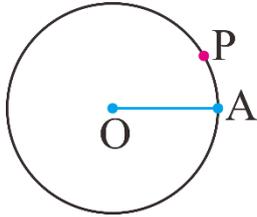
1. 學生可能不具備半徑、直徑及弦長度長短比較的能力。
2. 學生可能無法利用正三角形三邊等長來推論 BC 線段和 OA 線段一樣長。
3. 學生可能不知道直徑是最長的弦。

**(二) 核心概念與本題的教學重點**

1. 本學習內容 S-3-3 為 S-2-2 之後續學習概念，故學生應該已經能辨認簡單平面圖形(圓、三角形、正方形、長方形等)。

本學習內容首次引入周界是曲線的平面圖形，幫助學生認識圓的圓心、圓周、半徑與直徑，以及半徑與直徑長度的關係，並幫助學生使用圓規畫圓。

2. 以下圖為例，有下列幾種描述半徑的方法：



- (1) 稱 OA 線段為半徑，此時的半徑是一條線段。
  - (2) 稱 OP 兩點的距離為半徑，此時的半徑是兩點的距離。
  - (3) 稱半徑=5 公分，此時的 5 公分可能是 OA 線段的長度，也可能是 OP 兩點的距離。
  - (4) 半徑是集合，學生必須發現圓心 O 和圓上任意點連成的線段都一樣或發現圓心 O 和圓上任意點的距離都相等，才能掌握所有半徑都等長意義。這四種描述的方法中，第一種是學生最容易接受的方法，但是用圓規畫圓時，學生看不到線段 OA，只能看到針尖和筆尖兩點的距離，建議在圓規兩腳之間綁上繩子或橡皮筋，讓學生在畫圓時，能看到針尖和筆尖的距離，也能看到連接針尖和筆尖的線段。
3. 部分三年級學生尚未掌握所有平面圖形所成集合的意義，因此，本學習內容只討論給定圓的直徑長是半徑長的 2 倍，不討論所有圓的直徑長都是半徑長的 2 倍。
  4. 有兩種溝通半徑與直徑關係的方法：
 

方法一：分別量出半徑與直徑的長度，例如半徑長 5 公分，直徑長 10 公分，再利用除法算式  $10 \div 5 = 2$ ，說明直徑長是半徑長的 2 倍。

方法二：在圓上畫出直徑，幫助學生發現直徑是由兩條半徑組成的，所以 2 條半徑接起來的長度和直徑一樣長。

10 是 5 的 2 倍是基準量和比較量關係的描述，指的是以 5 為基準量 1 時，比較量 10 會是 2，三年級學生較無法掌握 10 是 5 的 2 倍的意義。建議教師利用方法二說明半徑與直徑的關係。

題號	24		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	<p>N-3-4 除法：除法的意義與應用。基於 N-2-9 之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十十乘法範圍的除法，做為估商的基礎。</p> <p>備註：建議先處理整除情境，再處理有餘數的情境。教學中應有乘、除法並陳之單元，讓學生能主動察覺乘法與除法問題的差異。</p>		
試題內容	<p>24. 桌上糖果比 100 顆多一點。老師將桌上的糖果平分給一些小朋友，最後剩下 7 顆，請問老師可能平分給多少位小朋友？</p> <p>① 5 位 ② 6 位 ③ 7 位 ④ 8 位</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.21	0.12
2	0.21	0.24	0.16
3	0.19	0.29	0.10
4*	0.41	0.23	0.61
未作答	0.02		
通過率	0.41	鑑別度	0.39
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.39，正確答案為選項④，通過率為41%，顯示超過四成的學生已掌握餘數必須小於除數的約定。</p> <p>2. 有17%的學生選擇①(低分組有21%)，這些學生可能無法掌握餘數必須小於除數的約定。</p> <p>3. 有21%的學生選擇②(低分組有24%)，這些學生可能無法掌握餘數必須小於除數的約定。</p> <p>4. 有19%的學生選擇③(低分組有29%)，這些學生可能無法掌握餘數必須小於除數的約定。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-2-9            解題：分裝與平分。以操作活動為主。除法前置經驗。理解分裝與平分之意義與方法。引導學生在解題過程，發現問題和乘法模式的關連。            備註：本條目非除法教學，不列除式，不用「除」的名稱(N-3-4)。限相當於整除的問題。教學應在「十乘法」範圍中進行。可用幾個一數或連減協助，但不可成為答題格式。</p>	<p>N-3-4            除法：除法的意義與應用。基於N-2-9之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十乘法範圍的除法，做為估商的基礎。            備註：建議先處理整除情境，再處理有餘數的情境。教學中應有乘、除法並陳之單元，讓學生能主動察覺乘法與除法問題的差異。</p>	<p>N-3-5            除一位數：除法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。            備註：除法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。            N-3-6            解題：乘除應用問題。乘數、被乘數、除數、被除數未知之應用解題。連結乘與除的關係(R-3-1)。            備註：可使用解題策略協助學生理解與轉化問題(例如「倍」的語言、空格算式、乘除互逆等)。本條目不須另立單元教學。            R-3-1            乘法與除法的關係：乘除互逆。應用於驗算與解題。            備註：理解例如「3的幾倍是15」、「什麼數的4倍是12」要用除法列式解題。</p>
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能無法掌握餘數必須小於除數的約定。</li> <li>2. 學生可能不理解題意。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 理解除法算式的意義包含下列部分：           <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 知道「被除數」、「除數」、「商」、「餘數」的名稱及意義。</li> <li>(2) 理解商及餘數的意義，知道餘數可以為0，而且一定要小於除數。</li> <li>(3) 理解商及餘數的意義，知道被除數減餘數後就能整除。</li> </ol> </li> </ol>			

2. 「 $a \div b = q \dots r$ ， $q$  是整數， $0 \leq r < b$ 」中，餘數的範圍是「 $0 \leq r < b$ 」，也就是說，剩下 0 個中的 0 也是餘數。例如「將 12(或 13、14)個蘋果平分給 3 個人」，

學生必須解題成功，才知道餘數是 0(或 1、2)。

建議教師命題時，不論餘數是否為 0，都要同時詢問商數及餘數。

例如：將 14 個蘋果平分給 3 個人，每人最多分到幾個蘋果，還剩下多少個蘋果？將 12 個蘋果平分給 3 個人，每人最多分到幾個蘋果，還剩下多少個蘋果？

3. 以包含除問題「14 個蘋果，每 3 個蘋果裝 1 盒，最多可裝滿幾盒，還剩下多少個蘋果？」為例，學生可能有下列三種解題的方法。

方法一：利用加法來解題

$$3+3=6, 6+3=9, 9+3=12, 14-12=2。$$

透過點數算式中有 4 個 3，得到最多可裝滿 4 盒，還剩下 2 個蘋果。

方法二：利用減法來解題

$$14-3=11, 11-3=8, 8-3=5, 5-3=2，$$

透過點數算式中有 4 個 3，得到最多可裝滿 4 盒，還剩下 2 個蘋果。

方法三：嘗試錯誤

三年級學生應該已熟記十乘乘法，可以利用  $3 \times 4 = 12$ ， $14 - 12 = 2$ ，得到最多可裝滿 4 盒，還剩下 2 個蘋果。

4. 以等分除問題「將 14 個蘋果平分給 3 個人，每人最多分到幾個蘋果，還剩下多少個蘋果？」為例，學生可能有下列二種解題的方法。

方法一：嘗試錯誤

三年級學生應該已熟記十乘乘法，可以利用  $4 \times 3 = 12$ ， $14 - 12 = 2$ ，得到最多分到 4 個蘋果，還剩下 2 個蘋果。

方法二：利用「一次一人分 1 個蘋果」來解題

步驟一：教師先做出 3 個人的位置，說明一次一人分 1 個蘋果，有 3 個人，所以一次可以分掉 3 個蘋果。

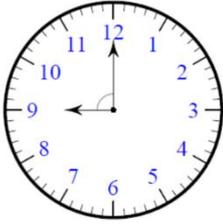
步驟二：第一次分掉 3 個蘋果，每人分到 1 個蘋果，還剩下 11 個蘋果，可以用減法算式  $14 - 3 = 11$  把做法記下來。

第二次也分掉 3 個蘋果，每人分到 1 個蘋果，還剩下 8 個蘋果，可以用減法算式  $11 - 3 = 8$  把做法記下來。

第三次也分掉 3 個蘋果，每人分到 1 個蘋果，還剩下 5 個蘋果，可以用減法算式  $8 - 3 = 5$  把做法記下來。

第四次也分掉 3 個蘋果，每人分到 1 個蘋果，還剩下 2 個蘋果，不夠再分一次，可以用減法算式  $5 - 3 = 2$  把做法記下來。

步驟三：每次一人分到 1 個蘋果，一共分了 4 次，所以一人共分到 4 個蘋果，還剩下 2 個蘋果。

題號	25		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	解題思考
學習內容	S-3-1 角與角度（同 N-3-13）：以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 備註：同 N-3-13 備註。		
試題內容	<p>25. 如圖，「9 點整」時，時針和分針的夾角是直角。</p>  <p>下列是甲、乙兩人對時針和分針夾角的說法。</p> <p>甲說：「7 點整」分針和時針的夾角比「8 點整」小。</p> <p>乙說：「2 點整」分針和時針的夾角和「10 點整」一樣大。</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有甲正確</p> <p>② 只有乙正確</p> <p>③ 甲和乙都正確</p> <p>④ 甲和乙都不正確</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.22	0.03
2*	0.58	0.30	0.84
3	0.13	0.19	0.06
4	0.16	0.27	0.06
未作答	0.02		
通過率	0.58	鑑別度	0.54

### 試題品質分析

1. 本題鑑別度為0.54，正確答案為選項②，通過率為58%，顯示近六成的學生已具備角度直接比較與間接比較的能力。
2. 有11%的學生選擇①(低分組有22%)，這些學生可能不具備角度直接比較與間接比較的能力，他們認為7比8小，所以7點兩針的夾角比8點兩針的夾角小，10和2不一樣大，所以10點兩針的夾角和2點兩針的夾角不一樣大。
3. 有13%的學生選擇③(低分組有19%)，這些學生可能不具備角度直接比較與間接比較的能力，他們認為7比8小，所以7點兩針的夾角比8點兩針的夾角小。
4. 有16%的學生選擇④(低分組有27%)，這些學生可能不具備角度直接比較與間接比較的能力，他們認為10和2不一樣大，所以10點兩針的夾角和2點兩針的夾角不一樣大。

### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-2-2 簡單幾何形體：以操作活動為主。包含平面圖形與立體形體。辨認與描述平面圖形與立體形體的幾何特徵並做分類。	S-3-1 角與角度（同 N-3-13）：以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 備註：同 N-3-13 備註。	S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合（幾分之幾圓）。能畫出指定扇形。 備註：扇形含圓心角大於 180 度的情況。理解如「圓心角 90 度的扇形是 $\frac{1}{4}$ 圓」等的結論。畫出指定扇形包括「給定一圓，能畫出 $\frac{1}{3}$ 圓、 $\frac{1}{6}$ 圓等扇形」、

### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備角度直接比較與間接比較的能力。
2. 學生可能沒有依題意畫圖的能力。
3. 學生可能認為7比8小，所以7點兩針的夾角比8點兩針的夾角小；10和2不一樣大，所以10點兩針的夾角和2點兩針的夾角不一樣大。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師透過直尺、三角板、正方形或長方形幫助學生認識直角，並能判斷給定的角和直角的大小關係。三年級還沒有引入角度的常用單位「度」，不能說直角的角是 90 度。

2. 三年級討論的對象是「張開角」，張開角指的是共端點兩重合線段張開的結果，共同的端點稱為頂點，張開後的兩線段稱為邊，因為張開後的形狀像圖形的角，故稱之為張開角。張開角的角度指的是張開的程度，選定單位量後，可以把角張開的程度數量化，討論張開角的角度不宜超過 180 度(不含平角)。

3. 學生常透過邊的長短、扇形面積的大小、弧的長短等特徵，來比較兩個角張開程

度的大小，例如學生常誤認下圖右邊那個角的角度比較大，可能的理由是學生只看到張開角張開後的結果，並沒有看到張開的過程，無法理解張開程度的意義，建議教師透過實作，讓學生經驗張開角張開程度的意義。



4. 建議教師透過下面的操作，幫助學生理解角的大小指的是張開程度的大小。

先拿出兩把扇子，其中一把扇子的邊比較長，稱為甲扇，另一把扇子的邊比較短，稱為乙扇，先張開甲扇，問學生扇子張開了多大，學生可能描述扇子的面積、弧長等與張開程度無關的答案；此時可將乙扇張開到和甲扇一樣大，再問學生這兩把扇子張開的程度是否一樣，此時兩把扇子的面積、邊長及弧長都不相同，只有張開的程度相同，強迫學生排除邊的長短、扇形面積的大小、弧的長短等因素，將注意力放在張開程度上。接下來，再將乙扇張開一些，問哪一把扇子張開的程度比較大，此時甲扇的邊長、弧長都比乙扇長，甲扇的面積也比乙扇大，只有張開的程度比較小，可以檢查學生是否掌握張開程度的意義。

## 陸、四年級試題選項分析與教學建議

題號	1		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-4-3 解題：兩步驟應用問題（乘除，連除）。乘與除、連除之應用解題。 備註：由於除法有等分除和包含除兩種類型，教學應注意題型的多元性。可和併式學習一起進行（R-4-1）。		
試題內容	1. 果園收成了 3200 顆蜜棗，每 40 顆蜜棗裝一箱，每箱賣 1000 元，全部賣完，共收入多少元？  ① 80000 ② 40000 ③ 1080 ④ 80		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.84	0.60	0.98
2	0.08	0.20	0.01
3	0.03	0.10	0.00
4	0.05	0.10	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.84	鑑別度	0.38
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.38，正確答案為選項①，通過率為84%，顯示超過八成的學生已具備先除再乘兩步驟問題解題的能力。 2. 有8%的學生選擇②(低分組有20%)，這些學生可能不具備先除再乘兩步驟問題解題的能力，只算出40乘以1000就停止解題。 3. 有3%的學生選擇③(低分組有10%)，這些學生可能不具備先除再乘兩步驟問題解題的能力；也可能誤解題意，將先除再乘的兩步驟問題看成先除再加的兩步驟問題。 4. 有5%的學生選擇④(低分組有10%)，這些學生可能不具備先除再乘兩步驟問題解題的能力，僅算出3200顆蜜棗，每40顆蜜棗裝一箱，共可裝成80箱蜜棗後就停止解題。			

教材地位分析				
		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-3-7 解題：兩步驟應用問題(加減與除、連乘)。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。 備註：乘除混合、連除在四年級(N-4-3)。	N-4-3 解題：兩步驟應用問題(乘除，連除)。乘與除、連除之應用解題。 備註：由於除法有等分除和包含除兩種類型，教學應注意題型的多元性。可和併式學習一起進行(R-4-1)。	N-5-2 解題：多步驟應用問題。除「平均」之外，原則上為三步驟解題應用。 備註：以學生較熟悉、能直接併式之問題為原則。本條目要求併式。須含分配律情境之三步驟問題，以和分配律教學連結(R-5-2)。	
補救教學建議				
(一) 錯誤類型的可能原因				
<ol style="list-style-type: none"> <li>學生在進行兩步驟應用問題解題時，最常遇到的困難是不知道用「<math>3200 \div 40 = 80</math>」算出「3200 顆蜜棗可以裝成 80 箱」後，所得到的「80 箱」還可以繼續運算。如果教師沒有使用分段布題或分段解題，引導學生使用兩個算式記錄解題活動，學生可能產生上述錯誤。</li> <li>如果學生不理解題意，建議教師透過簡化題目數據或操作具體物的方式來說明題意，並要求學生依操作過程說明題意，以檢查學生是否理解題意。</li> </ol>				
(二) 核心概念與本題的教學重點				
<ol style="list-style-type: none"> <li>乘、除及連除兩步驟問題是兩步驟問題中最困難的題型，學生已熟練先乘後加(減)、先加(減)後乘、先除後加(減)、先加(減)後除、連乘兩步驟問題，並不表示學生也熟練乘、除及連除兩步驟問題。如果學生無法解乘、除及連除兩步驟問題，教師應透過分段布題的方式，幫助學生用兩個算式記錄解題活動。</li> <li>以「1 袋餅乾有 30 包，老師買了 5 袋，平分給 25 個人，每個人可以分到多少包餅乾？」為例，教師可透過分段布題的方式，幫助學生用兩個算式記錄解題活動。            步驟一：先布問題「1 袋餅乾有 30 包，老師買了 5 袋，共有多少包？」，用算式把做法記下來。幫助學生用算式「<math>30 \times 5 = 150</math>」把做法記下來。            步驟二：再布問題「150 包餅乾，平分給 25 個人，每個人可以分到多少包餅乾？」，用算式把做法記下來。幫助學生用算式「<math>150 \div 25 = 6</math>」記錄解題活動。            步驟三：回到原問題「1 袋餅乾有 30 包，老師買了 5 袋，平分給 25 個人，每個人可以得多少包餅乾？」，用兩個算式把先算什麼，再算什麼的算法記下來。幫助學生用兩個算式「<math>30 \times 5 = 150</math>，<math>150 \div 25 = 6</math>」把做法記下來。</li> </ol>				

題號	2																																		
內容領域	資料與不確定性	認知歷程向度	解題思考																																
學習內容	D-3-1 一維表格與二維表格：以操作活動為主。報讀、說明與製作生活中的表格。二維表格含列聯表。 備註：製作表格不限於日常資料統計性題材，也可應用於觀察數量模式的變化（R-3-2）。																																		
試題內容	<p>2. 下表是喜樂國小一到六年級的學生人數統計表，其中有一些格子剛好被墨水弄髒了，看不到統計的數字。</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>年級 \ 性別</th> <th>一</th> <th>二</th> <th>三</th> <th>四</th> <th>五</th> <th>六</th> <th>合計</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>男生</td> <td>28</td> <td>33</td> <td>A</td> <td>26</td> <td>34</td> <td>28</td> <td>B</td> </tr> <tr> <td>女生</td> <td>28</td> <td>23</td> <td>31</td> <td>18</td> <td>23</td> <td>26</td> <td>149</td> </tr> <tr> <td>合計</td> <td>56</td> <td>56</td> <td>55</td> <td>C</td> <td>57</td> <td>54</td> <td>D</td> </tr> </tbody> </table> <p>根據上表，下列哪個說法正確？</p> <p>① D 遮住的是全校總人數</p> <p>② 全校男生總數比全校女生總數少</p> <p>③ 一到六年級中，人數最少的是六年級</p> <p>④ 三年級男生人數比三年級女生人數多</p>			年級 \ 性別	一	二	三	四	五	六	合計	男生	28	33	A	26	34	28	B	女生	28	23	31	18	23	26	149	合計	56	56	55	C	57	54	D
年級 \ 性別	一	二	三	四	五	六	合計																												
男生	28	33	A	26	34	28	B																												
女生	28	23	31	18	23	26	149																												
合計	56	56	55	C	57	54	D																												
選答率	答題反應比率（*表正確答案）																																		
選項	整體	低分組	高分組																																
1*	0.87	0.71	0.98																																
2	0.05	0.11	0.01																																
3	0.04	0.11	0.00																																
4	0.03	0.07	0.01																																
未作答	0.00																																		
通過率	0.87	鑑別度	0.28																																
試題品質分析																																			
<p>1. 本題鑑別度為0.28，正確答案為選項①，通過率為87%，顯示近九成的學生已具備報讀二維表格的能力。</p> <p>2. 有5%的學生選擇②(低分組有11%)，這些學生可能尚未具備報讀二維表格的能力。</p> <p>3. 有4%的學生選擇③(低分組有11%)，這些學生可能尚未具備報讀二維表格的能力。</p> <p>4. 有3%的學生選擇④(低分組有7%)，這些學生可能尚未具備報讀二維表格的能力。</p>																																			

### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	D-2-1 分類與呈現：以操作活動為主。能蒐集、分類、記錄、呈現資料、生活物件或幾何形體。討論分類之中還可以再分類的情況。備註：非正式表格與統計圖表教學（見 D-1-1 備註）。可配合平面圖形與立體形體教學（S-2-2）。	D-3-1 一維表格與二維表格：以操作活動為主。報讀、說明與製作生活中的表格。二維表格含列聯表。備註：製作表格不限於日常資料統計性題材，也可應用於觀察數量模式的變化（R-3-2）。	D-4-1 報讀長條圖與折線圖以及製作長條圖：報讀與說明生活中的長條圖與折線圖。配合其他領域課程，學習製作長條圖。備註：教學與示例應注意處理「分類資料」與「有序變化性資料」之差別。

### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生混淆了二維表格中兩個不同屬性的「合計」項目。
2. 學生可能不瞭解題意或是看錯題目。
3. 學生可能不具備報讀二維表格的能力。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 一維表格指的是考慮的屬性只有一個，例如「各班人數統計表」，是以不同班級為考慮的屬性。

班別	1 班	2 班	3 班	4 班	5 班
人數	26	24	25	27	25

2. 二維表格指的是考慮的屬性有兩個，例如「幸福國小社團男女學生人數調查表」，是以不同社團與不同性別為考慮的屬性。

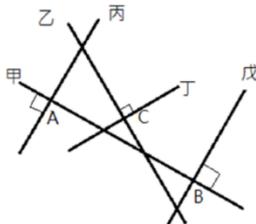
幸福國小課後社團學生人數調查表

社團 性別	桌球社	魔術社	圍棋社	羽球社	美術社
男生	15	20	12	17	10
女生	14	17	16	15	18

3. 所謂「列聯表」是以列表方式表示兩個屬性出現的頻率，將兩個屬性出現頻率置於行和列的位置，且可以從表格中最後的行或列看出一個屬性的組合頻。例如「三年甲班男女學生近視人數統計表」。

三年甲班男女學生近視人數統計表

有無近視 性別	有近視	沒近視	合計
男生	6	8	14
女生	5	8	13
合計	11	16	27

題號	3		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	概念理解
學習內容	<p>S-4-5 垂直與平行：以具體操作為主。直角是 90 度。直角常用記號。垂直於一線的兩線相互平行。平行線間距離處處相等。作垂直線；作平行線。</p> <p>備註：透過操作和觀察知道平行線間距離處處相等，非數學證明。</p>		
試題內容	<p>3. 下圖中甲、乙、丙、丁、戊為五條線，<math>A</math> 點為甲線跟丙線的交點，<math>B</math> 點為甲線跟戊線的交點，<math>C</math> 點為乙線跟丁線的交點。</p>  <p>下列敘述何者<u>錯誤</u>？</p> <p>① 甲、戊兩線互相垂直          ② 乙、丁兩線互相垂直          ③ 丙、丁兩線互相平行          ④ 丙、戊兩線互相平行</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.05	0.09	0.02
2	0.08	0.15	0.02
3*	0.83	0.65	0.96
4	0.04	0.10	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.83	鑑別度	0.30
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.30，正確答案為選項③，通過率為83%，顯示超過八成的學生已具備判斷兩線平行或垂直的能力。</p> <p>2. 有5%的學生選擇①(低分組有9%)，這些學生可能尚未具備判斷兩線平行或垂直的能力；這些學生也可能誤解題意，選擇正確的敘述。</p> <p>3. 有8%的學生選擇②(低分組有15%)，這些學生可能尚未具備判斷兩線平行或垂直的能力；這些學生也可能誤解題意，選擇正確的敘述。</p> <p>4. 有4%的學生選擇④(低分組有10%)，這些學生可能尚未具備判斷兩線平行或垂直的能力；這些學生也可能誤解題意，選擇正確的敘述。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-3-1 角與角度（同 N-3-13）：以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 備註：用直尺或三角板的直角來認識與複製直角。教學應處理角大小與邊長長短或面積大小混淆之常見錯誤。	S-4-5 垂直與平行：以具體操作為主。直角是 90 度。直角常用記號。垂直於一線的兩線相互平行。平行線間距離處處相等。作垂直線；作平行線。 備註：透過操作和觀察知道平行線間距離處處相等，非數學證明。	S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。
補救教學建議			
<p><b>(一) 錯誤類型的可能原因</b></p> <p>1. 學生直觀的判斷兩線是否平行或垂直，沒有利用平行或垂直的定義來檢驗兩線是否平行或垂直。</p> <p>    平行線的定義：同時垂直於另一條直線的兩直線互相平行。</p> <p>    垂直線的定義：兩直線相交且交角中有一個角為直角，稱這兩條直線互相垂直。</p> <p>2. 學生可能在兩條直線的情境中能夠判斷這兩條直線是否平行或垂直，但是在五條直線的情境中，可能漏判斷某兩條直線的平行或垂直關係。</p> <p><b>(二) 核心概念與本題的教學重點</b></p> <p>1. 針對平行與垂直下定義，也就是給定一個判斷兩線是否互相平行或互相垂直的方法。</p> <p>    兩線平行：L1 與 L2 同時垂直於 L，稱 L1 與 L2 兩線互相平行。</p> <p>    兩線垂直：L1 與 L2 相交且有一個交角為直角，稱 L1 與 L2 兩線互相垂直。</p> <p>2. 平面上存在下圖中三種垂直的情境，第一種情境只存在 1 個直角，第二種情境存在 2 個直角，第三種情境存在 4 個直角，這三種情境經常隱藏在幾何圖形中，它們都滿足兩直線互相垂直的關係。建議教師在教學時，這三種情境都要溝通，不能只討論其中一種情境。</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>2. 兩直線不會相交是平行線的現象，但是不能當作判斷兩線是否平行的方法，因為無法檢驗兩線是否不會有交點。</p>			

4. 日常生活中常出現「水平線」和「鉛垂線」的名詞，水平線是伴隨著水平面出現的一條虛擬直線，將一杯水平放在桌面上，水面會是水平面，當我們將注意力放在水平面上的邊時，就能觀察到水平線的現象；日常生活中到處都存在鉛垂線，垂吊的燈飾，懸掛燈籠的繩子等都是鉛垂線。

學生可能混淆「水平線」和「平行線」，以及「鉛垂線」和「垂直線」的意義，誤認為「水平線」就是「平行線」，「鉛垂線」就是「垂直線」。

水平線和鉛垂線是日常生活中自然存在的一條直線，而平行線和垂直線是描述兩條直線間的關係。

題號	4		
內容領域	資料與不確定性	認知歷程向度	解題思考
學習內容	D-4-1 報讀長條圖與折線圖以及製作長條圖：報讀與說明生活中的長條圖與折線圖。配合其他領域課程，學習製作長條圖。 註：教學與示例應注意處理「分類資料」與「有序變化性資料」之差別。		
試題內容	<p>4. 下圖是快樂國小各年級學生人數長條圖。</p> <p>快樂國小各年級學生人數長條圖</p> <p>請問下列敘述何者正確？</p> <p>① 二年級人數最多 ② 二年級和四年級的男生人數一樣多 ③ 三年級男生和女生人數相差最多 ④ 四年級女生人數比男生人數多</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.07	0.14	0.02
2*	0.77	0.58	0.92
3	0.06	0.13	0.01
4	0.10	0.15	0.05
未作答	0.00		
通過率	0.77	鑑別度	0.34
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.34，正確答案為選項②，通過率為77%，顯示近八成的學生已具備報讀有省略符號複雜長條圖的能力。</p> <p>2. 有7%的學生選擇①(低分組有14%)、這些學生可能不具備報讀有省略符號複雜長條圖的能力；這些學生也可能在計算人數和時發生錯誤。</p> <p>3. 有6%的學生選擇③(低分組有13%)、這些學生可能不具備報讀有省略符號複雜長條圖的能力，他們可能將男生和女生的顏色混淆。</p> <p>4. 有10%的學生選擇④(低分組有15%)，這些學生可能不具備報讀有省略符號複雜長條圖的能力；這些學生也可能在計算人數和時發生錯誤，或是將男生和女生的</p>			

顏色混淆。

### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	D-3-1 一維表格與二維表格：以操作活動為主。報讀、說明與製作生活中的表格。二維表格含列聯表。 備註：製作表格不限於日常資料統計性題材，也可應用於觀察數量模式的變化(R-3-2)。	D-4-1 報讀長條圖與折線圖以及製作長條圖：報讀與說明生活中的長條圖與折線圖。配合其他領域課程，學習製作長條圖。 備註：教學與示例應注意處理「分類資料」與「有序變化性資料」之差別。	D-5-1 製作折線圖：製作生活中的折線圖。 備註：分辨折線圖之使用時機。

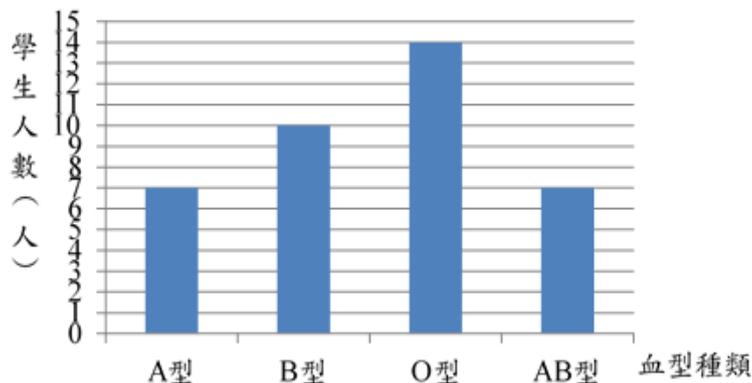
### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備報讀有省略符號複雜長條圖的能力。
2. 學生可能混淆長條圖中男生和女生的顏色，將女生的人數看成男生的人數。
3. 學生可能沒有理解題意，忽略全年級的人數比須為男生和女生人數的加總和。

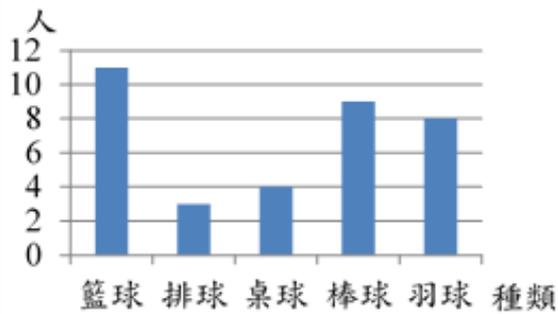
#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 由於資料的屬性不同，適用的統計圖形也不相同，若資料項目屬於類別變數，也就是只知道某一個項目和其它的項目不同，這些項目間沒有顯著的關聯性、次序性，數學上經常使用長條圖來溝通。以統計某年級學生血型人數的長條圖為例，當改變類別變數(血型)的位置時，並不會影響長條圖的意義(圖一)。

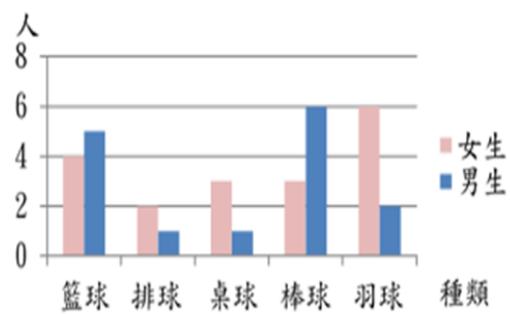


四年級學生血型人數統計 (圖一)

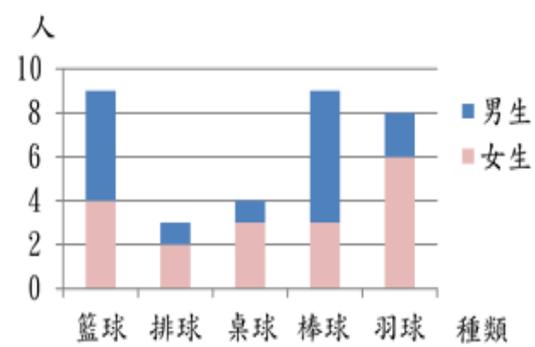
2. 學生必須有報讀長條圖的能力，有足夠的報讀經驗後，才能要求學生解讀。  
報讀：看到資料直接讀出數據。  
解讀：觀察資料以後，能使用自己的話說出對資料的想法。
3. 可配合其它領域進行教學，並與社會重要議題結合。
4. 學生必須有報讀「簡單的長條圖」的能力(如圖二)，有足夠報讀經驗後，才能要求學生報讀「複雜的長條圖」(如圖三和圖四)。



四年級學生喜愛球類運動長條圖 (圖二)

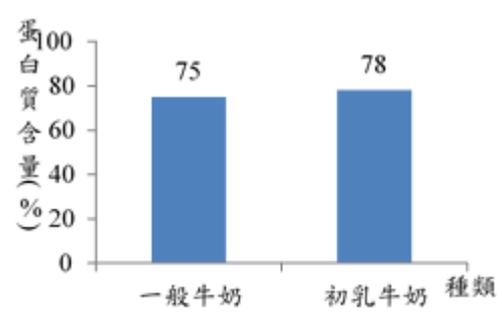


四年級學生喜愛球類運動長條圖 (圖三)

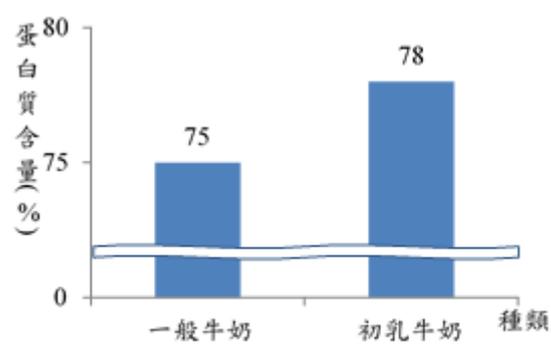


四年級學生喜愛球類運動長條圖 (圖四)

5. 在繪製長條圖或折線圖時，當部分項目的個數很多，繪出來的長條太長，或折線都偏向圖形的上方，為了圖形的美觀，我們經常使用省略符號調整圖形的高度，讓整個長條圖或折線圖的長與寬接近黃金比例。雖然使用省略符號會讓長條圖比較美觀，但是也會影響部分傳遞訊息的正確性。以一般牛奶(蛋白質含量是 75%)與初乳牛奶(蛋白質含量是 78%)蛋白質含量比較的情境為例，圖五是沒有省略符號的長條圖，圖六是有省略符號的長條圖，圖五和圖六中蛋白質含量的差異量都是 3%，並沒有改變，但是它們高度的倍數關係產生改變，在圖五中，兩者蛋白質含量的比值很接近 1，但是在圖六中，初乳牛奶蛋白質含量是一般牛奶蛋白質含量的 2 倍以上。



兩種牛奶蛋白質含量統計圖(圖五)



兩種牛奶蛋白質含量統計圖(圖六)

題號	5		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-4-1 一億以內的數：位值單位「萬」、「十萬」、「百萬」、「千萬」。建立應用大數時之計算習慣，如「30 萬 1200」與「21 萬 300」的加減法。 備註：教學可進行到最後的「一億」，但不進行超過一億的教學。		
試題內容	5. 王大明到郵局提款，觀察下列提款單。  <p>他準備提領多少元？</p> <p>① 125          ② 12500          ③ 125000          ④ 1250000</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.17	0.03
2	0.11	0.22	0.02
3*	0.73	0.48	0.94
4	0.06	0.13	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.73	鑑別度	0.45
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.45，正確答案為選項③，通過率為73%，顯示超過七成的學生已具備利用位值單位概念解決生活中問題的能力。 2. 有10%的學生選擇①(低分組有17%)，這些學生可能不具備利用位值單位概念解決生活中問題的能力；這些學生也可能誤解題意，或忽略提款單中的「拾萬」、「萬」、「仟」等單位，直接將「壹貳伍」記成數字「125」。 3. 有11%的學生選擇②(低分組有22%)，這些學生可能不具備利用位值單位概念解決生活中問題的能力，認為千位後面要補上2個0。 4. 有6%的學生選擇④(低分組有13%)，這些學生可能不具備利用位值單位概念解決生活中問題的能力，認為千位後面要補上4個0。			

教材地位分析																					
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識																		
學習內容	N-3-1 一萬以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「千」。位值單位換算。 備註：教學可進行到最後的「一萬」，但不進行超過一萬的教學。	N-4-1 一億以內的數：位值單位「萬」、「十萬」、「百萬」、「千萬」。建立應用大數時之計算習慣，如「30萬1200」與「21萬300」的加減法。 備註：教學可進行到最後的「一億」，但不進行超過一億的教學。	N-5-1 十進位的位值系統：「兆位」至「千分位」。整合整數與小數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。 備註：熟練十進位系統「乘以十」、「除以十」所延伸的計算如「 $300 \times 1200$ 」與「 $600000 \div 4000$ 」之處理。																		
補救教學建議																					
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備利用位值單位概念解決生活中問題的能力。</li> <li>2. 學生可能無法正確解讀提款單的記法。</li> <li>3. 學生可能混淆數字讀法和記法的意義：7000000、700萬、7百萬，這三個數的讀法相同，但所代表單位的意義不同 7000000 是以一為單位的記法，700萬是以萬為單位的記法，表示 700 個萬，而 7 百萬是以百萬為單位的記法，表示 7 個百萬。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 進行「萬」及「億」單位教學時，必須進行 1 萬到 9999 萬與 1 億的命名。以「萬」為單位的教學為例，十進位記數法逢十進一，只要學會 1 萬到 9 萬，10 個「萬」就換成 1 個「十萬」，「萬」的個數最多只有 9 個；而萬進位記數法逢萬進一，學生必須學會 1 萬到 9999 萬，10000 個「萬」才會換成 1「億」。 日常生活中大數的讀法都是萬進位的讀法，以 23456789 的讀法為例，我們讀作二千三百四十五「萬」六千七百八十九，不會讀做二「千萬」三「百萬」四「十萬」五「萬」六千七百八十九。教師應透過萬進位記數法的定位板或改記成四位一撇的方法，幫助學生熟悉大數的讀法。</li> <li>2. 大數的命名包含十進位記數法及萬進位記數法： 十進位記數法將「634567891」這個大數字讀做：六「億」三「千萬」四「百萬」五「十萬」六「萬」七「千」八「百」九「十」一。</li> </ol> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>億</th> <th>千萬</th> <th>百萬</th> <th>十萬</th> <th>萬</th> <th>千</th> <th>百</th> <th>十</th> <th>個</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>634567891 萬進位記數法先將「634567891」這個大數字由右至左、四位一撇改記成 6,3456,7891 後，讀做：六「億」、三千四百五十六「萬」、七千八百九十一。</p>				億	千萬	百萬	十萬	萬	千	百	十	個	6	3	4	5	6	7	8	9	1
億	千萬	百萬	十萬	萬	千	百	十	個													
6	3	4	5	6	7	8	9	1													

億	萬	一
6	3456	7891

教師應協助學生進行十進位記數法與萬進位記數法的互換。

3. 「5 百萬」、「500 萬」和「5000000」都一樣大，而且讀法都相同，但是這三種記法所表示單位的意義不相同。「5 百萬」是以「百萬」為單位，指的是 5 個「百萬」合起來的數；「500 萬」是以「萬」為單位，指的是 500 個「萬」合起來的數；5000000 是以「一」為單位，指的是 5000000 個「一」合起來的數。
4. 教師應幫助學生將「個、十、百、千」的關係，類推到「萬、十萬、百萬、千萬」的關係。例如，由 1 個十是 10 個一，類推出 1 個十萬是 10 個萬；由 1 個百是 100 個一、也是 10 個十，類推出 1 個百萬是 100 個萬、也是 10 個十萬；由 1 個千是 1000 個一、也是 100 個十、也是 10 個百，類推出 1 個千萬是 1000 個萬、也是 100 個十萬，也是 10 個百萬。

題號	6		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-6 解題：乘除應用問題。乘數、被乘數、除數、被除數未知之應用解題。連結乘與除的關係 (R-3-1)。 備註：可使用解題策略協助學生理解與轉化問題 (例如「倍」的語言、空格算式、乘除互逆等)。本條目不須另立單元教學。		
試題內容	6. 媽媽買了一卷緞帶，每 12 公分剪成一段做成 1 個蝴蝶結，做完 7 個蝴蝶結後，這卷緞帶只剩下 3 公分。請問這卷緞帶原本長多少公分？ ① 87 ② 84 ③ 81 ④ 43		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.86	0.63	0.99
2	0.07	0.17	0.01
3	0.04	0.10	0.00
4	0.03	0.10	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.86	鑑別度	0.36
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.36，正確答案為選項①，通過率為87%，顯示近九成的學生已具備利用乘除互逆解題的能力。 2. 有7%的學生選擇②(低分組有17%)，這些學生可能尚未具備利用乘除互逆解題的能力；也可能利用除數乘以商算出答案後，忘記加上餘數。 3. 有4%的學生選擇③(低分組有10%)，這些學生可能尚未具備利用乘除互逆解題的能力；也可能不理解餘數的意義，利用除數乘以商算出答案後，減掉餘數。 4. 3%的學生選擇④(低分組有10%)，這些學生可能尚未具備利用乘除互逆解題的能力；也可能誤解題意。			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-3-5 除一位數：除數直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。 備註：須處理被除數有0的題型。	N-3-6 解題：乘除應用問題。乘數、被乘數、除數、被除數未知之應用解題。連結乘與除的關係(R-3-1)。 備註：可使用解題策略協助學生理解與轉化問題(例如「倍」的語言、空格算式、乘除互逆等)。本條目不須另立單元教學。	N-4-3 解題：兩步驟應用問題(乘除,連除)。乘與除、連除之應用解題。 備註：由於除法有等分除和包含除兩種類型,教學應注意題型的多元性。可和併式學習一起進行(R-4-1)

補救教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未具備利用乘除互逆解題的能力。
2. 學生可能尚未能掌握被除數、除數和餘數的關係，無法將  $a \div b = q \dots r$  的算式改記成  $a = b \times q + r$ 。
3. 學生未能理解題意或是未能掌握乘除互逆的關係，直接將問題中的數字隨意運算。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 本學習內容限制三年級只處理餘數是0情境的乘除互逆，四年級才處理餘數不是0情境的乘除互逆。

餘數是0的乘除互逆問題：24個桃子，平分成幾堆後，每堆有3個桃子？

餘數不是0的乘除互逆問題：26個桃子，平分成幾堆後，每堆有3個，還剩下2個？

2. 教師可以布置「桌上有4堆桃子，一堆桃子有3個，全部有12個桃子」的情境，幫助學生理解該情境同時可以解讀成「1堆桃子有3個，4堆桃子有12個，可以記成  $3 \times 4 = 12$ 」，「12個桃子平分成4堆，一堆有3個桃子，可以記成  $12 \div 4 = 3$ 」，「12個桃子，每3個桃子分一堆，能分成4堆，可以記成  $12 \div 3 = 4$ 」，幫助學生認識乘除互逆。

教師也可以將上述情境，改用下面的線段圖來表徵。在線段圖中也可以同時看到「 $3 \times 4 = 12$ 」、「 $12 \div 4 = 3$ 」及「 $12 \div 3 = 4$ 」。



3. 下面以「1堆桃子有3個，幾堆桃子合起來有24個？」為例，說明如何幫助學生利用乘除互逆的關係來解題。

下面提供兩種幫助學生利用加減互逆關係解題的方法：

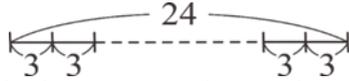
第一種：透過文字題的情境

「1堆桃子有3個，幾堆桃子合起來有24個」和「24個桃子，每3個桃子分成一堆，可以分成幾堆」的意思相同，因此學生可以透過24個桃子，3個桃子分成一堆，可以分成幾堆的想法，

利用  $24 \div 3 = 8$ ，算出有8堆桃子。

第二種：透過線段圖

線段圖中可以知道  $3 \times \square = 24$  和  $24 \div 3 = \square$  的意思相同，可以利用  $24 \div 3 = 8$  算出有8堆桃子。



4. 教師也可以引入算式填充題樣式的計算題，幫助學生利用乘除互逆的想法來解題，並進行驗算。

例如布置  $3 \times (\quad) = 12$ ，學生可以透過乘除互逆的想法，利用  $12 \div 3 = 4$  算出  $(\quad)$  內要填入4的答案，再利用乘法  $3 \times 4 = 12$  來驗算。

5. 建議教師將「驗算」看成專有名詞。

當學生利用除法  $12 \div 3 = 4$  算出  $3 \times (\quad) = 12$ 、 $(\quad) \times 3 = 12$  或  $12 \div (\quad) = 3$  問題的答案，以及利用乘法  $3 \times 4 = 12$  算出  $(\quad) \div 3 = 4$  問題的答案後，驗算指的是將算出的答案代入原問題中，檢查算出的答案是否正確。

題號	7		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	<p>N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。</p> <p>備註：直式計算乘數與除數限三位。直式計算須注意 0 的教學。較大位數除法須進行估商的教學。知道如「<math>1600 \times 200</math>」與「<math>60000 \div 400</math>」這類算式，可發展出更簡單的計算方法。</p>		
試題內容	<p>7. 一臺遊戲機 12990 元，哥哥每天存 100 元，至少要存多少天才夠買這臺遊戲機？</p> <p>① 13 ② 120 ③ 129 ④ 130</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.08	0.01
2	0.04	0.11	0.00
3	0.18	0.37	0.03
4*	0.73	0.43	0.96
未作答	0.00		
通過率	0.73	鑑別度	0.53
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.53，正確答案為選項④，通過率為73%，顯示超過七成的學生已具備利用除法直式計算及無條件進入法取概數的能力。</p> <p>2. 有4%的學生選擇①(低分組有8%)，這些學生可能不具備利用除法直式計算及無條件進入法取概數的能力。</p> <p>3. 有4%的學生選擇②(低分組有11%)，這些學生可能不具備利用除法直式計算及無條件進入法取概數的能力。</p> <p>4. 有18%的學生選擇③(低分組有37%)，這些學生可能不具備利用除法直式計算及無條件進入法取概數的能力；這些學生也可能已具備利用除法直式計算解題的能力，但是不具備無條件進入法取概數的能力，他們正確的算出商是129，直接以129為答案。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-3-5 除是一位數：除數直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。 備註：須處理被除數有0的題型。</p>	<p>N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。 備註：直式計算乘數與除數限三位。直式計算須注意0的教學。較大位數除法須進行估商的教學。知道如「<math>1600 \times 200</math>」與「<math>60000 \div 400</math>」這類算式，可發展出更簡單的計算方法。</p>	<p>N-5-1 十進位的位值系統：「兆位」至「千分位」。整合整數與小數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。 備註：熟練十進位系統「乘以十」、「除以十」所延伸的計算如「<math>300 \times 1200</math>」與「<math>600000 \div 4000</math>」之處理。</p>
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備利用除法直式計算解題的能力。</li> <li>2. 學生可能不具備利用無條件進入法取概數的能力。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師進行除數是二、三位直式計算的教學前，應先確定學生已掌握二、三位數乘以一位數的乘法直式計算，並將計算的結果記成一行。</li> <li>2. 以「751元平分給12個人，每人最多分到幾元？還剩下多少元？」為例，說明如何幫助學生學習直式除法。 <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 有兩種分解751的方法，第一種是將751分解成<math>700 + 50 + 1</math>，第二種是將751分解成7個「百」、5個「十」和1個「一」。第二種方法會讓計算的數字變小，數學上都透過第二種分解方式引入直式除法。</li> <li>(2) 將751元分解成7張百元鈔票、5枚十元硬幣和1個一元硬幣。 先將7張百元鈔票平分給12人不夠分； 將7張百元鈔票換成70枚十元硬幣，加上原有的5枚十元硬幣，合起來有75枚十元硬幣； 75枚十元硬幣平分給12人，每人分到6枚十元硬幣，還剩下3枚十元硬幣不夠分；將3枚十元硬幣換成30個一元硬幣，加上原有的1個一元硬幣，合起來有31個一元硬幣； 31個一元硬幣平分給12人，每人分到2個一元硬幣，還剩下7個一元硬幣。合起來每人分到6枚十元硬幣和2個一元硬幣，還剩下7個一元硬幣，也就是每人分到62元，剩下7元。</li> </ol> </li> </ol>			

- (3) 用直式將解題過程記錄下來，並說明每個步驟的意義，如果學生混淆不同單位平分的意義，教師可以在直式上方畫出定位板來說明。

	100	⑩	①	
		6	2	⇒ 每人分到 6 枚十元，2 個一元，也就是 62 元
12	7	5	1	⇒ 751 元分解成 7 張百元鈔票、5 枚十元和 1 個一元
-	7	2		⇒ 每人分 6 枚十元，12 人分掉 72 枚十元，剩下 3 枚十元
		3	1	⇒ 3 枚十元硬幣換成 30 個一元，加上原有的 1 個一元
-		2	4	⇒ $12 \times 2 = 24$ ，每人分 2 個一元，12 人分掉 24 個一元
			7	⇒ $31 - 24 = 7$ (剩下 7 個一元)

- (4) 利用直式解決除數是二位數的除法計算時，學生估商常發生錯誤，教師可以建議學生估少一點，透過學生熟悉的乘法算式，利用多次估商來簡化計算。下面以「751 元平分給 12 個人，每人最多分到幾元？還剩下多少元？」為例來說明。

	100	⑩	①	
		1		
		5	2	⇒ $5 + 1 = 6$ (每人分到 6 枚十元，2 個一元，也就是 62 元)
12	7	5	1	
-	6	0		⇒ $12 \times 5 = 60$ (每人分 5 枚十元，12 人分掉 60 枚十元)
	1	5		⇒ $75 - 60 = 15$ (剩下 15 枚十元，還可以繼續分)
-	1	2		⇒ $12 \times 1 = 12$ (每人再分 1 枚十元，12 人分掉 12 枚十元)
		3	1	⇒ 剩 3 枚十元不夠分，換成 30 個一元，合起來是 31 個一元
-		2	4	⇒ $12 \times 2 = 24$ (每人分 2 個一元，12 人分掉 24 個一元)
			7	⇒ $31 - 24 = 7$ (剩下 7 個一元)

- (5) 以「 $6000 \div 700 = ( ) \dots ( )$ 」為例，說明如何幫助學生解題。

a. 先布問題「60 張百元鈔票，每人分 7 張，最多可以分給多少人？還剩下幾張百元鈔票？也就是多少元？」。

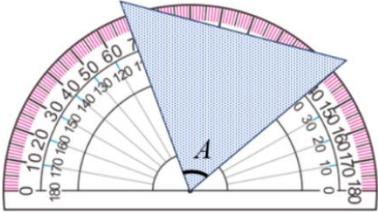
b. 學生可以利用「 $60 \div 7 = 8 \dots 4$ 」，得到可以分給 8 人，還剩下 4 張百元鈔票也就是 400 元的答案。

c. 再布問題「6000 元，每人分 700 元，最多可以分給多少人？還剩下多少元？」，限制學生必須將 6000 元和 700 元都換成 100 元鈔票後再計算，學生將 6000 元換成 60 張 100 元，將 700 元換成 7 張 100 元，透過「 $60 \div 7 = 8 \dots 4$ 」，算出可以分給 8 人，還剩下 4 張百元鈔票，也就是 400 元。

教師可以說明此方法是將被除數和除數同時換成以 100 為單位的算法。

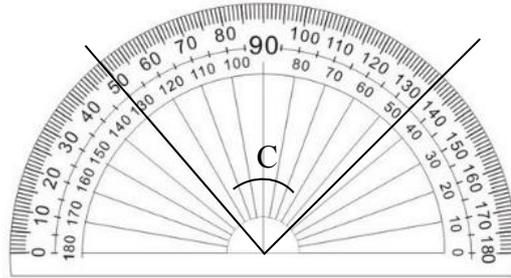
- (6) 教師可引導學生利用被除數和除數同時換單位的算法來檢驗較大數字除法計算的合理性。以檢驗「 $63300 \div 422 = 15$ 」答案的合理性為例，因為  $63300 \div 422$  的商大約等於  $60000 \div 400 = 600 \div 4 = 150$ ，所以「 $63300 \div 422 = 15$ 」答案不合理。



題號	8		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	知識向度
學習內容	S-4-1 角度：「度」（同 N-4-10）。量角器的操作。實測、估測與計算。以角的合成認識 180 度到 360 度之間的角度。「平角」、「周角」。指定角度作圖。 備註：同 N-4-10 備註。		
試題內容	<p>8. 用下圖的量角器量量看，角 A 是多少度？</p>  <p>① 40 ② 70 ③ 80 ④ 110</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.16	0.02
2*	0.77	0.53	0.95
3	0.07	0.14	0.02
4	0.07	0.16	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.77	鑑別度	0.42
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.42，正確答案為選項②，通過率為77%，顯示近八成的學生已具備利用量角器測量角度的能力。</p> <p>2. 有8%的學生選擇①(低分組有16%)，這些學生可能不具備利用量角器測量角度的能力，他們以一邊在量角器上內圈的刻度作為答案。</p> <p>3. 有7%的學生選擇③(低分組有14%)，這些學生可能透過點數刻度的方式算出角的角度，但是因為角在量角器上的刻度被遮蓋而無法解題，這些學生可能不具備利用減法算式計算夾角角度的能力。</p> <p>4. 有7%的學生選擇④(低分組有16%)，這些學生可能不具備利用量角器測量角度的能力，他們以一邊在量角器上內圈的刻度作為答案。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-3-13 角與角度(同 S-3-1): 以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 備註:用直尺或三角板的直角來認識與複製直角。教學應處理角大小與邊長長短或面積大小混淆之常見錯誤。	S-4-1 角度:「度」(同 N-4-10)。量角器的操作。實測、估測與計算。以角的合成認識 180 度到 360 度之間的角度。「平角」、「周角」。 指定角度作圖。 備註:同 N-4-10 備註。	S-5-1 三角形與四邊形的性質:操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊相等、對角相等。 備註:簡單推理,例如:四邊形四內角和為 360 度,三角形不可能有兩鈍角。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備利用量角器測量角度的能力,他們以一邊在量角器上內圈或外圈的刻度作為答案。</li> <li>2. 學生可能透過點數刻度的方式算出角的角度,但是因為角在量角器上的刻度被遮蓋而無法解題,這些學生可能不具備利用減法算式計算夾角角度的能力。</li> <li>3. 兩點才能決定一線,學生沒有養成報讀兩邊刻度的習慣,例如用直尺測量繩長時,繩子一端對齊刻度 0,另一端對齊刻度 a 稱繩子的長度是 a 公分。 相同的方式,用量角器測量角的角度時,角的一邊對齊刻度 0,另一邊對齊刻度 a 時,稱該角的角度為 a 度。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 為了方便量角度,量角器都有兩組刻度,其中一組是順時針方向,另一組是逆時針方向,因此,部分學生使用量角器測量角度時,常將 70 度報讀為 110 度。當學生尚未掌握直角、銳角及鈍角的意義前,報讀角度時,應要求同時報讀始邊和終邊兩個刻度,養成先將始邊對齊刻度 0,也就是先找 0 度,再看終邊刻度的習慣,並將刻度 0 到刻度 70 間的角度稱為 70 度。當學生掌握鈍角及銳角的意義,知道被測量角度和直角 90 度大小關係後,面對銳角 70 度時,不會將它報讀為 110 度。</li> <li>2. 以「下圖中角 C 的角度是多少度?」為例,提出兩種幫助學生解題的方法。 <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 透過點數刻度解題: 先找出角兩邊在量角器上外圈(或內圈)所對應的刻度,例如 50 度和 135 度,再由 50 度開始,往角的另一邊開始 10 度及 1 度一數,10、20、30、40、50、60、70、80、81、82、83、84、85,得到該角角度為 85 度的答案。</li> <li>(2) 透過旋轉角及減法解題: 先找出角兩邊在量角器上外圈(或內圈)所對應的刻度,例如 50 度和</li> </ol> </li> </ol>			

135 度，先說明可以利用減法算式  $50 - 0 = 50$  算出由刻度 0 度旋轉到刻度 50 度所夾的角是 50 度， $135 - 0 = 135$  算出由刻度 0 度旋轉到刻度 135 度所夾的角是 135 度，再說明可以利用減法算式  $135 - 50 = 85$  算出刻度 50 度旋轉到刻度 135 度所夾的角是 85 度。



3. 測量兩邊不在量角器刻度 0 上的角，和利用斷尺測量繩子的長度滿足同構的關係，教師可以類比斷尺測量繩子長度的兩種方法幫助學生解題。

題號	9																																						
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	概念理解																																				
學習內容	S-4-8 四邊形：以邊與角的特徵（含平行）認識特殊四邊形並能作圖。 如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。 備註：作圖包含正方形、長方形、平行四邊形。																																						
試題內容	<p>9. 妹妹不小心打翻墨汁，把表格上面四邊形的名稱弄髒了。</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>四邊形 性質</th> <th>長方形</th> <th>甲</th> <th>乙</th> <th>丙</th> <th>丁</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>兩雙對邊 分別互相平行</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td></td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>兩雙對邊 分別等長</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td></td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>只有一雙對邊 互相平行</td> <td></td> <td></td> <td>✓</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4 條邊 都一樣長</td> <td></td> <td>✓</td> <td></td> <td></td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>4 個角 都是直角</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>下列關於四邊形甲、乙、丙、丁的敘述，何者正確？</p> <p>① 甲是梯形 ② 乙是平行四邊形 ③ 丙是正方形 ④ 丁是菱形</p>			四邊形 性質	長方形	甲	乙	丙	丁	兩雙對邊 分別互相平行	✓	✓		✓	✓	兩雙對邊 分別等長	✓	✓		✓	✓	只有一雙對邊 互相平行			✓			4 條邊 都一樣長		✓			✓	4 個角 都是直角	✓	✓			
四邊形 性質	長方形	甲	乙	丙	丁																																		
兩雙對邊 分別互相平行	✓	✓		✓	✓																																		
兩雙對邊 分別等長	✓	✓		✓	✓																																		
只有一雙對邊 互相平行			✓																																				
4 條邊 都一樣長		✓			✓																																		
4 個角 都是直角	✓	✓																																					
選答率	答題反應比率（*表正確答案）																																						
選項	整體	低分組	高分組																																				
1	0.03	0.09	0.00																																				
2	0.08	0.19	0.01																																				
3	0.09	0.18	0.02																																				
4*	0.79	0.53	0.97																																				
未作答	0.00																																						
通過率	0.79	鑑別度	0.44																																				

### 試題品質分析

1. 本題鑑別度為0.44，正確答案為選項④，通過率為79%，顯示近八成的學生已具備利用「邊」和「角」的特徵(含平行)辨識圖形的能力。
2. 有3%的學生選擇①(低分組有9%)，這些學生可能不具備利用「邊」和「角」的特徵(含平行)辨識圖形的能力，他們可能不認識梯形的辨識方法和性質。
3. 有8%的學生選擇②(低分組有19%)，這些學生可能不具備利用「邊」和「角」的特徵(含平行)辨識圖形的能力，他們可能不認識平行四邊形的辨識方法和性質。
4. 有9%的學生選擇③(低分組有18%)，這些學生可能不具備利用「邊」和「角」的特徵(含平行)辨識圖形的能力，他們可能不認識正方形的辨識方法和性質。

### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>S-3-2 正方形和長方形：以邊與角的特徵來定義正方形和長方形。 備註：知道如何判斷斜擺的長方形或正方形依舊是長方形或正方形。</p>	<p>S-4-8 四邊形：以邊與角的特徵(含平行)認識特殊四邊形並能作圖。 如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。 備註：作圖包含正方形、長方形、平行四邊形。</p>	<p>S-5-1 三角形與四邊形的性質：操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為180度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊相等、對角相等。 備註：簡單推理，例如：四邊形四內角和為360度，三角形不可能有兩鈍角。</p>

### 補救教學建議

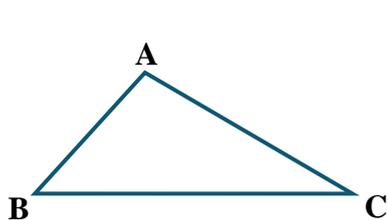
#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能只用「角」的特徵比對辨認四邊形而造成錯誤，例：如果4個角都是直角，有可能是正方形，也有可能是長方形。
2. 學生可能只用「邊」的特徵比對辨認四邊形而造成錯誤，例：如果4個邊都一樣長，有可能是正方形，也有可能是菱形。
3. 學生可能未理解平面上兩線平行的意義，無法用「平行」的意義比對辨認四邊形而造成錯誤。

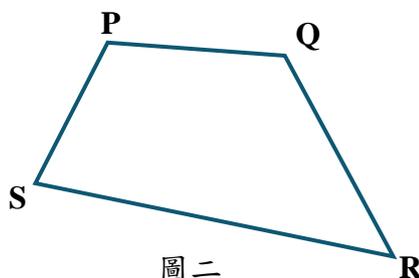
#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 本題運用「角」與「邊」的特徵比對辨認正方形、長方形、菱形，也就是給下列四邊形下定義。正方形：四邊等長且四個角都是直角的四邊形。長方形：四個角都是直角的四邊形。菱形：四邊都等長的四邊形。
2. 可以透過定義討論正方形是否為長方形。例如正方形的四個角都是直角，滿足長方形四個角都是直角的定義，所以正方形也是長方形。正方形的四個邊都等長，滿足菱形四個邊都等長的定義，所以正方形也是菱形。但不宜評量兩類圖形的包含關係。

3. 本題亦透過學生已經理解平面上兩線平行的意義，藉由邊和角的特徵比對辨識正方形、長方形、菱形，再幫助學生由「有幾雙對邊平行」的特徵比對，辨識平行四邊形、梯形。
4. 運用「有幾雙對邊平行」的特徵比對辨認平行四邊形、梯形，也就是給下列四邊形下定義。平行四邊形：兩雙對邊都平行的四邊形。梯形：一雙對邊平行，另一雙對邊不平行的四邊形。
5. 教師不宜稱「有一雙對邊平行的四邊形為梯形」，應該稱「一雙對邊平行，另一雙對邊不平行的四邊形為梯形」。因為「有」可以包含三種意義，第一種是「至多有」，第二種是「恰有」，第三種是「至少有」，學生可能混淆其意義。
6. 對邊指的是某條邊或某個角相對的邊，一雙對邊(或一組對邊)指的是兩條邊的關係，這兩條邊互為相對的邊，國小學生常混淆對邊和一雙對邊的意義。
7. 以圖一中的三角形 ABC 為例，我們稱邊 AB 為角 C 的對邊，稱角 A 為邊 BC 的對角，也就是說，三角形中，每個角都有對邊，每個邊都有對角。數學上稱大角對大邊、大邊對大角就是這個意思。
8. 以圖二中的四邊形 PQRS 為例，邊 PQ 有兩條相鄰的邊 PS 和邊 QR，邊 PQ 有一條相對的邊 SR，我們稱邊 PS 和邊 QR 為邊 PQ 的鄰邊，稱邊 SR 為邊 PQ 的對邊。相同的方式，邊 SR 也有一條相對的邊 PQ，我們稱邊 PQ 為邊 SR 的對邊。當學生掌握邊 SR 是邊 PQ 的對邊時，邊 PQ 也是邊 SR 的對邊、邊 PQ 是邊 SR 的對邊時，邊 SR 也是邊 PQ 的對邊的關係後，可以引入一雙對邊的名詞，稱邊 PQ 和邊 SR 為一雙對邊。相同的方式，教師也可以說明角 P 和角 R 為一雙對角。



圖一



圖二

題號	10		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。 備註：本條目教學，分子和分母的數字都不用太大，以能流暢學習同分母分數計算為目標。帶分數整數倍教學不宜強迫學生化成假分數進行，其中隱含之分配律思維來自操作經驗與數感，此非分配律教學。		
試題內容	10. 請問 $4\frac{1}{8}$ 和多少個 $\frac{1}{8}$ 合起來一樣大？ ① 4 ② 32 ③ 33 ④ 41		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.21	0.01
2	0.12	0.19	0.05
3*	0.73	0.48	0.92
4	0.06	0.11	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.73	鑑別度	0.45
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.45，正確答案為選項③，通過率為73%，顯示超過七成的學生已具備假分數和帶分數互換以及以單位分數為單位計數的能力。 2. 有9%的學生選擇①(低分組有21%)，這些學生可能尚未具備假分數和帶分數互換以及以單位分數為單位計數的能力；這些學生也可能不理解題意，以整數部分4為答案。 3. 有12%的學生選擇②(低分組有19%)，這些學生可能尚未具備假分數和帶分數互換以及以單位分數為單位計數的能力；這些學生也可能不理解題意，算出4和多少個單位分數合起來一樣大。 4. 有6%的學生選擇④(低分組有11%)，這些學生可能尚未具備假分數和帶分數互換以及以單位分數為單位計數的能力。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過 2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於 1」的意義。</p> <p>備註：本年級分數教學只用「分數」一詞，不出現「真分數」與「假分數」的名詞，也不含帶分數的教學(N-4-5)。應區分真分數與假分數之教學(例如分開於上、下學期)。初步認識分數的應用時，情境應以連續量為主。若要處理離散量情境，必須與連續模型表徵強烈結合，而且其計數單位須為以整體數量為分母的單位分數(如 1 盒餅乾有 6 塊，則只處理分母 6 之分數，不處理 2 或 3 的情況)。</p>	<p>N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學(包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入)。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。</p> <p>備註：本條目教學，分子和分母的數字都不用太大，以能流暢學習同分母分數計算為目標。帶分數整數倍教學不宜強迫學生化成假分數進行，其中隱含之分配律思維來自操作經驗與數感，此非分配律教學。</p>	<p>N-5-6 整數相除之分數表示：從分裝(測量)和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。</p> <p>備註：本條目的困難在於概念理解而非計算，教師應積極協助學生突破整數除法有餘數之固定想法，並轉化成商為分數的合理性。包含除可和「比率」的課題結合(N-5-10)。</p>
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備假分數和帶分數互換的能力。</li> <li>2. 學生可能不具備以單位分數為單位計數的能力。</li> <li>3. 學生尚未掌握帶分數的意義，將整數、分子和分母看成 3 個不同的數量。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師應幫助學生進行帶分數的命名活動，當學生認識 3 個圓和 <math>\frac{4}{6}</math> 個圓的意義後，就可以透過下列問話「我們已經認識 3 個圓，也認識 <math>\frac{4}{6}</math> 個圓，我們如何稱呼 3 個圓和 <math>\frac{4}{6}</math> 個圓合起來是多少個圓？名稱中要看到 3 個圓，還要看到 <math>\frac{4}{6}</math> 個圓。」，幫</li> </ol>			

助學生將 3 個圓和  $\frac{4}{6}$  個圓合起來的量稱為  $3\frac{4}{6}$  個圓。再透過下列問話「 $3\frac{4}{6}$  個圓中，是否看到 3 個圓和  $\frac{4}{6}$  個圓，是否看到 3 個圓和  $\frac{4}{6}$  個圓合起來」，幫助學生理解  $3\frac{4}{6}$  個圓指的是 3 個圓和  $\frac{4}{6}$  個圓合起來的名稱。

2. 建議教師區分成兩部分進行真分數、假分數與帶分數的命名活動。

(1) 進行真分數和假分數的命名真分數和假分數命名的重點是將形如  $\frac{q}{p}$  形式的分數區分為兩類，稱比 1 小的分數為真分數，稱大於或等於 1 的分數為假分數。

以將 2 個披薩都平分成 4 等份，得到  $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{4}$ 、 $\frac{5}{4}$ 、 $\frac{6}{4}$ 、 $\frac{7}{4}$ 、 $\frac{8}{4}$  個披薩為例：

「 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 」這些小於 1 的分數是日常生活中常用到的分數，稱為真分數。

「 $\frac{4}{4}$ 、 $\frac{5}{4}$ 、 $\frac{6}{4}$ 、 $\frac{7}{4}$ 、 $\frac{8}{4}$ 」這些大於或等於 1 的分數是日常生活中不常用到的分數，稱為假分數。

真分數的分子會小於分母，假分數的分子會等於或大於分母。

(2) 進行假分數和帶分數的命名大於 1 的分數有兩種不同的記法，第一種強調由幾個 1 和幾個單位分數合起來的記法，如  $a\frac{c}{b}$  ( $c < b$ ,  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為正整數) 形式的分數，稱為帶分數。

第二種強調由幾個單位分數合起來的記法，如  $\frac{q}{p}$  ( $q \geq p$ ,  $p$ 、 $q$  為正整數) 形式的分數，稱為假分數。

以 2 個圓和  $\frac{7}{12}$  個圓合起來的情境為例：帶分數  $2\frac{7}{12}$  強調由幾個 1 和幾個  $\frac{1}{12}$  合起來的分數；假分數  $\frac{31}{12}$  強調由幾個  $\frac{1}{12}$  合起來的分數。

3. 「 $1 = \frac{n}{n}$ 」是帶分數及假分數互換的先備知識。

學生可以利用加法算式「 $1 = \frac{7}{7}$ ,  $\frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{4}{7} = \frac{25}{7}$ 」，或乘法算式「 $\frac{7}{7} \times 3 = \frac{21}{7}$ ,  $\frac{21}{7} + \frac{4}{7} = \frac{25}{7}$ 」，將帶分數  $3\frac{4}{7}$  換成假分數  $\frac{25}{7}$ 。

也可以利用減法算式「 $\frac{7}{7} = 1$ ,  $\frac{25}{7} - \frac{7}{7} - \frac{7}{7} - \frac{7}{7} = \frac{4}{7}$ 」，或乘法算式

「 $\frac{7}{7} \times 3 = \frac{21}{7}$ ,  $\frac{25}{7} - \frac{21}{7} = \frac{4}{7}$ 」，將假分數  $\frac{25}{7}$  換成帶分數  $3\frac{4}{7}$ 。

教師不宜限制學生，只能利用「 $25 \div 7 = 3 \dots 4$ 」的算法，將假分數  $\frac{25}{7}$  換成帶分數  $3\frac{4}{7}$ 。

4. 以將假分數 $\frac{25}{7}$ 換成帶分數 $3\frac{4}{7}$ 為例，提出兩種解題的方法，說明如何幫助學生利用「 $25\div 7=3\dots 4$ 」的算法，得到 $\frac{25}{7}=3\frac{4}{7}$ 。

方法一：以 $\frac{1}{7}$ 為單位，透過減法算式引入除法算式

拿出 1 條黑色積木(長 7 公分)，將黑色積木平分成 7 份，其中的 1 份和 1 個白色積木一樣長，可以用 1 個白色積木代表 $\frac{1}{7}$ 條黑色積木。

$\frac{25}{7}$ 是 25 個 $\frac{1}{7}$ ，拿出 25 個白色積木代表 25 個 $\frac{1}{7}$ ，每 7 個白色積木換 1 條黑色積木，先幫助學生用減法算式「 $25-7=18$ ， $18-7=11$ ， $11-7=4$ 」，得到可以換 3 條黑色積木，還剩下 4 個白色積木，也就是 $\frac{25}{7}=3\frac{4}{7}$ 的答案，再用除法算式「 $25\div 7=3\dots 4$ 」，以較有效率的算法得到 $\frac{25}{7}=3\frac{4}{7}$ 的答案。

方法二：被除數和除數同時換成以 $\frac{1}{7}$ 為單位

「 $25\div 7=3\dots 4$ 」，算式中的 25 指的是 25 個 $\frac{1}{7}$ ，每次拿走 7 個 $\frac{1}{7}$

換成 1 後，可以拿走 3 次，還剩下 4 個 $\frac{1}{7}$ ，也就是說，餘數 4 指的是 4 個 $\frac{1}{7}$ ，而不是 4 個 1。

題號	11		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。 備註：直式計算乘數與除數限三位。直式計算須注意 0 的教學。較大位數除法須進行估商的教學。知道如「 $1600 \times 200$ 」與「 $60000 \div 400$ 」這類算式，可發展出更簡單的計算方法。		
試題內容	11. 下面哪個選項的答案 <u>不</u> 是一千萬？ ① $200 \times 50000$ ② $1000 \times 10000$ ③ $2500 \times 4000$ ④ $12500 \times 8000$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.21	0.04
2	0.12	0.21	0.04
3	0.15	0.24	0.07
4*	0.60	0.34	0.85
未作答	0.00		
通過率	0.60	鑑別度	0.51
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.51，正確答案為選項④，通過率為60%，顯示有六成的學生已具備大數乘法直式計算的能力。 2. 有12%的學生選擇①(低分組有21%)，這些學生可能不具備大數乘法直式計算的能力；也可能不清楚一千萬是1的後面有幾個0，或未能掌握被乘數及乘數乘完後的積，後面到底有幾個0。 3. 有12%的學生選擇②(低分組有21%)，這些學生可能不具備大數乘法直式計算的能力；也可能不清楚一千萬是1的後面有幾個0，或未能掌握被乘數及乘數乘完後的積，後面到底有幾個0。 4. 有15%的學生選擇③(低分組有24%)，這些學生可能不具備大數乘法直式計算的能力；也可能不清楚一千萬是1的後面有幾個0，或未能掌握被乘數及乘數乘完後的積，後面到底有幾個0。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-3-3            乘以一位數：乘法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被乘數為二、三位數。            備註：須處理被乘數有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。最後須能以一列算出答案。多位數乘以一位數隱含之分配律來自操作經驗與數感，而非分配律教學。</p>	<p>N-4-2            較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。            備註：直式計算乘數與除數限三位。直式計算須注意 0 的教學。較大位數除法須進行估商的教學。知道如「<math>1600 \times 200</math>」與「<math>60000 \div 400</math>」這類算式，可發展出更簡單的計算方法。</p>	<p>N-5-1            十進位的位值系統：「兆位」至「千分位」。整合整數與小數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。            備註：熟練十進位系統「乘以十」、「除以十」所延伸的計算如「<math>300 \times 1200</math>」與「<math>600000 \div 4000</math>」之處理。</p>
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備大數乘法直式計算的能力。</li> <li>2. 學生也可能不清楚一千萬是 1 的後面有幾個 0。</li> <li>3. 學生也可能未能掌握被乘數及乘數乘完後的積，後面到底有幾個 0。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 以「<math>24000 \times 300 = ( )</math>」為例，說明如何幫助學生解題。            步驟一：透過列出乘數都是 3 的算式 <math>24 \times 3 = 72</math> 和 <math>24000 \times 3 = 72000</math>，幫助學生認識「被乘數 24000 比被乘數 24 後面多 3 個 0」、「<math>24000 \times 3</math> 的積比 <math>24 \times 3</math> 的積後面也多 3 個 0」。            步驟二：透過列出被乘數都是 24 的算式 <math>24 \times 3 = 72</math> 和 <math>24 \times 300 = 7200</math>，幫助學生認識「乘數 300 比乘數 3 後面多 2 個 0」、「<math>24 \times 300</math> 的積比 <math>24 \times 3</math> 的積後面也多 2 個 0」。            步驟三：透過列出 <math>24 \times 3 = 72</math> 和 <math>24000 \times 300 = 7200000</math>，幫助學生認識「被乘數 24000 比被乘數 24 後面多 3 個 0、乘數 300 比乘數 3 後面多 2 個 0」、「<math>24000 \times 300</math> 的積比 <math>24 \times 3</math> 的積後面多 <math>(3+2)</math> 個 0，也就是多 5 個 0」。</li> <li>2. 學生二年級已學過乘法交換律，四年級引入乘法結合律後，教師也可以先要求學生利用乘法直式算出或利用計算機按出 <math>24000 \times 300 = 7200000</math>，再透過代數運算「<math>24000 \times 300 = 24 \times 1000 \times 3 \times 100 = 24 \times 3 \times 1000 \times 100 = 24 \times 3 \times 100000</math>」，幫助學生認識 <math>24000 \times 300</math> 比 <math>24 \times 3</math> 後面多 5 個 0，也就是多 <math>(3+2)</math> 個 0。四年級學生不易掌握這種解題方法的意義，教師不必強求學生理解。</li> </ol>			

題號	12		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	知識向度
學習內容	N-3-17 時間：「日」、「時」、「分」、「秒」。實測、量感、估測與計算。時間單位的換算。認識時間加減問題的類型。 備註：時間加減問題以認識加減問題類型為原則（較深入者見 N-4-13），處理時刻或時間量等常見加減問題。本年級加減限 (1)同單位時間量；(2)時、分複名數加減（無進、退位）。		
試題內容	12. 咖啡店上午 10 時開始營業，一直到下午 9 時關門。 請問咖啡店一天營業多少小時？  ① 19 ② 11 ③ 10 ④ 9		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.07	0.19	0.01
2*	0.85	0.63	0.98
3	0.04	0.09	0.01
4	0.03	0.08	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.85	鑑別度	0.35
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.35，正確答案為選項②，通過率為85%，顯示有八成五的學生已具備時刻和時間加減計算的能力。</p> <p>2. 有7%的學生選擇①(低分組有19%)，這些學生可能尚未具備時刻和時間加減計算的能力，直接將題目中兩個時刻相加得到答案。</p> <p>3. 有4%的學生選擇③(低分組有9%)，這些學生可能尚未具備時刻和時間加減計算的能力；這些學生也可能不理解題意，以題目給定的數字為答案。</p> <p>4. 有3%的學生選擇④(低分組有8%)，這些學生可能尚未具備處理時刻和時間加減的能力；這些學生也可能不理解題意，以題目給定的數字為答案。</p>			

### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-2-14 時間：「年」、「月」、「日」、「星期」。理解所列時間單位之關係與約定。</p> <p>備註：本條目可包含簡單計算問題(如暑假的總天數)。不做時間間隔問題。可觀察月曆結構模式。可教「閏年」，但只談「四年一閏」。</p>	<p>N-3-17 時間：「日」、「時」、「分」、「秒」。實測、量感、估測與計算。時間單位的換算。認識時間加減問題的類型。</p> <p>備註：時間加減問題以認識加減問題類型為原則(較深入者見N-4-13)，處理時刻或時間量等常見加減問題。本年級加減限(1)同單位時間量；(2)時、分複名數加減(無進、退位)。</p>	<p>N-4-13 解題：日常生活的時間加減問題。跨時、跨午、跨日、24小時制。含時間單位換算。</p> <p>備註：教學須包含各種類型的時間加減問題。建議不直接談時差，與時差有關問題，可在布題時先處理。</p>

### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能未具備時刻和時間加減計算的能力。
2. 學生可能無法透過時間數線，進行時刻和時間的轉換。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 時間量的加減包含下列兩種類型：
  - (1) 單名數時間量的加減：包含「日」、「時」、「分」、「秒」，  
例如  $3\text{日} + 5\text{日} = 8\text{日}$ ； $12\text{時} - 7\text{時} = 5\text{時}$ 等。
  - (2) 複名數時間量的加減：只進行時、分複名數時間量的加減。  
例如： $8\text{小時}30\text{分鐘} + 5\text{小時}25\text{分鐘}$ 等。

三年級進行「時、分」複名數的加減計算時，不宜做進、退位的計算。
2. 時刻及時間的加減問題包含下列三種類型：
  - (1) 兩時刻間經過多少時間量  
例如： $3\text{時}5\text{分}$ 到 $3\text{時}8\text{分}$ ，經過了多少分鐘？
  - (2) 甲時刻經過某時間量後是什麼時刻  
例如：現在是 $3\text{時}5\text{分}$ ，經過 $5\text{分鐘}$ 後是幾時幾分？
  - (3) 甲時刻在某時間量之前是什麼時刻  
例如：現在是 $3\text{時}5\text{分}$ ， $5\text{分鐘}$ 前是幾時幾分？
3. 教師可以幫助學生利用點數策略，解決時刻及時間的加減問題。  
例如：透過「 $5\text{分}$ 至 $6\text{分}$ 、 $6\text{分}$ 至 $7\text{分}$ 、 $7\text{分}$ 至 $8\text{分}$ 」，得到 $3\text{時}5\text{分}$ 到 $3\text{時}8\text{分}$ 經過 $3\text{分鐘}$ 的答案。評量時不宜要求算式記錄，四年級才引入利用加減算式解決時間加減的問題。

題號	13		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	<p>N-4-8 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。</p> <p>備註：標記限一位小數（相當於分母等於10）與分母不大於5的分數。以等值分數思維（N-4-6）協助學生認識整數、分數、小數為一體。因初學等值分數，本條目不處理分數和小數的混合計算問題。</p>		
試題內容	<p>13. 將 0.9、0.38、0.83、0.08 這 4 個數標示在數線上，哪個數會在數線最右邊？</p> <p>① 0.9</p> <p>② 0.38</p> <p>③ 0.83</p> <p>④ 0.08</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.58	0.28	0.86
2	0.04	0.10	0.00
3	0.23	0.38	0.07
4	0.14	0.23	0.06
未作答	0.00		
通過率	0.58	鑑別度	0.58
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.58，正確答案為選項①，通過率為58%，顯示近六成的學生已具備將小數標示在小數數線上的能力。</p> <p>2. 有4%的學生選擇②(低分組有10%)，這些學生可能不具備將小數標示在小數數線上的能力；這些學生也可能不具備比較小數大小的能力。</p> <p>3. 有23%的學生選擇③(低分組有38%)，這些學生可能不具備將小數標示在小數數線上的能力；這些學生也可能不具備比較小數大小的能力，他們不理會小數點的位置，只比較整數部分的大小，誤認為這四個小數中，最大的小數是0.83。</p> <p>4. 有14%的學生選擇④(低分組有23%)，這些學生可能不具備將小數標示在小數數線上的能力，他們可能知道0.08是最小的小數，但是混淆右邊和左邊的方向</p>			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-3-11                      整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。備註：數線須從 0 開始。運用長度加減法 (N-2-11)，理解在數線上做加、減的意義。</p>	<p>N-4-8                      數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。備註：標記限一位小數 (相當於分母等於 10) 與分母不大於 5 的分數。以等值分數思維 (N-4-6) 協助學生認識整數、分數、小數為一體。因初學等值分數，本條目不處理分數和小數的混合計算問題。</p>	<p>N-7-5                      數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 <math> a-b </math> 表示數線上兩點 <math>a, b</math> 的距離。</p>

補救教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生不具備將小數標示於數線上的能力。
2. 學生不知道數線右邊的數比較大，左邊的數比較小。
3. 學生不具備比較小數大小的能力，他們不理會小數點的位置，只比較整數部分的大小，誤認為這四個小數中，最大的小數是 0.83。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 因為小數數線的結構和整數數線相同，教師可以先復習整數數線，為學習小數數線鋪路。例如透過直尺測量物長是 5 公分，指的是刻度 5 和刻度 0 的距離是 5 公分，幫助學生認識數線上的 5 有下列兩種意義：

(1) 在數線上的位置(或坐標)是 5。

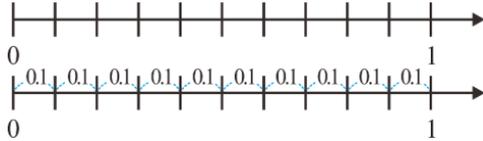
(2) 和原點 0 的距離是 5。

2. 和原點 0 的距離是 5。教師可以透過下列方法幫助學生理解小數數線：

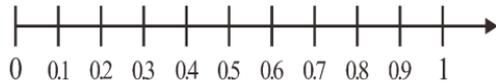
- (1) 以 1 公分為單位，利用直尺上的公分刻度繪製整數數線，並說明刻度 1 指的是 0 和 1 的距離是 1，刻度 2 指的是 0 和 2 的距離是 2，……。幫助學生理解整數數線的意義。如下所示：



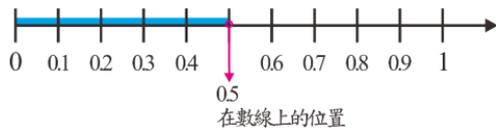
- (2) 以 10 公分為 1 單位，1 公分為 0.1 單位，利用直尺上的公分刻度，幫助學生理解小數數線的意義。如下所示：



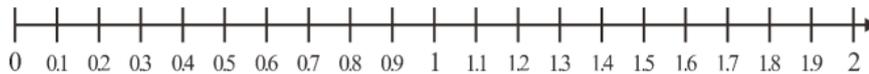
- (3) 將一位純小數標示在小數數線上，並理解刻度 0.1 和刻度 0 的距離是 0.1 單位，刻度 0.5 和刻度 0 的距離是 5 個 0.1 單位，也就是 0.5 單位，……。  
如下所示：

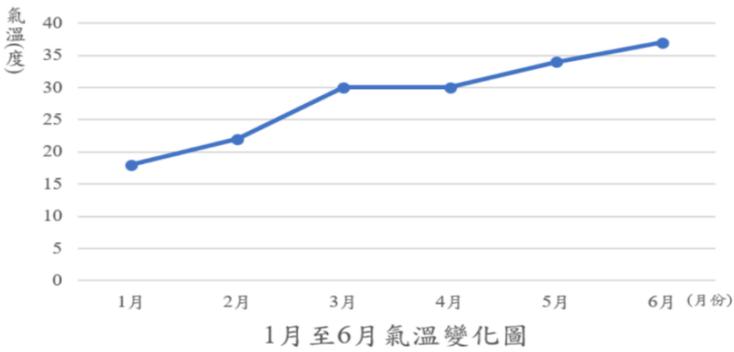


刻度 0.5 和原點 0  
在數線上的距離是 0.5 個單位



- (4) 將小數數線擴充至 1 以上。



題號	14		
內容領域	資料與不確定性	認知歷程向度	概念理解
學習內容	D-4-1 報讀長條圖與折線圖以及製作長條圖：報讀與說明生活中的長條圖與折線圖。配合其他領域課程，學習製作長條圖。 註：教學與示例應注意處理「分類資料」與「有序變化性資料」之差別。		
試題內容	<p>14. 下圖是 1 月到 6 月的氣溫變化圖。</p>  <p style="text-align: center;">1月至6月氣溫變化圖</p> <p>下列敘述何者正確？</p> <p>① 1 月的溫度是 15 度          ② 2 月到 3 月的溫度變化最大          ③ 4 月到 5 月的溫度變化最小          ④ 從 1 月到 6 月的氣溫不斷上升</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.02	0.06	0.00
2*	0.67	0.41	0.90
3	0.03	0.08	0.01
4	0.27	0.45	0.09
未作答	0.00		
通過率	0.67	鑑別度	0.49
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.49，正確答案為選項②，通過率為67%，顯示近七成的學生已具備報讀折線圖的能力。</p> <p>2. 有2%的學生選擇①(低分組有6%)，這些學生尚未具備報讀折線圖的能力。</p> <p>3. 有3%的學生選擇③(低分組有8%)，這些學生尚未報讀折線圖的能力。</p> <p>4. 有27%的學生選擇④(低分組有45%)，這些學生可能已具備報讀折線圖的能力，但是忽略3月到4月的氣溫沒有變化。</p>			



### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>D-3-1 一維表格與二維表格：以操作活動為主。報讀、說明與製作生活中的表格。二維表格含列聯表。備註：製作表格不限於日常資料統計性題材，也可應用於觀察數量模式的變化（R-3-2）。</p>	<p>D-4-1 報讀長條圖與折線圖以及製作長條圖：報讀與說明生活中的長條圖與折線圖。配合其他領域課程，學習製作長條圖。備註：教學與示例應注意處理「分類資料」與「有序變化性資料」之差別。</p>	<p>D-5-1 製作折線圖：製作生活中的折線圖。備註：分辨折線圖之使用時機。</p>

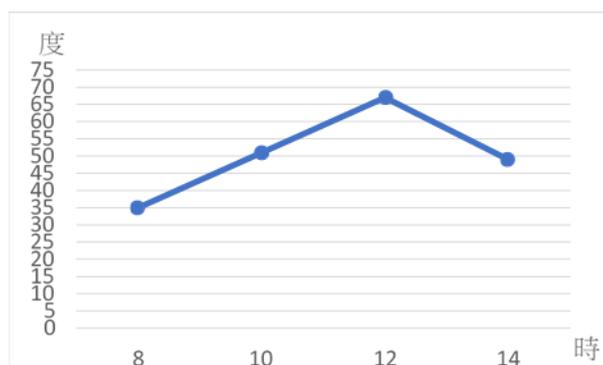
### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備報讀折線圖的能力。
2. 學生不容易比較 4-5 月及 5-6 月的溫度變化差異。
3. 學生忽略沒有變化的月份，僅就起訖溫度增加的變化情形進行作答。

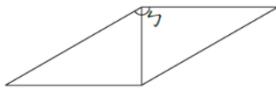
#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 由於資料的屬性不同，適用的統計圖形也不相同，如果資料項目屬於有序變數，例如時間、成績、身高、體重等，也就是當變數有方向或次序的關係時，數學上經常使用折線圖來溝通。以不同時間太陽高度角測量的折線圖為例，當我們改變有序變數(時間)的位置時，就會失去折線圖原本要傳遞訊息的意義。一般而言，折線圖是探討資料隨著時間或次序關係增加的變化情形，或用以預測可能的變化趨勢，其橫軸大都是依據時間的先後順序或數字的大小順序排列的，以下圖為例，我們很容易看到由 8 時至 14 時太陽高度角的變化情形。

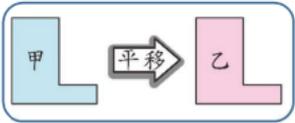
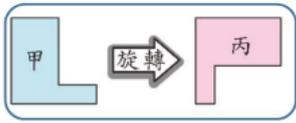
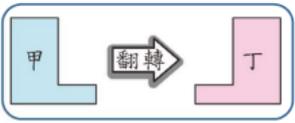


太陽高度角測量統計圖

2. 教師應要求學生必須有報讀折線圖的能力，有足夠的報讀經驗後，才能要求學生解讀。  
 報讀：看到資料直接讀出數據。  
 解讀：觀察資料以後，能使用自己的話說出對資料的想法。

題號	15		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	解題思考
學習內容	S-4-6 平面圖形的全等：以具體操作為主。形狀大小一樣的兩圖形全等。能用平移、旋轉、翻轉做全等疊合。全等圖形之對應角相等、對應邊相等。 備註：在具有平移或旋轉對稱特性的圖形上，學生可察覺豐富的全等模式。平移、旋轉、翻轉描述操作的方式，非名詞教學，名詞不應出現。		
試題內容	15. 下圖中三角板三個角的角度分別是 30 度、60 度和 90 度。 如圖，將兩個全等的三角板拼成一個四邊形，畫弧線的角是多少度？  ① 60 ② 90 ③ 120 ④ 150		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.18	0.01
2	0.16	0.30	0.04
3	0.19	0.26	0.10
4*	0.57	0.25	0.86
未作答	0.00		
通過率	0.57	鑑別度	0.60
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.60，正確答案為選項④，通過率為57%，顯示近六成的學生已具備利用全等圖形對應角相等性質解題的能力。 2. 有8%的學生選擇①(低分組有18%)，這些學生可能不具備利用全等圖形對應角相等性質解題的能力，他們也沒有角度的量感，直觀的認為給定角的角度是三角板中的60度。 3. 有16%的學生選擇②(低分組有30%)，這些學生可能不具備利用全等圖形對應角相等性質解題的能力，他們沒有角度的量感，直觀的認為給定角的角度是三角板中的90度。 4. 有19%的學生選擇③(低分組有26%)，這些學生不具備利用全等圖形對應角相等性質解題的能力，他們將對應角對應錯誤，誤認為給定角的角度是三角板中30度和90度合起來的結果。			



教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-1-2 形體的操作：以操作活動為主。描繪、複製、拼貼、堆疊。	S-4-6 平面圖形的全等：以具體操作為主。形狀大小一樣的兩圖形全等。能用平移、旋轉、翻轉做全等疊合。全等圖形之對應角相等、對應邊相等。 備註：在具有平移或旋轉對稱特性的圖形上，學生可察覺豐富的全等模式。平移、旋轉、翻轉描述操作的方式，非名詞教學，名詞不應出現。	S-5-4 線對稱：線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能沒有用符號標示全等圖形對應邊或對應角的習慣。</li> <li>2. 學生可能無法透過平移、旋轉或翻轉找出全等圖形的對應邊和對應角。</li> <li>3. 學生可能沒有角度的量感。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 將一個圖形平移、旋轉或翻轉後，該圖形的形狀和大小不會改變，討論的是圖形形狀的保留概念；將一個圖形平移、旋轉或翻轉後，會和另一個圖形完全疊合，討論的是兩個圖形的全等關係。學生必須掌握圖形形狀的保留概念，才能透過疊合判斷兩圖形是否全等。 當學生掌握兩圖形全等的意義後，可以開始討論全等關係的對稱性及遞移性。 全等的對稱性：圖形甲和圖形乙全等，圖形乙也會和圖形甲全等。 全等的遞移性：若圖形甲和圖形乙全等，圖形乙和圖形丙全等，則圖形甲和圖形丙全等。</li> <li>2. 甲圖形經過平移、旋轉或翻轉後，和乙圖形完全疊合，稱甲、乙兩個圖形全等。下面以圖一、圖二及圖三為例說明。 在圖一中，只要將左邊的圖形平移至右邊，就能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等。 在圖二中，必須先將左邊的圖形平移至右邊，再將左邊的圖形順時針旋轉 90 度，或逆時針旋轉 270 度，才能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等。 在圖三中，將左邊的圖形平移至右邊，不論如何旋轉，這兩個圖形都無法完全疊合，必須將左邊的圖形翻轉，才能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等。</li> </ol>			
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>圖一</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>圖二</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>圖三</p> </div> </div>			

3. 全等圖形不受顏色干擾，教師應強調「形狀、大小」相同，兩個圖形能完全疊合，釐清學生迷思概念。

4. 教師應透過平移、旋轉或翻轉圖形，幫助學生理解圖形的性質，在全等的操作下不會改變。例如將等腰三角形橫放、直放、斜放或翻轉，兩腰等長或兩底角相等的性質不會改變。

5. 四年級引入全等圖形、五年級引入線對稱圖形、六年級引入放大與縮小圖，這些教材討論的重點都是兩個圖形之間的關係。

全等是最容易溝通的關係，教師應透過操作，幫助學生認識兩圖形間構成要素的對應關係，例如三角形 ABC 和三角形 DEF 全等，將兩圖形疊合後，邊 AB 和邊 DE 重合，稱邊 AB 的對應邊為邊 DE，也稱邊 AB 和邊 DE 互為對應邊； $\angle A$  和  $\angle D$  重合，稱  $\angle A$  的對應角為  $\angle D$ ，也稱  $\angle A$  和  $\angle D$  互為對應角；A 點和 D 點重合，稱 A 點的對應點為 D 點，也稱 A 點和 D 點互為對應點，為五年級及六年級學習相關教材鋪路。

題號	16		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	程序執行
學習內容	S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。		
試題內容	<p>16. 下面是甲、乙、丙、丁四人關於三角形的說法。</p> <p>甲說：等腰三角形也可能是銳角三角形。  乙說：等腰三角形也可能是鈍角三角形。  丙說：鈍角三角形的三個角中，可能有一個角是直角。  丁說：直角三角形的三個角中，可能有一個角是鈍角。</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有甲和乙  ② 只有甲和丙  ③ 只有丙和丁  ④ 只有乙和丁</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.56	0.28	0.85
2	0.21	0.28	0.10
3	0.14	0.27	0.02
4	0.09	0.15	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.56	鑑別度	0.57
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.57，正確答案為選項①，通過率為56%，顯示近六成的學生已經具備運用「角」與「邊」的特徵比對三角形關係的能力。</p> <p>2. 有21%的學生選擇②(低分組有28%)，這些學生可能尚未具備運用「角」與「邊」的特徵比對三角形關係的能力，他們知道等腰三角形可能是銳角三角形，但是誤認為鈍角三角形中，可能有一個角是直角。</p> <p>3. 有14%的學生選擇③(低分組有27%)，這些學生可能尚未具備運用「角」與「邊」的特徵比對三角形關係的能力，他們誤認為鈍角三角形中，可能有一個角是直角，也誤認為直角三角形中，可能有一個角是鈍角。</p> <p>4. 有9%的學生選擇④(低分組有15%)，這這些學生可能尚未具備運用「角」與「邊」的特徵比對三角形關係的能力，他們知道等腰三角形可能是鈍角三角形，但是誤認為直角三角形中，可能有一個角是鈍角。</p>			

教材地位分析				
		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-3-1 角與角度(同 N-3-13): 以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 備註:用直尺或三角板的直角來認識與複製直角。教學應處理角大小與邊長長短或面積大小混淆之常見錯誤。	S-4-7 三角形:以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。	S-5-1 三角形與四邊形的性質:操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊相等、對角相等。 備註:簡單推理,例如:四邊形四內角和為 360 度,三角形不可能有兩鈍角。	

### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能無法掌握等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形的性質。
2. 四年級學生尚未學過三角形的內角和為 180 度,無法掌握直角三角形只有一個直角,鈍角三角形只有一個鈍角的意義。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師運用「角」與「邊」的特徵比對,辨認下列三角形,也就是給下列三角形下定義。

等腰三角形:兩邊等長或三邊都等長的三角形。

直角三角形:有一個角是直角,另兩個角是銳角的三角形。

銳角三角形:三個角都是銳角的三角形。

鈍角三角形:有一個角是鈍角,另兩個角是銳角的三角形。

等腰直角三角形:有一個角是直角的等腰三角形。

正三角形:三邊都等長的三角形。

2. 有兩種定義正三角形的方法:

第一種:三邊都等長的三角形。

第二種:三邊都等長且三個角都一樣大的三角形。

建議教師在四年級時引入第一種定義,因為只要知道三角形三邊等長,就能確定該三角形為正三角形。

五年級引入正多邊形的定義,例如  $n$  邊都一樣長, $n$  個角都一樣大的  $n$  邊形,稱為正  $n$  邊形後( $n \geq 3$ ),正三角形成為正多邊形的一種,此時才能引入第二種定義,稱三邊都等長且三個角都一樣大的三角形為正三角形。

3. 有三種定義直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形的的方法:

第一種方法:直角三角形:有一個角是直角、其它二個角是銳角的三角形。

鈍角三角形:有一個角是鈍角、其它二個角是銳角的三角形。

銳角三角形:三個角都是銳角的三角形。

第二種方法：直角三角形：有一個角是直角的三角形。

    鈍角三角形：有一個角是鈍角的三角形。

    銳角三角形：三個角都是銳角的三角形。

第三種方法：直角三角形：最大角是直角的三角形。

    鈍角三角形：最大角是鈍角的三角形。

    銳角三角形：最大角是銳角的三角形。

因為五年級才引入三角形內角和為 180 度的性質，學生不知道一個角是直角或鈍角時，其它兩個角一定是銳角，因此本基本學習內容限制使用第一種方法定義直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形。

4. 有兩種定義等腰三角形的方法：

    第一種：有兩邊等長的三角形。

    第二種：兩邊等長或三邊都等長的三角形。

數學上將正三角形也看成等腰三角形，因此第一種定義中的「有」，指的是「最少有」，學生可能不理解其意義，建議教師引入第二種定義。

教師不宜過度評量正三角形是等腰三角形的問題。

5. 教師可以透過摺紙或實測，幫助學生認識圖形的幾何性質。

    例如：等腰三角形的兩個底角相等，正三角形的三個角都相等。

題號	17		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-4-9 長度：「公里」。生活實例之應用。含其他長度單位的換算與計算。 備註：量的大單位教學仍應協助學生建立基本量感。		
試題內容	<p>17. 曾文溪的長度約為 138470 公尺，和幾公里幾公尺一樣長？</p> <p>① 13 公里 847 公尺          ② 13 公里 8470 公尺          ③ 138 公里 470 公尺          ④ 1384 公里 70 公尺</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.13	0.01
2	0.28	0.40	0.13
3*	0.60	0.36	0.83
4	0.06	0.10	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.60	鑑別度	0.47
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.47，正確答案為選項③，通過率為60%，顯示有六成的學生已具備將單名數公尺聚成複名數公里和公尺的能力。</p> <p>2. 有6%的學生選擇①(低分組有13%)，這些學生可能不具備將單名數公尺聚成複名數公里和公尺的能力；他們也可能具備將單名數公尺聚成複名數公里和公尺的能力，但是看錯題目，將138470公尺看成13847公尺。</p> <p>3. 有28%的學生選擇②(低分組有40%)，這些學生可能不具備將單名數公尺聚成複名數公里和公尺的能力，他們誤認為1公里=10000公尺，得到13公里8470公尺的答案。</p> <p>4. 有6%的學生選擇④(低分組有10%)，這些學生可能不具備將單名數公尺聚成複名數公里和公尺的能力，他們誤認為1公里=100公尺，得到1384公里70公尺的答案。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-3-12 長度：「毫米」。實測、量感、估測與計算。單位換算。	N-4-9 長度：「公里」。生活實例之應用。含其他長度單位的換算與計算。 備註：量的大單位教學仍應協助學生建立基本量感。	S-6-2 解題：地圖比例尺。地圖比例尺之意義、記號與應用。地圖上兩邊長的比和實際兩邊長的比相等。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備將單名數公尺聚成複名數公里和公尺的能力。</li> <li>2. 學生可能誤認為「1 公里=10000 公尺」。</li> <li>3. 學生可能誤認為「1 公里=100 公尺」。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 1 公里的量感不易引入，但可透過下列方式認識 1 公里大約有多長。 <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 1 公里學生大約走 30 分鐘，成人大約走 15 分鐘。</li> <li>(2) 操場跑道一圈長 200 公尺，1 公里大約走 5 圈。</li> </ol> </li> <li>2. 四年級長度化聚教學重點： <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 公里和公尺的整數倍雙向化聚，例如 3 公里=( )公尺，3000 公尺=( )公里。</li> <li>(2) 公里和公分的整數倍化聚(只處理大單位化為小單位)。例如 3 公里=( )公分 引入公里及公分化聚，是為了六年級比例尺的教學鋪路。</li> <li>(3) 引入二位小數後，可以處理公分聚成公尺或公尺化成公分的小數倍化聚。例如 3 公分=( )公尺。23 公分=( )公尺。3.65 公尺=( )公分。</li> <li>(4) 四年級不討論分數倍和小數倍的化聚，例如 3.8 公尺=( )公分(利用乘法解題)。435 公尺=( )公里(利用除法解題)。分數倍和小數倍的化聚(利用乘法或除法解題)是五年級的教學重點。</li> </ol> </li> <li>3. 公制單位  「公制單位」是十進位制的單位，全世界通用，而且方便記憶。國小課本中出現的單位是社會上較常使用的「公制單位」，稱之為「常用單位」。  在測量長度、重量、容量.....時，公制單位都先選擇一個基準單位，並使用一組形容詞來描述各單位與基準單位間的十進關係。以「長度」單位為例，公制單位選擇「米」當做長度的基本單位，然後在「米」前面加上十、百、千、百萬、十億等數量詞以表示這些單位與「米」的十倍、百倍、千倍、百萬倍、十億倍的關係，例如：千米表示和 1000 個 1 米接來一樣長。在「米」前面加上如分、厘、毫、微、奈等形容詞則表示這些單位與「米」的十分之一倍、百分之一倍、千分之一倍、百萬分之一倍、十億分之一倍等關係，例如：厘米表示百分之一米、毫米表示千分之一米、微米表示百萬分之一米、奈米表示十億分之一米。  相同的，公制單位選擇了「公升」當做「容量」的基準單位，分公升表示十分之一公升，毫公升表示千分之一公升，微公升表示百萬分之一公升，有時也將分公 </li> </ol>			

升、毫公升等簡稱為分升、毫升。因此，當我們知道不同單位的基準單位之後，只要記憶一組形容詞，就能夠掌握單位間的倍數關係，對解決單位間的化聚有很大的幫助。

下面提供長度及容量不同單位對應的表格，第三行的描述方式和第二行英文公制單位的描述方式一致。

長度單位	公里	公引	公丈	公尺	公寸	公分	公釐
	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	千米	百米	十米	米	分米	厘米	毫米

容量單位	公秉	公石	公斗	公升	公合	公勺	公撮
	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
	千公秉	百公升	十公升	公升	分公升	厘公升	毫公升

#### 4. 常用單位

以長度的單位為例，我國每十倍就有一個單位的名稱，例如公里、公引、公丈、公尺、公寸、公分、公厘都是長度的單位；公制單位每十倍也有一個單位的名稱，例如 km（千米）、hm（百米）、dam（十米）、m（米）、dm（分米）、cm（厘米）、mm（毫米）等都是長度的單位，但是日常生活中，並不需要用到這麼多的單位。

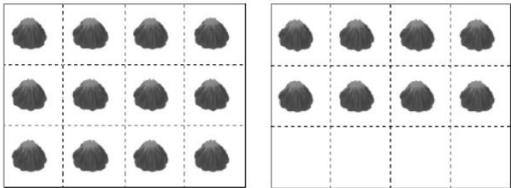
以公制長度的基本單位「米」為例，西方人認為 1000 以內的數量都是可以掌握的，因此 13 個「1 米」稱為 13 米即可，並不需要引入新的單位「十米」，將 13 米稱為 1「十米」3「米」；278 個「1 米」稱為 278 米即可，並不需要引入新的單位「百米」和「十米」，將 278 米稱為 2「百米」7「十米」8「米」。當「1 米」的個數超過 1000 個時，才需要引入新的單位「千米」，並將 2465 個「1 米」稱為 2「千米」465「米」。

公制單位是西方人發明的，延伸西方人三位一撇的概念，在長度單位中，經常使用的單位是「千米」、「米」、「毫米」、「微米」、「奈米」，其中「千米」是「米」的 1000 倍，「米」是「毫米」的 1000 倍、「毫米」是「微米」的 1000 倍、「微米」是「奈米」的 1000 倍，也就是說，經常使用的單位間都滿足 1000 倍的關係。

轉換成課本中出現的單位，課本中出現的長度單位是「公里」、「公尺」、「公分」、「毫米」，重量單位是「公噸」、「公斤」、「公克」，容量單位是「公秉」、「公升」、「毫升」，如果將公分拿走，相鄰兩個單位間都是 1000 倍的關係。換句話說，只要能掌握三位一撇的概念，再記憶 1 公尺=100 公分、1 公分=10 毫米的倍數關係，就可以掌握國小階段長度、重量和容量不同單位間的倍數關係。

題號	18		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	解題思考
學習內容	S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。 備註：邊長限整數。最後學生的計算是依據定義以乘法計算，而非測量合成之結果。簡單複合圖形限兩圖形之組合。		
試題內容	18. 周長 40 公分的正方形，面積是多少平方公分？ ① 10 ② 40 ③ 100 ④ 1600		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.12	0.01
2	0.06	0.14	0.01
3*	0.54	0.23	0.84
4	0.34	0.50	0.14
未作答	0.00		
通過率	0.54	鑑別度	0.61
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.61，正確答案為選項③，通過率為54%，顯示超過五成的學生已具備利用正方形周長與面積公式解題的能力。</p> <p>2. 有6%的學生選擇①(低分組有12%)，這些學生可能已具備利用正方形周長公式解題的能力，但不具備利用正方形面積公式解題的能力，只算出正方形的周長。</p> <p>3. 有6%的學生選擇②(低分組有14%)，這些學生尚未具備利用正方形周長與面積公式解題的能力，誤認為正方形的周長和面積一樣大。</p> <p>4. 有34%的學生選擇④(低分組有50%)，這些學生可能已具備利用正方形面積公式解題的能力，他們可能誤以為周長就是邊長，直接利用正方形面積公式算出答案。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。 備註：應用平方公分板（百格圖），協助點數簡單圖形如正方形、長方形、三角形之面積，但不發展一般公式。</p>	<p>S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。 備註：邊長限整數。最後學生的計算是依據定義以乘法計算，而非測量合成之結果。簡單複合圖形限兩圖形之組合。</p>	<p>S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。 備註：計算面積的問題，若採用分數或小數之邊長與高，必須在分數和小數的乘法後教學（N-5-5、N-5-8）。</p>
補救教學建議			
<p><b>(一) 錯誤類型的可能原因</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能混淆正方形邊長與周長的意義，誤認為周長就是邊長。</li> <li>2. 學生可能不具備利用正方形周長與面積公式解題的能力。</li> <li>3. 學生可能認為正方形的周長與面積一樣大。</li> </ol> <p><b>(二) 核心概念與本題的教學重點</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生常混淆正方形及長方形周長及面積公式解題的意義，教師應多提供學生利用長度單位「1 公分」或「1 公尺」實測的經驗，例如 50 個「1 公分」接起來，剛好和甲繩一樣長，可以稱甲繩的長度是 50 公分；也應該多提供學生利用面積單位「1 平方公分」或「1 平方公尺」實測的經驗，例如將 30 個「1 平方公分」合起來，剛好和色紙一樣大，就可以稱色紙的面積是 30 平方公分。 「1 公分」和「1 平方公分」是兩種不相同的量，當學生有豐富的長度及面積單位實測的經驗，比較不會混淆正方形及長方形周長及面積公式解題的意義。</li> <li>2. 如果學生混淆正方形及長方形周長及面積公式，教師可以要求學生熟記面積公式即可，評量周長時，學生只要理解正方形邊長、長方形長邊、寬邊，以及圖形周長的意義，並畫出正方形及長方形的圖形，就能順利的解題。</li> </ol>			

題號	19		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	<p>N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。</p> <p>備註：本條目教學，分子和分母的數字都不用太大，以能流暢學習同分母分數計算為目標。帶分數整數倍教學不宜強迫學生化成假分數進行，其中隱含之分配律思維來自操作經驗與數感，此非分配律教學。</p>		
試題內容	<p>19. 一盒巧克力有 12 顆，下圖中共有多少盒巧克力？</p>  <p>下面是甲、乙、丙、丁四個人的說法。</p> <p>甲說：<math>\frac{20}{24}</math> 盒。</p> <p>乙說：<math>1\frac{8}{24}</math> 盒。</p> <p>丙說：<math>\frac{20}{12}</math> 盒。</p> <p>丁說：<math>1\frac{2}{3}</math> 盒。</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有甲          ② 只有甲、乙          ③ 只有乙、丙          ④ 只有丙、丁</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.26	0.28	0.20
2	0.18	0.25	0.09
3	0.19	0.29	0.07
4*	0.36	0.17	0.65
未作答	0.00		
通過率	0.36	鑑別度	0.48

### 試題品質分析

1. 本題鑑別度為0.48，正確答案為選項④，通過率為36%，顯示近四成的學生已具備離散量情境假分數和帶分數說讀聽寫的能力。
2. 有26%的學生選擇①(低分組有28%)，這些學生可能不具備離散量情境假分數和帶分數說讀聽寫的能力；這些學生可能已具備離散量情境真分數說讀聽寫的能力，他們誤認為單位量是24顆。
3. 有18%的學生選擇②(低分組有25%)，這些學生可能不具備離散量情境假分數和帶分數說讀聽寫的能力。
4. 有19%的學生選擇③(低分組有29%)，這些學生可能不具備離散量情境假分數和帶分數說讀聽寫的能力。

### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-3-8 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於1」的意義。	N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。 備註：本條目教學，分子和分母的數字都不用太大，以能流暢學習同分母分數計算為目標。帶分數整數倍教學不宜強迫學生化成假分數進行，其中隱含之分配律思維來自操作經驗與數感，此非分配律教學。	N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備離散量情境假分數和帶分數說讀聽寫的能力。
2. 學生可能無法由問題中掌握單位量。
3. 學生可能沒有將單位分數看成被計數單位的能力。
4. 學生可能無法掌握等值分數的意義。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 「 $1 = \frac{n}{n}$ 」是帶分數及假分數互換的先備知識。

學生可以利用加法算式「 $1 = \frac{7}{7}, \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{4}{7} = \frac{25}{7}$ 」，或乘法算式「 $\frac{7}{7} \times 3 = \frac{21}{7}, \frac{21}{7} + \frac{4}{7} = \frac{25}{7}$ 」，將帶分數  $3\frac{4}{7}$  換成假分數  $\frac{25}{7}$ 。

也可以利用減法算式「 $\frac{7}{7} = 1, \frac{25}{7} - \frac{7}{7} - \frac{7}{7} - \frac{7}{7} = \frac{4}{7}$ 」，或乘法算式「 $\frac{7}{7} \times 3 = \frac{21}{7}, \frac{25}{7} - \frac{21}{7} = \frac{4}{7}$ 」，將假分數  $\frac{25}{7}$  換成帶分數  $3\frac{4}{7}$ 。

教師不宜限制學生，只能利用「 $25 \div 7 = 3 \dots 4$ 」的算法，將假分數  $\frac{25}{7}$  換成帶分數  $3\frac{4}{7}$ 。

2. 以將假分數  $\frac{25}{7}$  換成帶分數  $3\frac{4}{7}$  為例，提出兩種解題的方法，說明如何幫助學生利用「 $25 \div 7 = 3 \dots 4$ 」的算法，得到  $\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$ 。

方法一：以  $\frac{1}{7}$  為單位，透過減法算式引入除法算式

拿出 1 條黑色積木(長 7 公分)，將黑色積木平分成 7 份，其中的 1 份和 1 個白色積木一樣長，可以用 1 個白色積木代表  $\frac{1}{7}$  條黑色積木。

$\frac{25}{7}$  是 25 個  $\frac{1}{7}$ ，拿出 25 個白色積木代表 25 個  $\frac{1}{7}$ ，每 7 個白色積木換 1 條黑色積木，先幫助學生用減法算式「 $25 - 7 = 18, 18 - 7 = 11, 11 - 7 = 4$ 」，得到可以換 3 條黑色積木，還剩下 4 個白色積木，也就是  $\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$  的答案，再用除法算式「 $25 \div 7 = 3 \dots 4$ 」，以較有效率的算法得到  $\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$  的答案。

方法二：被除數和除數同時換成以  $\frac{1}{7}$  為單位

「 $25 \div 7 = 3 \dots 4$ 」，算式中的 25 指的是 25 個  $\frac{1}{7}$ ，每次拿走 7 個  $\frac{1}{7}$  換成 1 後，可以拿走 3 次，還剩下 4 個  $\frac{1}{7}$ ，也就是說，餘數 4 指的是 4 個  $\frac{1}{7}$ ，而不是 4 個 1。

題號	20		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-4-11 面積：「平方公尺」。實測、量感、估測與計算。 備註：基於 N-4-2，本條目不做「平方公分」換到「平方公尺」的問題。不用複名數進行計算。		
試題內容	<p>20. 邊長為 100 公分的正方形，面積是多少？</p> <p>① 1 平方公尺</p> <p>② 1 平方公分</p> <p>③ 100 平方公分</p> <p>④ 100 平方公尺</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.55	0.32	0.79
2	0.07	0.15	0.02
3	0.14	0.26	0.04
4	0.22	0.26	0.15
未作答	0.00		
通過率	0.55	鑑別度	0.47
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.47，正確答案為選項①，通過率為55%，顯示五成五的學生已具備平方公分及平方公尺化聚及利用正方形面積公式解題的能力。</p> <p>2. 有7%的學生選擇②(低分組有15%)，這些學生尚未具備平方公分及平方公尺化聚及利用正方形面積公式解題的能力。</p> <p>3. 有14%的學生選擇③(低分組有26%)，這些學生尚未具備平方公分及平方公尺化聚及利用正方形面積公式解題的能力；這些學生也可能認為邊長100公分正方形的面積是100平方公分。</p> <p>4. 有22%的學生選擇④(低分組有26%)，這些學生尚未具備平方公分及平方公尺化聚及利用正方形面積公式解題的能力；這些學生也可能已具備利用正方形面積公式解題的能力，但是誤認為1平方公尺=100平方公分。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。 備註：應用平方公分板（百格圖），協助點數簡單圖形如正方形、長方形、三角形之面積，但不發展一般公式。	N-4-11 面積：「平方公尺」。實測、量感、估測與計算。 備註：基於 N-4-2，本條目不做「平方公分」換到「平方公尺」的問題。不用複名數進行計算。	N-5-12 面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。 備註：針對量的大單位教學，教師應運用學生熟悉的生活示例，體會各單位的量感。
補救教學建議			
<p><b>(一) 錯誤類型的可能原因</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備辨識面積及長度單位的能力。</li> <li>2. 學生可能不具備平方公分及平方公尺化聚的能力。</li> <li>3. 學生可能不具備利用正方形面積公式解題的能力，誤認為正方形面積和邊長的值一樣大。</li> <li>4. 學生可能尚未能掌握 <math>10000 \text{ 平方公分} = 1 \text{ 平方公尺}</math>，誤認為 <math>1 \text{ 平方公尺} = 100 \text{ 平方公分}</math>。</li> </ol> <p><b>(二) 核心概念與本題的教學重點</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 建議教師先引入 1 平方公分，再引入 1 平方公尺，下面說明如何幫助學生將平方公尺化成平方公分。            步驟一：先命名邊長 1 公尺的正方形面積為 1 平方公尺。            步驟二：1 平方公尺是邊長 1 公尺的正方形面積，也是邊長 100 公分正方形的面積，邊長 100 公分正方形是由 10000 個 1 平方公分組成的，            所以 <math>1 \text{ 平方公尺} = 10000 \text{ 平方公分}</math>。            (1) 如果尚未引入正方形的面積公式，可以利用平方公分板，透過乘法算式 <math>100 \times 100 = 10000</math>，算出邊長 100 公分正方形的面積是 10000 平方公分。            (2) 如果已引入正方形面積公式，可以利用面積公式算出邊長 100 公分正方形的面積是 10000 平方公分。</li> <li>2. 二年級只進行面積的直接、間接及個別單位比較。            三年級引入面積單位「平方公分」。            四年級引入面積單位「平方公尺」。            五年級引入面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」。</li> </ol>			

題號	21		
內容領域	關係	認知歷程向度	程序執行
學習內容	<p>R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。</p> <p>備註：加減部分，不做 <math>a-(b-c)</math> 之去括號。乘除只做「三數相乘，順序改變不影響其積」、「先乘後除與先除後乘的結果相同」。必須呈現以下原則的範例：將應用問題轉化成算式後，再利用計算規律調整算式進行計算解題（其中調整後的算式已無法以原情境來解釋）。</p>		
試題內容	<p>21. 已知 <math>12 + 8 \times 5 = \text{甲}</math>，<math>60 \div 2 \times 3 = \text{乙}</math>，請問下列敘述何者正確？</p> <p>① 甲 = 100，乙 = 90          ② 甲 = 100，乙 = 10          ③ 甲 = 52，乙 = 90          ④ 甲 = 52，乙 = 10</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.41	0.51	0.24
2	0.06	0.14	0.01
3*	0.45	0.22	0.71
4	0.08	0.12	0.04
未作答	0.00		
通過率	0.45	鑑別度	0.49
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.49，正確答案為選項③，通過率為45%，顯示有四成五的學生已具備兩步驟四則混合計算解題的能力。</p> <p>2. 有41%的學生選擇①(低分組有51%)，這些學生可能尚未具備兩步驟四則混合計算解題的能力，不知道「先乘除後加減」運算次序的約定，他們由右開始往左算，得到錯誤的答案。</p> <p>3. 有6%的學生選擇②(低分組有14%)，這些學生可能尚未具備兩步驟四則混合計算解題的能力：</p> <p>(1) 他們不知道「先乘除後加減」運算次序的約定，他們由右開始往左計算算式甲，<math>12 + 8 \times 5 = 20 \times 5 = 100</math>，得到錯誤的答案 100。</p> <p>(2) 他們也誤解「先乘除後加減」運算次序的約定，誤認為乘法運算優先於除法運算，<math>60 \div 2 \times 3 = 60 \div 6 = 10</math>，得到錯誤的答案 10。</p> <p>4. 有 8%的學生選擇④(低分組有 12%)，這些學生可能尚未具備兩步驟四則混合計算解題的能力，他們誤解「先乘除後加減」運算次序的約定，誤認為乘法運算優先於除法運算，<math>60 \div 2 \times 3 = 60 \div 6 = 10</math>，得到錯誤的答案 10。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	R-2-2 三數相加，順序改變不影響其和：加法交換律和結合律的綜合。可併入其他教學活動。	R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。 備註：加減部分，不做 $a-(b-c)$ 之去括號。乘除只做「三數相乘，順序改變不影響其積」、「先乘後除與先除後乘的結果相同」。必須呈現以下原則的範例：將應用問題轉化成算式後，再利用計算規律調整算式進行計算解題（其中調整後的算式已無法以原情境來解釋）。	R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法或減法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生未掌握「先乘除後加減」運算次序的約定，例：<math>7+2\times 3=7+6=13</math>就是利用「先乘除後加減」運算次序的約定，不是利用「由左往右算」運算次序的約定。</li> <li>2. 學生混淆「先乘除後加減」運算次序的約定，誤認為乘的運算次序比除優先。例：<math>12\div 3\times 2=12\div 6=2</math>是學生常出現的迷思概念，教師應說明這些算式都是「乘、除」，要使用「由左往右算」運算次序的約定。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 四年級兩步驟計算問題中，只會用到①括號先算、②先乘除後加減、③由左往右算，這三個約定其中的一個約定。 括號先算：<math>13-(2+5)=13-7=6</math> <math>7\times(5-2)=7\times 3=21</math> 先乘除後加減：<math>5+3\times 4=5+12=17</math> <math>12-6\div 2=12-3=9</math> <math>5\times 6+2=30+2=32</math> <math>60\div 2-9=30-9=21</math> 由左往右算：<math>12+3-5=15-5=10</math> <math>12\div 3\times 2=4\times 2=8</math></li> </ol> <p>建議教師將兩步驟計算問題分成有括號和沒有括號兩類，來幫助學生解題。 第一類：有括號的兩步驟計算問題 括號的部分要先算，簡稱為括號先算。</p>			

第二類：沒有括號的兩步驟計算問題

(1) 算式中加、減，乘、除都有時，要先算乘、除的部分。

簡稱為先乘除後加減。

(2) 算式中都是乘、除時，要由左往右算；算式中都是加、減時，也要由左往右算。簡稱為由左往右算。

2. 以「 $25 \times 17 \times 4 = ( )$ 」為例，說明運算次序和運算性質的差異。

(1) 運算次序： $25 \times 17 \times 4 = (25 \times 17) \times 4 = 425 \times 4 = 1700$

教學重點：先算什麼，後算什麼。

(2) 運算性質： $25 \times 17 \times 4 = (25 \times 4) \times 17 = 100 \times 17 = 1700$

教學重點：利用乘法交換律與乘法結合律簡化計算。

本指標教學重點是運算次序，教師教學的重點是「由左往右算」，運算次序的約定，不宜同時討論運算性質。

3. 對四年級學生而言，「先乘除後加減」的四則混合計算問題最困難，建議教師透過比較下列左右兩個算式的運算次序，幫助學生發現兩個共同的特徵。

(1) 這些算式中，「加、減」和「乘、除」這兩類運算符號都有。

(2) 左邊的算式有括號，括號的部分要先算，右邊的算式中沒有括號，有乘或除運算的部分要先算。

再說明算式中「加、減」這一類和「乘、除」這一類的運算都有的時候，要先算「乘、除」的部分，稱這種運算次序的約定為「先乘除後加減」。

$$\begin{aligned}(2 \times 3) + 7 &= 6 + 7 \\ &= 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(30 \div 3) - 7 &= 10 - 7 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}20 - (3 \times 4) &= 20 - 12 \\ &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8 + (12 \div 3) &= 8 + 4 \\ &= 12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \times 3 + 7 &= 6 + 7 \\ &= 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}30 \div 3 - 7 &= 10 - 7 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}20 - 3 \times 4 &= 20 - 12 \\ &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8 + 12 \div 3 &= 8 + 4 \\ &= 12\end{aligned}$$

題號	22		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-3-12 長度：「毫米」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 備註：基於 N-3-1 的限制，單位換算時，公尺數限個位數。自 3 年級後，量的計算可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。		
試題內容	22. 請問 19 公分和 30 毫米接起來長多少毫米？ ① 49 ② 220 ③ 1930 ④ 19030		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.26	0.02
2*	0.54	0.26	0.84
3	0.25	0.36	0.11
4	0.08	0.12	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.54	鑑別度	0.59
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.59，正確答案為選項②，通過率為 54%，顯示超過五成的學生已具備公分和毫米單位化聚的能力。 2. 有 12%的學生選擇①(低分組有 26%)，這些學生可能尚未具備公分和毫米單位化聚的能力，直接將數字相加做為答案。 3. 有 25%的學生選擇③(低分組有 36%)，這些學生可能尚未具備公分和毫米單位化聚的能力，他們誤認為 1 公分=100 毫米。 4. 有 8%的學生選擇④(低分組有 12%)，這些學生可能尚未具備公分和毫米單位化聚的能力，他們誤認為 1 公分=1000 毫米。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-2-11 長度：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 備註：基於 N-2-1 的限制，單位換算時公尺數限個位數。長度的加減問題必須包含和數線加減可以連結之題材（N-3-11）	N-3-12 長度：「毫米」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 備註：基於 N-3-1 的限制，單位換算時，公尺數限個位數。自 3 年級後，量的計算可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。	N-4-9 長度：「公里」。生活實例之應用。含其他長度單位的換算與計算。 備註：量的大單位教學仍應協助學生建立基本量感。
補救教學建議			
<p><b>(一) 錯誤類型的可能原因</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生尚未具備公分和毫米單位化聚能力。</li> <li>2. 學生未能掌握不同單位量的加減意義，例如不理解幾公分和幾毫米接起來有多長。</li> <li>3. 學生可能誤認為 1 公分 = 1000 毫米或 1 公分 = 100 毫米。</li> </ol> <p><b>(二) 核心概念與本題的教學重點</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師應幫助學生認識「1 公分 = 10 毫米」的關係。 「公尺、公分」間是 100 倍的化聚關係，「公尺、毫米」間是 1000 倍的化聚關係。</li> <li>2. 教師應幫助學生進行複名數的命名活動。 當學生認識公尺及公分單位後，例如認識 3 公尺和 50 公分的意義後，就可以透過下列的問話「我們已經認識 3 公尺，也認識 50 公分，我們如何稱呼 3 公尺和 50 公分合起來的長度？名稱中要看到 3 公尺和 50 公分，還要看到 3 公尺和 50 公分合起來」，幫助學生將 3 公尺和 50 公分合起來的長度稱為 3 公尺 50 公分。再透過下列的問話「3 公尺和 50 公分中，是否看到 3 公尺和 50 公分，是否看到 3 公尺和 50 公分合起來」，幫助學生理解 3 公尺 50 公分指的是 3 公尺和 50 公分合起來的長度。</li> </ol>			

題號	23		
內容領域	關係	認知歷程向度	概念理解
學習內容	<p>R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。</p> <p>備註：加減部分，不做 <math>a-(b-c)</math> 之去括號。乘除只做「三數相乘，順序改變不影響其積」、「先乘後除與先除後乘的結果相同」。必須呈現以下原則的範例：將應用問題轉化成算式後，再利用計算規律調整算式進行計算解題（其中調整後的算式已無法以原情境來解釋）。</p>		
試題內容	<p>23. 「一包巧克力有 48 顆，老師買了 6 包，平分給 3 個小朋友，每個小朋友可以分到多少顆巧克力？」</p> <p>下列是甲、乙、丙和丁的算式。</p> <p>甲：<math>48 \div 3 \times 6</math>。</p> <p>乙：<math>48 \times 6 \div 3</math>。</p> <p>丙：<math>(48 \div 3) \times 6</math>。</p> <p>丁：<math>48 \times (6 \div 3)</math>。</p> <p>請問哪些人的算式可以算出正確的答案？</p> <p>① 只有甲和乙</p> <p>② 只有乙和丙</p> <p>③ 只有甲、乙和丙</p> <p>④ 甲、乙、丙和丁</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.20	0.26	0.09
2	0.23	0.33	0.11
3	0.28	0.21	0.36
4*	0.28	0.18	0.44
未作答	0.01		
通過率	0.28	鑑別度	0.26
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.26，正確答案為選項④，通過率為28%，顯示近三成的學生已具備先乘後除兩步驟問題列式及利用數的運算性質解題的能力。</p> <p>2. 有20%的學生選擇①(低分組有26%)，這些學生可能未具備先乘後除兩步驟問題列式及利用數的運算性質解題的能力，他們可能知道「先乘後除與先除後乘的結果相同」，但是不知道「括號先算」運算次序的約定。</p> <p>3. 有23%的學生選擇②(低分組有33%)，這些學生可能未具備先乘後除兩步驟問題列式及利用數的運算性質解題的能力，他們可能不知道「先乘後除與先除後乘的結果相同」。</p>			

4. 有28%的學生選擇③(低分組有21%)，這些學生可能未具備先乘後除兩步驟問題列式及利用數的運算性質解題的能力，他們可能知道「先乘後除與先除後乘的結果相同」，但是不知道「括號先算」運算次序的約定。

#### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	R-2-2 三數相加，順序改變不影響其和：加法交換律和結合律的綜合。可併入其他教學活動。	R-4-2 四則計算規律(I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。 備註：加減部分，不做 $a-(b-c)$ 之去括號。乘除只做「三數相乘，順序改變不影響其積」、「先乘後除與先除後乘的結果相同」。必須呈現以下原則的範例：將應用問題轉化成算式後，再利用計算規律調整算式進行計算解題（其中調整後的算式已無法以原情境來解釋）。	R-5-2 四則計算規律(II)：乘除混合計算。「乘法對加法或減法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

#### 補救教學建議

##### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備先乘後除兩步驟問題列式的能力。
2. 學生可能不知道「先乘後除與先除後乘的結果相同」的性質。

##### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 以「1袋餅乾有30包，老師買了5袋，平分給25個人，每個人可以分到多少包餅乾？」為例，教師可透過分段布題的方式，幫助學生用兩個算式記錄解題活動。
  - 步驟一：先布問題「1袋餅乾有30包，老師買了5袋，共有多少包？」，用算式把做法記下來。  
幫助學生用算式「 $30 \times 5 = 150$ 」把做法記下來。
  - 步驟二：再布問題「150包餅乾，平分給25個人，每個人可以分到多少包餅乾？」，用算式把做法記下來。  
幫助學生用算式「 $150 \div 25 = 6$ 」記錄解題活動。
  - 步驟三：回到原問題「1袋餅乾有30包，老師買了5袋，平分給25個人，每個人可以得多少包餅乾？」，用兩個算式把先算什麼，再算什麼的算法記下來。  
幫助學生用兩個算式「 $30 \times 5 = 150$ ， $150 \div 25 = 6$ 」把做法記下來。

2. 下面以「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」為例，說明兩步驟問題的教學流程。

(1) 用兩個算式記錄解題活動

$$15 + 25 = 40, 40 \div 5 = 8, \text{答：可以買 8 枝。}$$

(2) 將兩個算式改記成併式的記法

$$\text{將「} 15 + 25 = 40, 40 \div 5 = 8 \text{」改記成「} (15 + 25) \div 5 = 8 \text{」。}$$

(3) 用併式記錄解題活動

$$(15 + 25) \div 5 = 8, \text{答：可以買 8 枝。}$$

(4) 用算式填充題來列式

$$(15 + 25) \div 5 = ( )。$$

(5) 先列式，再用逐次減項記錄解題活動

$$(15 + 25) \div 5 = ( )$$

$$(15 + 25) \div 5$$

$$= 40 \div 5$$

$$= 8, \text{答：可以買 8 枝}$$

3. 建議教師在具體情境中，幫助學生理解乘法結合律。

以「一盒蘋果裝 25 顆，12 盒蘋果裝一箱。爸爸進口 20 箱蘋果，請問進口幾顆蘋果？」為例，幫助學生認識先算 1 箱有  $25 \times 12$  顆蘋果，再算 20 箱有幾顆蘋果，記成  $(25 \times 12) \times 20 = 6000$ ；和先算 20 箱有  $12 \times 20$  盒蘋果，再算  $12 \times 20$  盒有幾顆蘋果，記成  $25 \times (12 \times 20) = 6000$ ，因為答案相同，

所以  $(25 \times 12) \times 20 = 25 \times (12 \times 20)$ 。

教師應幫助學生從「觀察現象」的層次發展至「預期」的層次，以「一盒蘋果裝 25 顆，12 盒蘋果裝一箱。爸爸進口 20 箱蘋果，請問進口幾顆蘋果？」為例，有兩個認識乘法結合律性質的層次：

層次一：學生必須算出答案，才相信「 $(25 \times 12) \times 20$ 」和「 $25 \times (12 \times 20)$ 」的答案相同。

層次二：學生不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同。

教師應幫助層次一的學生提升至層次二。

題號	24		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。 備註：小數之學習必須與整數經驗緊密連繫。直式計算應注意小數點位置的教學。小數應用情境以連續量為主。		
試題內容	24. 紅繩長 1 公尺 5 公分，藍繩長 1.2 公尺。 甲說：紅繩長也可以說是 1.5 公尺。 乙說：藍繩長也可以說是 1 公尺 2 公分。 請問哪些人的說法正確？ ① 只有甲正確 ② 只有乙正確 ③ 甲、乙兩個人都正確 ④ 甲、乙兩個人都正確		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.07	0.12	0.04
2	0.07	0.14	0.02
3	0.54	0.56	0.38
4*	0.30	0.16	0.56
未作答	0.01		
通過率	0.30	鑑別度	0.39
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.39，正確答案為選項④，通過率為 30%，顯示有三成的學生已掌握「公尺、公分」的化聚及小數位值單位換算的能力。 2. 有 7%的學生選擇①(低分組有 12%)，這些學生可能尚未掌握「公尺、公分」的化聚及小數位值單位換算的能力。 3. 有 7%的學生選擇②(低分組有 14%)，這些學生可能尚未掌握「公尺、公分」的化聚及小數位值單位換算的能力。 4. 有 54%的學生選擇③(低分組有 56%)，這些學生可能已掌握「公尺、公分」的化聚及小數位值單位換算的能力，但誤認為 1 公尺=10 公分。			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-3-10 一位小數：認識小數與小數點。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「十分位」。位值單位換算。比較、加減(含直式計算)與解題。 備註：小數之學習必須與整數經驗緊密連繫。小數應用情境應以連續量為主。</p>	<p>N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。 備註：小數之學習必須與整數經驗緊密連繫。直式計算應注意小數點位置的教學。小數應用情境以連續量為主。</p>	<p>N-5-1 十進位的位值系統：「兆位」至「千分位」。整合整數與小數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。 備註：熟練十進位系統「乘以十」、「除以十」所延伸的計算如「<math>300 \times 1200</math>」與「<math>600000 \div 4000</math>」之處理。</p>

補救教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未理解「公尺、公分」間是 100 倍的化聚關係。
2. 學生可能尚未建立「百分位」的位名概念。
3. 學生可能尚未建立二位小數位值的單位換算能力。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 小數是整數十進位系統的延伸，在引入一位小數時，十分位的值必須是個位的  $\frac{1}{10}$  倍，因此規定「 $0.1 = \frac{1}{10}$ 」。在引入二位小數時，百分位的值必須是個位的  $\frac{1}{100}$  倍，因此規定「 $0.01 = \frac{1}{100}$ 」。百分位位名的由來是「 $\frac{1}{100} = 0.01$ 」的關係。

2. 第一組小數：7.7、77.77、777.777

第二組小數：77.7、777.77、7777.777

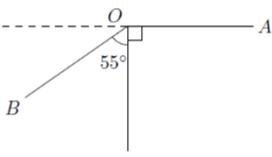
就數字本身視覺的觀點，7.7 小數點的左邊及右邊各有一個 7，77.77 小數點的左邊及右邊各有二個 7，777.777 小數點的左邊及右邊各有三個 7，因此以小數點為對稱中心時，第一組小數是左右對稱的。

但是就位值的觀點，第二組小數才是左右對稱的。當我們以個位的 7 為對稱中心，並忽略小數點時，左右兩邊的位值是對稱的，個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，十位的左邊是百位，十分位的右邊是百分位，百位的左邊是千位，百分位的右邊是千分位，十位及十分位，百位及百分位，千位及千分位分別對稱於個位。如下所示：

千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
		7	7.	7		
	7	7	7.	7	7	
7	7	7	7.	7	7	7

因為數字的單位是 1，而記幾個 1 的位置是個位，因此個位才是數字的對稱中心。個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，不會有個分位的位名，而小數點的功能是告訴我們個位在哪裡。

3. 由於小數和連續量的測量情境常一起出現，小數的學習應與量的教材結合，應多學習「樓高 3.25 公尺」、「兩地距離 24.56 公里」、「箱子重 5.32 公斤」等用法，而且小數的加減問題也應儘量與測量結合。
4. 以二位純小數 0.85 為例，進行位值單位的換算，指的是能將「85 個 0.01」聚成「8 個 0.1、5 個 0.01」，以及將「8 個 0.1、5 個 0.01」化成「85 個 0.01」的雙向化聚。也就是說，0.85 由 85 個 0.01 所組成，也由 8 個 0.1 及 5 個 0.01 所組成。

題號	25		
內容領域	空間與形狀	認知歷程向度	解題思考
學習內容	S-4-2 解題：旋轉角。以具體操作為主，並結合計算。以鐘面為模型討論從始邊轉到終邊所轉的角度。旋轉有兩個方向：「順時針」、「逆時針」。「平角」、「周角」。 備註：不處理超過 360 度的問題。		
試題內容	<p>25. 如圖，從 <math>\overline{OA}</math> 逆時針旋轉到 <math>\overline{OB}</math>，旋轉了多少度？</p>  <p>① 225 ② 215 ③ 145 ④ 35</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.13	0.04
2*	0.22	0.14	0.37
3	0.45	0.45	0.40
4	0.23	0.27	0.18
未作答	0.01		
通過率	0.22	鑑別度	0.23
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.23，正確答案為選項②，通過率為22%，顯示超過兩成的學生已認識順(逆)時針旋轉並具備利用旋轉角加減解題的能力。</p> <p>2. 有8%的學生選擇①(低分組有13%)，這些學生可能不認識順(逆)時針旋轉，也不具備利用旋轉角加減解題的能力；這些學生也可能認識順(逆)時針旋轉，也具備利用旋轉角加減解題的能力，但是計算錯誤算出<math>270 - 55 = 225</math>。</p> <p>3. 有45%的學生選擇③(低分組有45%)，這些學生可能已具備利用旋轉角加減解題的能力，但是混淆順時針旋轉及逆時針旋轉的意義，算出順時針旋轉的角度。</p> <p>4. 有23%的學生選擇④(低分組有27%)，這些學生可能不認識順(逆)時針旋轉，也不具備利用旋轉角加減解題的能力；這些學生也可能不理解題意，利用<math>90 - 55 = 35</math>算出答案。</p>			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-3-13 角與角度(同 S-3-1): 以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 備註:用直尺或三角板的直角來認識與複製直角。教學應處理角大小與邊長長短或面積大小混淆之常見錯誤。	S-4-2 解題:旋轉角。以具體操作為主,並結合計算。以鐘面為模型討論從始邊轉到終邊所轉的角度。旋轉有兩個方向:「順時針」、「逆時針」。「平角」、「周角」。 備註:不處理超過 360 度的問題。	5-s-03 能認識圓心角,並認識扇形。

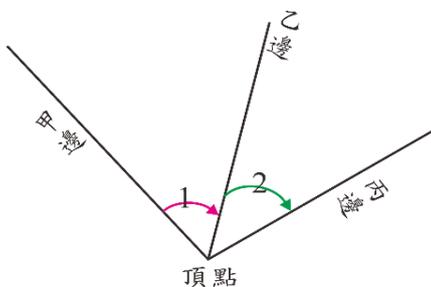
補救教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

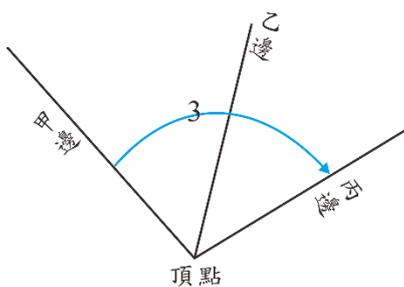
1. 學生可能不認識順時針旋轉及順時針旋轉的意義。
2. 學生可能不具備利用旋轉角加減解題的能力。
3. 學生可能不認識平角及周角的意義。

(二) 核心概念與本題的教學重點

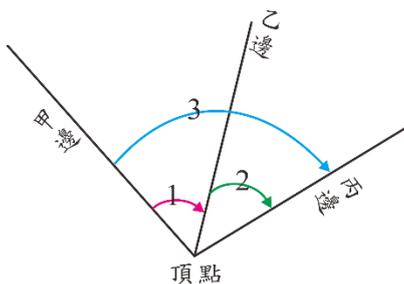
1. 三年級討論的是「張開角」,教學重點是比較兩角張開程度的大小。  
四年級討論的是「旋轉角」,教學的重點是結合三年級張開角的概念及旋轉現象,不是將旋轉角當做新的名詞來定義。  
「張開角」角度的範圍不能超過 180 度,「旋轉角」角度的範圍可以在 360 度以內(含 360 度)。
2. 教師可以利用合成兩次旋轉及一次旋轉的比較活動,幫助學生理解可以用加法算式記錄角度合成結果,以及用減法算式記錄角度分解結果的意義。  
例如先進行兩次旋轉的活動,第一次由甲邊順時針方向旋轉至乙邊,用  $\angle 1$  記錄旋轉的結果;第二次由乙邊順時針方向旋轉至丙邊,用  $\angle 2$  記錄旋轉的結果,用  $\angle 1 + \angle 2$  記錄這兩次旋轉活動合成的結果。



再進行一次旋轉的活動，由甲邊直接順時針旋轉至丙邊，用  $\angle 3$  記錄旋轉的結果。



透過比較「 $\angle 1 + \angle 2$ 」和「 $\angle 3$ 」，幫助學生發現，它們的始邊、終邊、旋轉方向和旋轉大小都相同，是相等的旋轉角，可以記成  $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$ 。



3. 教師可透過鐘面，幫助學生看到指針以順時針方向從 12 轉到 3，再由 3 轉到 6，旋轉了兩個直角；以順時針方向從 3 轉到 9，也是旋轉了兩個直角，進而引入像這樣始邊與終邊在同一直線上的，看起來平平的角，稱為「平角」。平角是由兩個直角所合成，角度為 180 度。若指針以順時針方向從 12 轉到 6，再由 6 轉到 12，旋轉了一周；以順時針方向從 3 轉到 9，再由 9 轉到 3，也是旋轉了一周，像這樣旋轉一周，始邊與終邊重疊的角，稱為「周角」。周角由兩個平角所合成，角度為 360 度。

## 柒、五年級試題選項分析與教學建議

題號	1		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。		
試題內容	<p>1. 下列哪個分數和 <math>\frac{18}{15}</math> <u>不一樣大</u>？</p> <p>① <math>\frac{6}{5}</math></p> <p>② <math>\frac{40}{35}</math></p> <p>③ <math>\frac{90}{75}</math></p> <p>④ <math>\frac{96}{80}</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.05	0.12	0.01
2*	0.67	0.44	0.88
3	0.08	0.17	0.02
4	0.20	0.27	0.09
未作答	0.00		
通過率	0.67	鑑別度	0.44
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.44，正確答案為選項②，通過率為67%，顯示近七成的學生已具備利用約分與擴分找等值分數的能力。</p> <p>2.有5%的學生選擇①(低分組有12%)，這些學生可能不具備利用約分與擴分找等值分數的能力；這些學生也可能誤解題意，選出和給定分數一樣大的分數。</p> <p>3.有8%的學生選擇③(低分組有17%)，這些學生可能不具備利用約分與擴分找等值分數的能力；這些學生也可能誤解題意，選出和給定分數一樣大的分數。</p> <p>4.有 20%的學生選擇④(低分組有 27%)，這些學生可能不具備利用約分與擴分找等值分數的能力；這些學生也可能看不到<math>\frac{18}{15}</math>和<math>\frac{96}{80}</math>分子和分母間<math>\frac{16}{3}</math>倍分數倍轉換的關係，無法直接將<math>\frac{18}{15}</math>改記成<math>\frac{96}{80}</math>，所以判斷<math>\frac{18}{15}</math>和<math>\frac{96}{80}</math>不一樣大。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能誤解題意，選出一樣大的分數。</li> <li>2. 五年級學生可以進行單位分數倍轉換，得到 <math>\frac{18}{15} = \frac{6}{5}</math>；也能進行整數倍轉換，得到 <math>\frac{18}{15} = \frac{90}{75}</math>，但是無法進行分數倍轉換，得到 <math>\frac{18}{15} = \frac{96}{80}</math></li> <li>3. 學生可能不具備利用約分與擴分找等值分數的能力。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 四年級已幫助學生在量的情境中理解等值分數，例如 <math>\frac{1}{2}</math> 條繩子和 <math>\frac{4}{8}</math> 條繩子一樣長，一袋水餃有 40 個，<math>\frac{1}{2}</math> 袋水餃和 <math>\frac{4}{8}</math> 袋水餃一樣多。 本基本學習內容幫助學生透過約分和擴分，將一個分數改記成它的等值分數，例如將 <math>\frac{4}{8}</math> 改記成 <math>\frac{1}{2}</math>，或將 <math>\frac{1}{2}</math> 改記成 <math>\frac{4}{8}</math>，為用通分作簡單異分母分數的比較與加減鋪路。</li> <li>2. 區分等值分數和約分、擴分與通分的意義： 等值分數：在選取相同單位量的情境下，兩分數雖然等分割的份數與合成的份數不同，但是兩分數所代表的量(值)一樣多。 例如：<math>\frac{1}{2}</math> 條繩子和 <math>\frac{4}{8}</math> 條繩子一樣長，可以記成 <math>\frac{1}{2}</math> 條 = <math>\frac{4}{8}</math> 條。 <math>\frac{2}{5}</math> 盒蘋果和 <math>\frac{4}{10}</math> 盒蘋果一樣多，可以記成 <math>\frac{2}{5}</math> 盒 = <math>\frac{4}{10}</math> 盒。 約分、擴分：將一個分數轉換成它的等值分數稱之為約分或擴分。 分割份數由少變多稱為擴分，例如 <math>\frac{1}{2} = \frac{4}{8}</math>； 分割份數由多變少稱為約分，例如 <math>\frac{4}{10} = \frac{2}{5}</math>。 通分：透過約分或擴分，讓兩個分數分母相等的活動稱為通分。</li> <li>3. 約分與擴分教學時，因為分割的份數不同，因此要選用不同的量詞來描述，以將圓形色紙 3 等分及 6 等分為例，教師應說明將 1 張圓形色紙平分成 3 大塊，將另一張一樣大的圓形色紙平分成 6 小塊。 教師<u>不可以</u>說將 1 張圓形色紙平分成 3 塊，將另一張一樣大的圓形色紙平分成 6 塊，因為 3 塊中的「1 塊」和 6 塊中的「1 塊」大小不一樣，學生會混淆量詞「塊」的意義。</li> </ol>			

建議教學方式如下：



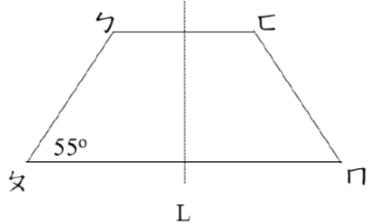
平分成 3 大塊



平分成 6 小塊

擴分： $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$  (1 大塊可以換成 2 小塊，3 大塊可以換成 6 小塊)。

約分： $\frac{2}{6} = \frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3}$  (2 小塊可以換成 1 大塊，6 小塊可以換成 3 大塊)。

題號	2		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。		
試題內容	<p>2. 下圖是一個線對稱圖形，以 <math>L</math> 為對稱軸，角 <math>\square</math> 是多少度？</p>  <p>① 55 ② 125 ③ 145 ④ 305</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.31	0.03
2*	0.74	0.49	0.94
3	0.09	0.17	0.03
4	0.02	0.04	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.74	鑑別度	0.45
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.45，正確答案為選項②，通過率為74%，顯示超過七成的學生已具備利用線對稱性質解題的能力。</p> <p>2. 有15%的學生選擇①(低分組有31%)，這些學生可能尚未具備利用線對稱性質解題的能力，直接把題目給定的角度當作答案。</p> <p>3. 有9%的學生選擇③(低分組有17%)，這些學生可能尚未具備利用線對稱性質解題的能力。</p> <p>4. 有2%的學生選擇④(低分組有4%)，這些學生可能尚未具備利用線對稱性質解題的能力；這些學生也可能直接利用周角減掉給定角，<math>360 - 55 = 305</math>，得到305度的答案。</p>			

### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。

### 補救教學建議

#### (一)錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未具備利用線對稱性質解題的能力。
2. 學生可能已具備利用線對稱性質解題的能力，能找出線對稱圖形的對稱角，知道對稱角一樣大，但無法掌握四邊形內角和為  $360^\circ$  而解題錯誤。

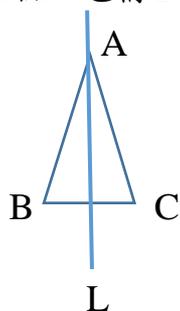
#### (二)核心概念與本題的教學重點

1. 國小階段線對稱圖形教學的重點是「判斷給定的一個圖形是否為線對稱圖形」，下圖中三角形 ABC 沿著 L 對折後，L 兩側的圖形完全重合，我們稱三角形 ABC 是線對稱圖形，稱 L 為對稱軸。

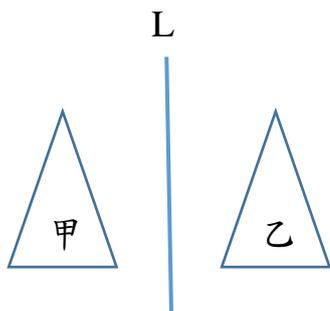
對折後 AB 邊和 AC 邊完全重合，數學上稱 AB 邊的對稱邊是 AC 邊，AC 邊的對稱邊是 AB 邊，也稱 AB 邊和 AC 邊為對稱邊。

對折後角 B 和角 C 完全重合，數學上稱角 B 的對稱角是角 C，角 C 的對稱角是角 B，也稱角 B 和角 C 為對稱角。

對折後 B 點和 C 點完全重合，數學上稱 B 點的對稱點是 C 點，C 點的對稱點是 B 點，也稱 B 點和 C 點為對稱點。



2. 國小階段線對稱圖形教學的重點不是「判斷給定的兩圖形是否對稱於 L」，下圖中的三角形甲和三角形乙是兩個不同的圖形，國小階段不討論兩個圖形是否為線對稱圖形。

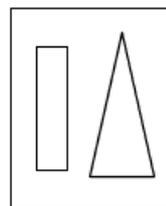
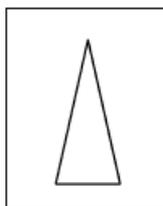


3.以判斷等腰三角形是否為線對稱圖形問題為例，下面呈現三種布置圖形的方式：

第一種(下圖左)：給定一個等腰三角形的圖卡。

第二種(下圖中)：給定一張長方形紙張，將等腰三角形畫在給定長方形紙張的正中央。

第三種(下圖右)：給定一張長方形紙張，將等腰三角形畫在給定長方形紙張的一邊，另一邊可能還有其它的圖形。



第一種對摺的對象一定是這個等腰三角形的圖卡，學生可以透過對摺後圖形兩邊完全疊合的現象，判斷該等腰三角形是線對稱圖形。

第二種及第三種對摺的對象可能是等腰三角形，也可能是長方形，並將等腰三角形視為長方形紙張中的圖像。

建議教師先用第一種方式來布題，在與學生溝通評量對象是畫在紙上的等腰三角形後，才能用第二種及第三種方式來布題。

4.部分學生在尋找線對稱圖形有幾條對稱軸時，常遺漏一些對稱軸，下面提出一種幫助學生能找出所有對稱軸的方法。

教師可以先拿出一些已畫出所有對稱軸的線對稱圖形，例如下圖中的七個線對稱圖形，要求學生將這些圖形，依對稱軸和對稱圖形交點間的關係進行分類，幫助學生將對稱圖形的對稱軸分成下列三類。

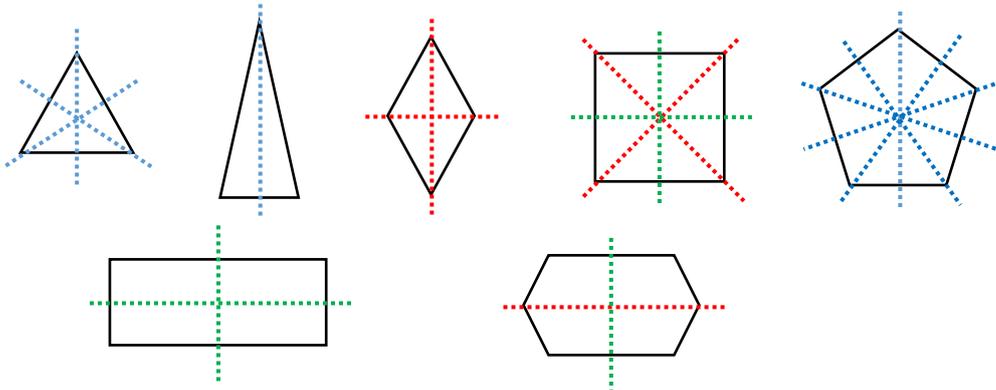
第一類：對稱軸通過對稱圖形的兩個頂點。

例如：菱形、正方形、六邊形。

第二類：對稱軸通過對稱圖形的一個頂點和一邊的中點。

第三類：對稱軸通過對稱圖形兩邊的中點。

當學生理解對稱軸和對稱圖形間只有這三類關係後，只要依這三類關係分別找出對稱軸，就不會遺漏。

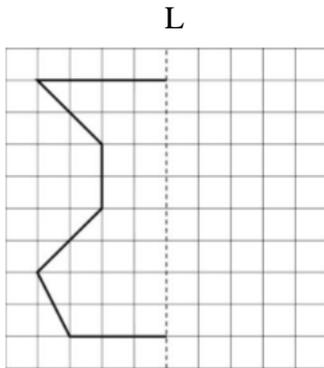


5. 國小線對稱圖形的教材中，都出現給定一條對稱軸及對稱軸某一邊的圖形，要求學生畫出另一邊圖形的問題，如下圖，L 是對稱軸，左邊是給定的圖形，要求學生畫出右邊的圖形。教師們常出現下列兩種不同解讀題意的方法：

第一種：將左邊的圖形視為圖形甲，要求學生畫出圖形甲對 L 的對稱圖形乙。

第二種：將全部的圖形視為一個線對稱圖形，左邊的圖形只是線對稱圖形的一部分，要求學生畫出完整的線對稱圖形。

國小階段的教學重點不是第一種，國小階段的教學重點是第二種。



教師可以拿出一個線對稱圖形，要求學生觀察對稱圖形對稱點的連線和對稱軸的關係，幫助學生察覺對稱軸是這些對稱點連線的垂直平分線後，再要求學生自行畫出完整的線對稱圖形。

國小階段不宜引入垂直平分線的名詞，學生只要察覺對稱軸分別垂直於對應點的連線，且對應點到對應點連線和對稱軸交點的長度一樣長。

題號	3		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積。		
試題內容	<p>3. 算算看，<math>4568000 \div 125 \div 8 = ?</math></p> <p>① 4568</p> <p>② 36544</p> <p>③ 45680</p> <p>④ 571000</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.71	0.40	0.94
2	0.14	0.27	0.04
3	0.11	0.24	0.02
4	0.04	0.09	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.71	鑑別度	0.54
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.54，正確答案為選項①，通過率為71%，顯示超過七成的學生已具備利用「連除兩數相當於除此兩數之積」性質解題的能力。</p> <p>2.有14%的學生選擇②(低分組有27%)，這些學生可能不具備利用「連除兩數相當於除此兩數之積」性質解題的能力，只算出大數出除以第一個數的答案。</p> <p>3.有11%的學生選擇③(低分組有24%)，這些學生可能已具備利用「連除兩數相當於除此兩數之積」性質解題的能力，但在計算<math>125 \times 8</math>時發生錯誤，因而產生<math>4568000 \div 125 \div 8 = 4568000 \div 100</math>的錯誤。</p> <p>4.有4%的學生選擇④(低分組有9%)，這些學生可能不具備利用「連除兩數相當於除此兩數之積」性質解題的能力，只算出大數出除以第二個數的答案。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積。	6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性(同 6-n-13)。

## 補救教學建議

### (一)錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用「連除兩數相當於除以此兩數之積」性質解題的能力。
2. 低成就學生可能會在一步驟之後停止運算。
3. 學生沒有熟記  $\frac{1}{8}=0.125$ ，或無法將  $\frac{1}{8}=0.125$  轉換為  $125 \times 8 = 1000$ 。

### (二)核心概念與本題的教學重點

1. 現行教材在五年級引入「連除兩數相當於除以此兩數之積」，多以生活情境布題，透過兩種不同的列式方式進行解題，讓學生「發現」兩種列式皆可求出正確答案，因而「宣告」「連除兩數相當於除以此兩數之積」。但對學生來說，每個數學問題都是一個「特例」，學生必須看過、計算過、經驗夠多的特例後，才能發現這些特例當中的通則，形成概念的「集合」。但多數教材只布下一至二個問題後，便宣告這些性質，學生沒有足夠的先備知識、經驗協助他們理解時，就只能以背誦的方式將之強記，也因此容易遺忘、記錯、誤用。

2. 以「老師有 60 顆糖果，要每分全班的小朋友，班級共有 6 組，每組 5 人，請問每個人可以分到幾顆糖果？」為例，說明如何幫助學生連除兩數相當於除以此兩數之積。

教學時應出現下面兩種解題的方法，如果學生只出現其中一種解法，教師應提供另一種解法讓學生討論。

方法一：先算 60 顆糖果分給 6 組，再將每一組得到的糖果分給小組的 5 人

$$60 \div 6 \div 5 = 2。$$

方法二：先算全班有多少人，再算將 60 顆糖果平分，每人可以得到幾顆

$$60 \div (6 \times 5) = 2。$$

層次一：學生必須分別算出方法一的答案「 $60 \div 6 \div 5 = 2$ 」和方法二的答案「 $60 \div (6 \times 5) = 2$ 」，發現這兩種方法算出的答案相同，才可以記成「 $60 \div 6 \div 5 = 60 \div (6 \times 5)$ 」。

層次二：學生知道它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同，可以記成「 $60 \div 6 \div 5 = 60 \div (6 \times 5)$ 」。

教師應提供多樣情境幫助層次一的學生提升至層次二。

3. 建議教師在進行此部分的教學時，應該要提供學生足夠多的解題經驗後，再協助學生整理、歸納出「連除兩數相當於除以此兩數之積」的性質，協助他們能從「例題的特例」形成「概念的集合」。
4. 學生學完此單元後，解題時部分學生仍習慣不使用這些性質，還是可以正確。此時教師可以嘗試布下一些特殊數字、數字較大的題型，讓學生不得不使用，使之發現這些運算性質的確有其便利性，能增加計算的速度與正確性。
5. 除了解題外，教師也可引導學生擬題，透過雙向運思掌握「連除兩數相當於除以此兩數之積」的意涵。

題號	4		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。		
試題內容	<p>4. 把一張長方形紙全部剪成一樣大的正方形，每個正方形的邊長都是整數公分，可以有很多不同的剪法。 如果剪出的正方形邊長最長是 18 公分，其他剪法剪出的正方形邊長<u>不可能</u>是多少公分？</p> <p>① 2 ② 3 ③ 4 ④ 6</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.15	0.03
2	0.16	0.21	0.09
3*	0.60	0.43	0.77
4	0.15	0.20	0.11
未作答	0.00		
通過率	0.60	鑑別度	0.33
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為 0.33，正確答案為選項③，通過率為 60%，顯示六成的學生已具備利用「公因數是最大公因數的因數」性質解題的能力。</p> <p>2.有 8%的學生選擇①(低分組有 15%)，這些學生可能尚未具備利用「公因數是最大公因數的因數」性質解題的能力；也可能誤解題意，選出可能的正方形邊長。</p> <p>3.有 16%的學生選擇②(低分組有 21%)、這些學生可能尚未具備利用「公因數是最大公因數的因數」性質解題的能力；也可能誤解題意，選出可能的正方形邊長。</p> <p>4.有 15%的學生選擇④(低分組有 20%)、這些學生可能尚未具備利用「公因數是最大公因數的因數」性質解題的能力；也可能誤解題意，選出可能的正方形邊長。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-04 能理解因數和倍數。	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解。 (質數 $<$ 20，質因數 $<$ 20，被分解數 $<$ 100)。



## 補救教學建議

### (一)錯誤類型的可能原因

- 1.本題給定未知兩數的最大公因數，因為兩數未知，如果學生不知道「公因數是最大公因數的因數」，可能無法成功解題。
- 2.學生可能不知道「公因數是最大公因數的因數」，因為題目中只有18這一個數字，因此逐一判斷選項中的數字是否是18的因數來解題。

### (二)核心概念與本題的教學重點

- 1.以「求18和24的所有公因數」為例，有兩種解題的方法。

方法一：分別求出18和24的所有因數，再找出共同的因數1、2、3、6，共同的因數為18和24的公因數。

方法二：先求出18所有的因數1、2、3、6、9、18，再判斷這些數是否為24的因數。

1、2、3、6是18的因數，也是24的因數，所以1、2、3、6是18和24的公因數。

教師應引入方法二，幫助學生簡化求公因數的解題過程。

- 2.當學生求出1、2、3、6是18和24的公因數，6是18和24的最大公因數後，教師應幫助學生認識公因數1、2、3、6是最大公因數6的因數，為六年級利用短除法解公因數的文字題鋪路。六年級利用短除法解題時，只能求出最大公因數，無法求出所有的公因數。

題號	5		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。		
試題內容	<p>5. 甲 = <math>9.98 \times 1.001</math>、乙 = <math>9.98 \times 0.9988</math>、丙 = <math>9.98 \times 1</math>。</p> <p>下列關於甲、乙、丙大小順序，何者正確？</p> <p>① 甲 &gt; 乙 &gt; 丙</p> <p>② 甲 &gt; 丙 &gt; 乙</p> <p>③ 乙 &gt; 丙 &gt; 甲</p> <p>④ 丙 &gt; 乙 &gt; 甲</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.07	0.15	0.01
2*	0.77	0.48	0.96
3	0.06	0.16	0.01
4	0.10	0.21	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.77	鑑別度	0.48
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.48，正確答案為選項②，通過率為77%，顯示近八成的學生已能掌握乘數大於、小於或等於1時，積與被乘數的大小關係。</p> <p>2.有 10%的學生選擇④(低分組有 21%)，這些學生可能尚未掌握乘數大於、小於或等於 1 時，積與被乘數的大小關係，誤以為乘以小數(<math>9.98 \times 1.001</math>、<math>9.98 \times 0.9988</math>)所得到的積，一定比乘以整數 1(<math>9.98 \times 1</math>)所得到的積小；誤以為 <math>0.9988 &gt; 1.001</math>，<math>9.98 \times 0.9988 &gt; 9.98 \times 1.001</math>，得到 <math>9.98 \times 1 &gt; 9.98 \times 0.9988 &gt; 9.98 \times 1.001</math> 的答案。</p> <p>3.有 7%的學生選擇①(低分組有 15%)，這些學生可能尚未掌握乘數大於、小於或等於 1 時，積與被乘數的大小關係，誤以為乘以多位小數(<math>9.98 \times 1.001</math>、<math>9.98 \times 0.9988</math>)所得到的積，一定比乘以整數 1(<math>9.98 \times 1</math>)所得到的積大，得到 <math>9.98 \times 1.001 &gt; 9.98 \times 0.9988 &gt; 9.98 \times 1</math> 的答案。</p> <p>4.有 6%的學生選擇③(低分組有 16%)，這些學生可能尚未掌握乘數大於、小於或等於 1 時，積與被乘數的大小關係，誤以為乘數越大，積越小；也可能誤以為 <math>0.9988 &gt; 1 &gt; 1.001</math>，因而得到 <math>9.98 \times 0.9988 &gt; 9.98 \times 1 &gt; 9.98 \times 1.001</math> 的答案。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。 5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。
補救教學建議			
<p>(一)錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.學生可能無法掌握乘數大於、小於或等於1時，積與被乘數的大小關係。</li> <li>2.學生可能誤以為被乘數相同時，乘數小數位數越多，其積越大。</li> <li>3.學生可能誤以為被乘數相同時，乘數越小時，其積越大。</li> </ol> <p>(二)核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.以二位小數乘以一位小數「<math>2.38 \times 6.7</math>」為例，說明如何幫助學生理解小數乘以小數乘法直式計算的意義。           <p>步驟一：複習整數乘以整數的乘法直式計算學生能算出「<math>238 \times 67 = 15946</math>」。</p> <p>步驟二：複習分數乘以分數的分數乘法計算學生能算出<math>\frac{238}{100} \times \frac{67}{10} = \frac{238 \times 67}{100 \times 10} = \frac{15946}{1000}</math>。</p> <p>步驟三：幫助學生看到整數除以10、100、1000、10000等數時，被除數和商小數點位置移位的關係。</p> <p>因為15946中沒有小數點，教師應先說明小數點可以告訴我們個位數字在哪裡，將「15946」改記成「15946.」後，再說明小數點移位的關係。</p> <p><math>15946. \div 10 = 1594.6</math>，（除以10，小數點向左移一位）</p> <p><math>15946. \div 100 = 159.46</math>，（除以100，小數點向左移二位）</p> <p><math>15946. \div 1000 = 15.946</math>，（除以1000，小數點向左移三位）</p> <p><math>15946. \div 10000 = 1.5946</math>，（除以10000，小數點向左移四位）</p> <p>步驟四：透過比對小數乘以小數乘法直式算式和改記成分數乘以分數逐次減項的算式，幫助學生理解小數乘以小數乘法直式計算的意義。</p> <math display="block">  \begin{aligned}  &amp;2.38 \times 6.7 \\  &amp;= \frac{238}{100} \times \frac{67}{10} \quad (\text{將小數} \times \text{小數，改記成分數} \times \text{分數}) \\  &amp;= \frac{238 \times 67}{100 \times 10} \quad (\text{分數乘法算則：分子乘以分子、分母乘以分母}) \\  &amp;= \frac{15946}{1000} \\  &amp;= 15946 \div 1000  \end{aligned}  </math> </li> </ol>			

=15946.÷1000 (在個位右邊加上小數點)

=15.946 (小數點往左移3位)

步驟五：將步驟四的解題活動改記成直式。

列出直式		算出 238×67 的乘積		小數點往左移 3 位
$\begin{array}{r} 2.38 \\ \times 6.7 \\ \hline \end{array}$	⇒	$\begin{array}{r} 238 \\ \times 67 \\ \hline 1666 \\ 1428 \\ \hline 15946 \end{array}$	⇒	$\begin{array}{r} 2.38 \\ \times 6.7 \\ \hline 1666 \\ 1428 \\ \hline 15.946 \end{array}$

2.當學生掌握小數乘以小數乘法直式算則解題的意義後，教師應幫助學生理解小數乘法中，積的小數位數=被乘數的小數位數+乘數的小數位數。

以「 $4.3 \times 1.5 = ?$ 」為例，「4.3」是一位小數，「1.5」也是一位小數，在計算一位小數乘以一位小數時，先算出「 $43 \times 15 = 645.$ 」，

再將乘積的小數點向左移(1+1)位，也就是移2位，就能得到「 $4.3 \times 1.5 = 6.45$ 」。

再以「 $2.38 \times 1.6 = ?$ 」為例，「2.38」是二位小數，「1.6」是一位小數，計算二位小數乘以一位小數時，先算出「 $238 \times 16 = 3808.$ 」，再將乘積的小數點向左移(2+1)位，也就是移3位，就能得到「 $2.38 \times 1.6 = 3.808$ 」。

題號	6		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。		
試題內容	<p>6. 姐姐播放的祈福音樂一段長 14 分鐘 31 秒鐘，她連續播放了 8 次才停止。請問姐姐共播放了多久的時間？</p> <p>① 1 小時 14 分鐘 48 秒鐘          ② 1 小時 16 分鐘 8 秒鐘          ③ 1 小時 54 分鐘 48 秒鐘          ④ 1 小時 56 分鐘 8 秒鐘</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.25	0.03
2	0.10	0.19	0.03
3	0.14	0.23	0.05
4*	0.64	0.33	0.89
未作答	0.00		
通過率	0.64	鑑別度	0.56
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.56，正確答案為選項④，通過率為64%，顯示超過六成的學生已具備複名數時間量乘法計算解題的能力。</p> <p>2.有14%的學生選擇③(低分組有23%)，這些學生可能知道60分鐘=1小時，但誤以為100秒鐘=1分鐘，在進行複名數時間量直式乘法計算時，出現錯誤，如下所示：</p> $  \begin{array}{r}  \text{小時} \quad \text{分鐘} \quad \text{秒鐘} \\  1 \quad 14 \quad 31 \\  \times \quad \quad \quad 8 \\  \hline  1 \quad 114 \quad 248 \\  \quad 54 \quad 48  \end{array}  $ <p>3.有12%的學生選擇①(低分組有25%)，這些學生可能誤以為100秒鐘=1分鐘、100分鐘=1小時，在進行複名數時間量直式乘法計算時，出現錯誤，如下所示：</p> $  \begin{array}{r}  \text{小時} \quad \text{分鐘} \quad \text{秒鐘} \\  1 \quad 14 \quad 31 \\  \times \quad \quad \quad 8 \\  \hline  1 \quad 114 \quad 248 \\  \quad 14 \quad 48  \end{array}  $			

4.有10%的學生選擇②(低分組有19%)，這些學生可能知道60秒鐘=1分鐘，但誤以為100分鐘=1小時，在進行複名數時間量直式乘法計算時，出現錯誤，如下所示：

$$\begin{array}{r}
 \text{小時} \quad \text{分鐘} \quad \text{秒鐘} \\
 1 \quad 4 \\
 \quad 14 \quad 31 \\
 \times \quad \quad \quad 8 \\
 \hline
 1 \quad \cancel{116} \quad \cancel{248} \\
 \quad 16 \quad 8
 \end{array}$$

#### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題(不含除法)。	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

#### 補救教學建議

##### (一) 錯誤類型的可能原因

- 1.學生可能不具備複名數時間量乘法計算解題的能力。
- 2.學生可能不知道分鐘、秒鐘時間量複名數的乘法和二位乘以一位的乘法運算方式相同，滿足同構的關係。
- 3.低分組學生混淆「1分鐘=60秒鐘」、「1小時=60分鐘」和十進位或百進位間的關係。

##### (二) 核心概念與本題的教學重點

- 1.學生在四年級應該已經能解決複名數時間量的加、減計算及複名數時間量整數倍的乘法計算(不進退位)。五年級開始引入可進退位時間量整數倍的乘法計算，以及等分除和包含除情境時間量的除法計算。

- 2.以「小明每天長跑時間是1小時30分鐘，連續7天，共跑多少小時多少分鐘？」為例，說明如何幫助學生解題。

步驟一：先複習時間單位的化聚關係，1小時=60分鐘，60分鐘=1小時。

步驟二：溝通利用時間複名數乘法直式算則解題時，最後答案的分鐘數字不能比60大。

步驟三：利用直式算出答案10小時30分鐘。

$$\begin{array}{r}
 \text{小時} \quad \text{分鐘} \\
 1 \quad 30 \\
 \times \quad \quad 7 \\
 \hline
 7 \quad \cancel{210} \\
 + 3 \quad 30 \\
 \hline
 10 \quad 30
 \end{array}$$

→ 分鐘的數字不能比60大  
→ 210分鐘聚成3小時30分鐘  
→ 答案是10小時30分鐘

題號	7		
內容領域	代數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。		
試題內容	<p>7. 已知「<math>甲 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7</math>」。</p> <p>請問「<math>22.2 + 33.3 + 44.4 + 55.5 + 66.6 + 77.7</math>」是甲的多少倍？</p> <p>① 11.1 ② 22.2 ③ 27 ④ 100</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.58	0.30	0.85
2	0.09	0.18	0.03
3	0.19	0.30	0.07
4	0.14	0.21	0.05
未作答	0.00		
通過率	0.58	鑑別度	0.55
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.55，正確答案為選項①，通過率為58%，顯示近六成的學生已具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力。</p> <p>2.有9%的學生選擇②(低分組有18%)，這些學生可能不具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力。</p> <p>3.有19%的學生選擇③(低分組有30%)，這些學生可能不具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力；這些學生也可能不理解題意，算出六個連續整數的和為答案。</p> <p>4.有14%的學生選擇④(低分組有21%)，這些學生可能不具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力；這些學生也可能不理解題意，認為<math>aa.a</math>是<math>a</math>的100倍。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。	6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13)

## 補救教學建議

### (一)錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用乘法對加法分配律簡化計算的能力。
2. 學生可能無法將 22.2 分解成 2 個十、2 個一和 2 個 0.1，透過「10 倍+1 倍+0.1 倍」的想法，得到 22.2 是 2 的 11.1 倍。
3. 學生可能沒有分解數字的能力，無法將 22.2 解讀為  $2 \times (11.1)$ ，將 33.3 解讀為  $3 \times (11.1)$ ，……，因此無法利用乘法對加法分配律來簡化計算。

### (二)核心概念與本題的教學重點

1. 國小代數運算引入的年級：

一年級：加法交換律。

二年級：加法結合律(三數相加，順序改變不影響其和)、乘法交換律。

四年級：乘法結合律(三數相乘，順序改變不影響其積)。

五年級：乘法對加法的分配律、乘法對減法的分配律。

2. 以「豆漿一杯 20 元，奶茶一瓶 40 元，媽媽各買了 6 杯，要付多少元？」

為例，說明如何幫助學生理解乘法對加法的分配律。

教學時應出現下面兩種解題的方法，如果學生只出現其中一種解法，教師應提供另一種解法讓學生討論。

方法一：分別計算 6 杯豆漿和 6 瓶奶茶的錢，再算合起來是多少錢。

$$20 \times 6 = 120, 40 \times 6 = 240, 120 + 240 = 360, \text{ 並改用併式 } \left[ 20 \times 6 + 40 \times 6 = 360 \right] \text{ 來記錄。}$$

方法二：將 1 杯豆漿和 1 瓶奶茶看成 1 份，先算 1 份的錢，再算 6 份的錢。

$$20 + 40 = 60, 60 \times 6 = 360, \text{ 並改用併式 } \left[ (20 + 40) \times 6 = 360 \right] \text{ 來記錄。}$$

理解乘法對加法的分配有兩個層次：

層次一：學生必須分別算出方法一的答案「 $20 \times 6 + 40 \times 6 = 360$ 」和方法二的答案「 $(20 + 40) \times 6 = 360$ 」，發現這兩種方法算出的答案相同，才可以記成「 $20 \times 6 + 40 \times 6 = (20 + 40) \times 6$ 」。

層次二：學生知道它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期它們的答案一定相同，可以記成「 $20 \times 6 + 40 \times 6 = (20 + 40) \times 6$ 」

教師應幫助層次一的學生提升至層次二。

3. 可以透過面積模型幫助學生記憶乘法對加法分配律的意義，為國中利用長方形面積記憶乘法公式鋪路。

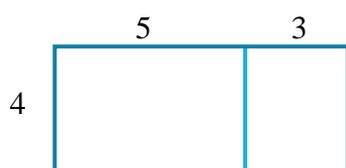
有兩種計算下列兩個長方形面積和的方法：

方法一： $5 \times 4 + 3 \times 4 = 32$

方法二： $(5 + 3) \times 4 = 32$

它們是同一個問題的兩種合理算法，不必算出答案，就能預期它們的答

案一定相同，可以記成「 $5 \times 4 + 3 \times 4 = (5 + 3) \times 4$ 」。



4. 可以透過帶分數乘以帶分數的乘法計算，說明乘法對加法分配律的應用。

$$\begin{aligned} 2\frac{4}{7} \times 1\frac{3}{5} &= (2 + \frac{4}{7}) \times (1 + \frac{3}{5}) = (2 + \frac{4}{7}) \times 1 + (2 + \frac{4}{7}) \times \frac{3}{5} = 2 \times 1 + \frac{4}{7} \times 1 + 2 \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} \\ &= 2 + \frac{4}{7} + \frac{6}{5} + \frac{12}{35} = \frac{144}{35}。 \end{aligned}$$

5. 部分學生無法利用乘法對加法的分配律來簡化「 $35 \times 99 + 35$ 」的計算，  
下面提供三種解題的方法。

方法一：教師直接宣告將 35 改記成  $35 \times 1$

$$35 \times 99 + 35 = 35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times (99 + 1) = 35 \times 100 = 3500$$

部分教師習慣利用方法一來教學，學生不理解為何要將 35 改記成  $35 \times 1$ ，很快就會忘記。

方法二：給定「一枝筆賣 35 元，甲先買 99 枝，再買 1 枝，共花多少元？」  
的情境，再提供三種解法，幫助學生理解 35 是  $35 \times 1$  的省略記法。

(1)  $35 \times 99 + 35 \times 1$

(2)  $35 \times 99 + 35$

(3)  $35 \times (99 + 1)$

方法三：乘法對加法的分配律是兩種算法答案一定相等的關係，學生可能將乘法對加法的分配律解讀成運算。

學生比較熟悉  $35 \times (99 + 1) \Leftrightarrow 35 \times 99 + 35 \times 1$  的乘法運算，比較不熟悉  $35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times (99 + 1)$  提公因數的運算。

教師可以透過「 $35 \times (99 + 1) = 35 \times 99 + 35 \times 1 = 35 \times 99 + 35$ 」，幫助學生理解 35 是  $35 \times 1$  的省略記法，必須將 35 改記成  $35 \times 1$ ，才能利用乘法對加法的分配律來解題。

題號	8		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。		
試題內容	<p>8. 算算看，「820000 ÷ 8000」的商及餘數分別是多少？</p> <p>① 商是 12 ，餘數是 4</p> <p>② 商是 12 ，餘數是 4000</p> <p>③ 商是 102 ，餘數是 4</p> <p>④ 商是 102 ，餘數是 4000</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.16	0.02
2	0.15	0.24	0.06
3	0.21	0.27	0.15
4*	0.57	0.33	0.77
未作答	0.00		
通過率	0.57	鑑別度	0.44
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.44，正確答案為選項④，通過率為57%，顯示近六成的學生已具備除法直式計算的能力。</p> <p>2.有21%的學生選擇③(低分組有27%)，這些學生可能尚未具備除法直式計算的能力。這些學生在除法直式計算的過程中，透過「被除數和除數同時換單位」方法來解題，但餘數忘了換回原單位，如下所示：</p> $  \begin{array}{r}  102 \\  8000 \overline{) 820000} \\  \underline{8} \phantom{0000} \\  20 \\  \underline{16} \\  4  \end{array}  $			
<p>3.有15%的學生選擇②(低分組有24%)，這些學生可能尚未具備除法計算的能力。這些學生在除法直式計算的過程中，漏記商十位數0，得到商數為12，如下所示：</p>			

$$\begin{array}{r}
 \phantom{8000} \overline{) 820000} \\
 \underline{80000} \phantom{0} \\
 20000 \\
 \underline{16000} \\
 4000
 \end{array}$$

4.有8%的學生選擇①(低分組有16%)，這些學生可能尚未具備除法計算的能力。這些學生在除法直式計算的過程中，透過「被除數和除數同時換單位」方法來解題，但漏記商十位數0，餘數也忘了換回原單位，如下所示：

$$\begin{array}{r}
 \phantom{8000} \overline{) 820000} \\
 \underline{8} \phantom{0000} \\
 20 \\
 \underline{16} \\
 4
 \end{array}$$

#### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

#### 補救教學建議

##### (一)錯誤類型的可能原因

- 1.學生在做多位數除法問題時，常常會在不夠除時，商忘了補0，而繼續往下算。
- 2.學生不理解被除數和除數同時換單位的解題方法，不知道將  $820000 \div 8000$  轉換成  $820 \div 8$ ，指的是將被除數 820000 和除數 8000 同時轉換成以 1000 為單位，因此  $820 \div 8$  的餘數 4 指的是 4 個 1000，也就是 4000。

##### (二)核心概念與本題的教學重點

- 1.二位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為二位數乘法直式計算的基礎，也是除數為二位數除法直式計算的基礎。  
三位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為三位數乘法直式計算的基礎，也是除數為三位數除法直式計算的基礎。  
四位數乘以一位數的乘法直式計算，是被乘數為四位數乘法直式計算的基礎，

也是除數為四位數除法直式計算的基礎。

以  $345 \times 678$  為例，直式進行的是 3 次 345 乘以一位數 6、7、8 的計算；以  $4613 \div 172$  為例，學生估商時進行的是 2 次 172 乘以一位數的計算。

教師應要求學生在三年級熟練二位及三位數乘以一位數的乘法直式計算，並將計算的結果記成一行。

2. 以「 $6000 \div 700 = ( ) \dots ( )$ 」為例，說明如何幫助學生解題。

(1) 先布問題「60 張百元鈔票，每人分 7 張，最多可以分給多少人？

還剩下幾張百元鈔票？也就是多少元？」。

學生可以利用「 $60 \div 7 = 8 \dots 4$ 」，得到可以分給 8 人，還剩下 4 張百元鈔票，也就是 400 元的答案。

(2) 再布問題「6000 元，每人分 700 元，最多可以分給多少人？還剩下多少元？」

限制學生必須將 6000 元和 700 元都換成 100 元鈔票後再計算，

學生將 6000 元換成 60 張 100 元，將 700 元換成 7 張 100 元，透過「 $60 \div 7 = 8 \dots 4$ 」，算出可以分給 8 人，還剩下 4 張百元鈔票，也就是 400 元的答案。教師可以說明此方法是將被除數和除數同時換成以 100 為單位的算法。

3. 教師可引導學生利用被除數和除數同時換單位的算法，來檢驗較大數字除法計算的合理性。以檢驗「 $63300 \div 422 = 15$ 」答案的合理性為例，因為  $63300 \div 422$  的商大約等於  $60000 \div 400 = 150$ ，所以「 $63300 \div 422 = 15$ 」的答案不合理。

4. 以「 $122000 \div 3000$ 」為例，下面提供兩種方法，說明如何幫助學生理解被除數及除數後面有多個 0 計算問題的規則。

方法一：利用除法直式算則解題

$$\begin{array}{r} \phantom{0000} 4 \phantom{0} \\ 3000 \overline{) 122000} \\ \underline{120000} \phantom{0} \\ 20000 \phantom{0} \end{array}$$

得到「 $122000 \div 3000 = 40 \dots 2000$ 」的答案。

方法二：透過「被除數和除數同時換單位」方法來解題。

教師可先說明 122000 是 122 個「千」，3000 是 3 個「千」。再透過被除數和除數同時換成以「千」為單位策略解題： $122 \div 3 = 40 \dots 2$ （2 個千，也就是 2000）。

得到「 $122000 \div 3000 = 40 \dots 2000$ 」的答案

題號	9		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。		
試題內容	<p>9. 請問 <math>\frac{3}{6}</math>、<math>\frac{4}{9}</math>、<math>\frac{6}{11}</math> 三個分數中，最大分數和最小分數的和是多少？</p> <p>① <math>\frac{9}{17}</math></p> <p>② <math>\frac{17}{18}</math></p> <p>③ <math>\frac{69}{66}</math></p> <p>④ <math>\frac{98}{99}</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.23	0.08
2	0.18	0.25	0.10
3	0.32	0.34	0.25
4*	0.32	0.16	0.57
未作答	0.01		
通過率	0.32	鑑別度	0.41
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.41，正確答案為選項④，通過率為32%，顯示超過三成的學生已具備異分母分數大小比較與加減法解題的能力。</p> <p>2.有32%的學生選擇③(低分組有34%)，這些學生可能不具備異分母分數大小比較的能力，但是具備利用異分母加減法解題的能力，他們錯誤的判定<math>\frac{3}{6}</math>為最小，但是正確算出<math>\frac{3}{6} + \frac{6}{11} = \frac{69}{66}</math>。</p> <p>3.有18%的學生選擇②(低分組有25%)，這些學生可能不具備異分母分數大小比較的能力，但是具備利用異分母加減法解題的能力，他們錯誤的判定<math>\frac{3}{6}</math>為最大，但是正確算出<math>\frac{4}{9} + \frac{3}{6} = \frac{17}{18}</math>。</p> <p>4.有16%的學生選擇①(低分組有23%)，這些學生可能不具備異分母分數大小比較與加減法解題的能力，他們錯誤的判定<math>\frac{3}{6}</math>為最小，且在計算兩數和時發生分子加分子、分母加分母的錯誤，<math>\frac{3}{6} + \frac{6}{11} = \frac{9}{17}</math>，得到答案<math>\frac{9}{17}</math>。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分 年 細 目	4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。
補救教學建議			
(一)錯誤類型的可能原因			
1. 本題給定 $\frac{3}{6}$ 、 $\frac{4}{9}$ 、 $\frac{6}{11}$ 這三個分數中， $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ ， $\frac{6}{11} > \frac{1}{2}$ ，學生可能無法察覺上面的關係，將三個分數通分後再比較，或是兩兩通分進行大小比較，因為計算比較繁雜而發生錯誤。			
2. 學生可能不具備異分母分數大小比較與加減法解題的能力。			
(二)核心概念與本題的教學重點			
1. 以「 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{2}{3}$ ，哪一個分數最大？」為例，說明如何幫助學生解異分母分數的大小比較問題。			
(1)透過等值分數解題：			
$\frac{1}{6}$ 的等值分數： $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{2}{12}$ 、 $\frac{3}{18}$ 、 $\frac{4}{24}$ 、 $\frac{5}{30}$ 、 $\frac{6}{36}$ 、 $\frac{7}{42}$ 、 $\frac{8}{48}$ 、 $\frac{9}{54}$ 、...			
$\frac{3}{8}$ 的等值分數： $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{6}{16}$ 、 $\frac{9}{24}$ 、 $\frac{12}{32}$ 、 $\frac{15}{40}$ 、 $\frac{18}{48}$ 、 $\frac{21}{56}$ 、 $\frac{24}{64}$ 、 $\frac{27}{72}$ 、...			
$\frac{2}{3}$ 的等值分數： $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{4}{6}$ 、 $\frac{6}{9}$ 、 $\frac{8}{12}$ 、 $\frac{10}{15}$ 、 $\frac{12}{18}$ 、 $\frac{14}{21}$ 、 $\frac{16}{24}$ 、 $\frac{18}{27}$ 、 $\frac{20}{30}$ 、 $\frac{22}{33}$ 、 $\frac{24}{36}$ 、 $\frac{26}{39}$ 、 $\frac{28}{42}$ 、 $\frac{30}{45}$ 、 $\frac{32}{48}$ 、...			
$\frac{1}{6} = \frac{4}{24} = \frac{8}{48}$ ， $\frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{18}{48}$ ， $\frac{2}{3} = \frac{16}{24} = \frac{32}{48}$			
$\frac{16}{24} > \frac{9}{24} > \frac{4}{24}$ ，或 $\frac{32}{48} > \frac{18}{48} > \frac{8}{48}$ ，所以 $\frac{2}{3}$ 最大。			
(2)透過以三分數分母的公倍數為公分母解題			
$\frac{1}{6}$ 等值分數的分母：6、12、18、24、30、36、42、48、54、...			
$\frac{3}{8}$ 等值分數的分母：8、16、24、32、40、48、56、64、72、...			
$\frac{2}{3}$ 等值分數的分母：3、6、9、12、15、18、21、24、27、30、33、36、39、42、48、...			
$\frac{1}{6} = \frac{(4)}{24}$ ， $\frac{3}{8} = \frac{(9)}{24}$ ， $\frac{2}{3} = \frac{(16)}{24}$			
$\frac{16}{24} > \frac{9}{24} > \frac{4}{24}$ ，所以 $\frac{2}{3}$ 最大。			

2. 以「 $\frac{3}{8}$ 盒和 $\frac{1}{6}$ 盒合起來有多少盒？」為例，異分母分數的單位都是「盒」，這兩個異分母分數的單位相同，因此可以相加，數學上約定相同單位的數字加減後的答案必須是一個數字。

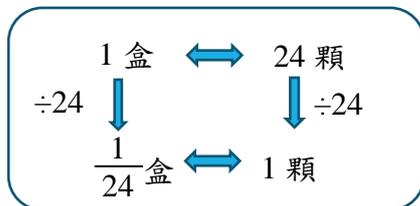
要讓 $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$ 的和是1個數字，必須要找一個比較小的**共測單位**，例如 $\frac{1}{24}$ ，讓異分母分數 $\frac{3}{8}$ 和 $\frac{1}{6}$ 都變成 $\frac{1}{24}$ 的整數倍， $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ ，也就是9個 $\frac{1}{24}$ ， $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ ，也就是4個 $\frac{1}{24}$ ，9個 $\frac{1}{24}$ 和4個 $\frac{1}{24}$ 合起來是13個 $\frac{1}{24}$ ，就能用一個數字 $\frac{13}{24}$ 來描述 $\frac{3}{8}$ 與 $\frac{1}{6}$ 的和，記成 $\frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{13}{24}$ 。

3. 以「1盒蘋果有24顆， $\frac{3}{8}$ 盒和 $\frac{1}{6}$ 盒合起來有多少盒？」為例，如果學生通分還不熟練，教師也可以提供1盒蘋果的顆數，幫助學生利用整數的乘、除法來解決問題。

$24 \div 8 = 3$ ， $3 \times 3 = 9$ ，得到 $\frac{3}{8}$ 盒有9顆。

$24 \div 6 = 4$ ， $4 \times 1 = 4$ ，得到 $\frac{1}{6}$ 盒有4顆。

$9 + 4 = 13$ ，得到 $\frac{3}{8}$ 盒和 $\frac{1}{6}$ 盒合起來13顆。



由上圖可以知道1顆是 $\frac{1}{24}$ 盒，得到13顆是 $\frac{13}{24}$ 盒。

題號	10		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。		
試題內容	<p>10. 小數部分有兩個數字的小數稱為二位小數，例如：2.36、18.03、235.47 都是二位小數。          弟弟用四張數字卡 <b>3</b>、<b>5</b>、<b>6</b>、<b>9</b> 排出最大的二位小數，          請問十分位應該放哪張數字卡？</p> <p>① 3          ② 5          ③ 6          ④ 9</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.16	0.08
2*	0.44	0.22	0.69
3	0.21	0.28	0.11
4	0.24	0.33	0.11
未作答	0.00		
通過率	0.44	鑑別度	0.47
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.47，正確答案為選項②，通過率為44%，顯示超過四成的學生已認識二位小數並具備二位小數大小比較的能力。</p> <p>2.有11%的學生選擇①(低分組有16%)、這些學生可能不具備二位小數大小比較的能力；也可能學生已具備二位小數大小比較的能力，正確找出最大的二位小數，但是誤將百分位看成十分位。</p> <p>3.有21%的學生選擇③(低分組有28%)、這些學生可能不認識二位小數，或不具備二位小數大小比較的能力。</p> <p>4.有24%的學生選擇④(低分組有33%)，這些學生可能不認識二位小數，或不具備二位小數大小比較的能力。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。	4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。

**(一)錯誤類型的可能原因**

1. 學生可能不認識二位小數。
2. 學生可能不具備二位小數大小比較的能力，無法找出最大的二位小數。
3. 學生可能混淆個位、十分位和百分位的意義，將百分位看成十分位。

**(二)核心概念與本題的教學重點**

1. 小數是整數十進位系統的延伸，在引入一位小數時，十分位的值必須是個位的  $\frac{1}{10}$  倍，因此規定「 $0.1 = \frac{1}{10}$ 」。在引入二位小數時，百分位的值必須是個位的  $\frac{1}{100}$  倍，因此規定「 $0.01 = \frac{1}{100}$ 」。百分位位名的由來是「 $\frac{1}{100} = 0.01$ 」的關係。

2. 報讀小數時，整數部分和小數部分報讀的方式不一樣。例如：將「2345.2345」讀作「二千三百四十五點二三四五」。

在報讀整數部分時，會將每一個數字的位名都唸出來。但是在報讀小數部分時，只唸出數字，並沒有唸出位名。例如：0.23 讀成「零點二三」，不能讀成「零點二十三」。

3. 透過下列兩組數字，說明小數點的功能。

第一組小數：7.7、77.77、777.777

第二組小數：77.7、777.77、7777.777

就數字本身視覺的觀點，7.7 小數點的左邊及右邊各有一個 7，77.77 小數點的左邊及右邊各有二個 7，777.777 小數點的左邊及右邊各有三個 7，因此以小數點為對稱中心時，第一組小數是左右對稱的。

但是就位值的觀點，第二組小數才是左右對稱的。當我們以個位的 7 為對稱中心，並忽略小數點時，左右兩邊的位值是對稱的，個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，十位的左邊是百位，十分位的右邊是百分位，百位的左邊是千位，百分位的右邊是千分位，十位及十分位，百位及百分位，千位及千分位分別對稱於個位。如下所示：

千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
		7	7.	7		
	7	7	7.	7	7	
7	7	7	7.	7	7	7

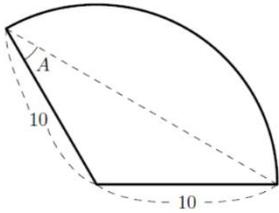
因為數字的單位是 1，而記幾個 1 的位置是個位，因此個位才是數字的對稱中心。個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，不會有個分位的位名，而小數點的功能是告訴我們個位在哪裡。

4. 教師常要求學生將計算後的結果 3.0 改記成 3，2.30 改記成 2.3，可以這樣記的原因是 3.0 和 3 等值，2.30 和 2.3 等值，而 3 和 2.3 是最簡小數的概念。

六年級引入最簡分數後，我們會要求分數問題最後的答案要用最簡分數來表示，相同的理由，我們也希望小數問題最後的答案要用最簡小數來表示。

四年級將計算結果記成 3.0 或 2.30，教師應先接受，再幫助學生改記成 3 或 2.3。

5. 由於小數和連續量的測量情境常一起出現，小數的學習應與量的教材結合，應多學習「樓高 3.25 公尺」、「兩地距離 24.56 公里」、「箱子重 5.32 公斤」等用法，而且小數的加減問題也應儘量與測量結合。
6. 以二位純小數 0.85 為例，進行位值單位的換算，指的是能將「85 個 0.01」聚成「8 個 0.1、5 個 0.01」，以及將「8 個 0.1、5 個 0.01」化成「85 個 0.01」的雙向化聚。也就是說，0.85 由 85 個 0.01 所組成，也由 8 個 0.1 及 5 個 0.01 所組成。

題號	11		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。		
試題內容	<p>11. 下圖是一個 <math>\frac{1}{3}</math> 圓的扇形，請問角 <math>A</math> 是多少度？</p>  <p>(單位：公分)</p> <p>① 20 ② 30 ③ 60 ④ 120</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.20	0.34	0.06
2*	0.57	0.30	0.84
3	0.14	0.20	0.06
4	0.09	0.15	0.04
未作答	0.00		
通過率	0.57	鑑別度	0.54
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.54，正確答案為選項②，通過率為57%，顯示近六成的學生已具備利用圓心角與三角形內角和為180度性質解題的能力。</p> <p>2.有20%的學生選擇①(低分組有34%)，這些學生可能尚未具備利用圓心角與三角形內角和為180度性質解題的能力，以直觀的方式判斷指定角的大小，因而選擇20度為答案；或是將圖中兩半徑長度相加，得到20這個答案。</p> <p>3.有14%的學生選擇③(低分組有20%)，這些學生可能尚未具備利用圓心角與三角形內角和為180度性質解題的能力；這些學生可能已具備求圓心角度數的能力，也掌握三角形內角和為180度的性質，但是誤解題意，求出扇形內等腰三角形兩底角的度數和60度當作答案。</p> <p>4.有9%的學生選擇④(低分組有15%)，這些學生可能已具備求圓心角度數的能力，但誤解題意，求出圓心角的角度120度當作答案。</p>			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-04 能認識角度單位「度」，並使用量角器實測角度或畫出指定的角度。	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。	6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。

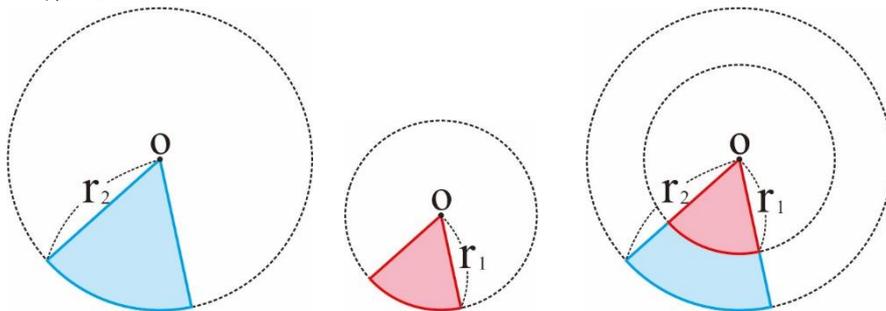
補救教學建議

(一)錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未具備利用圓心角與三角形內角和為 180 度性質解題的能力。
2. 學生可能不認識周角，不知道周角為 360 度。

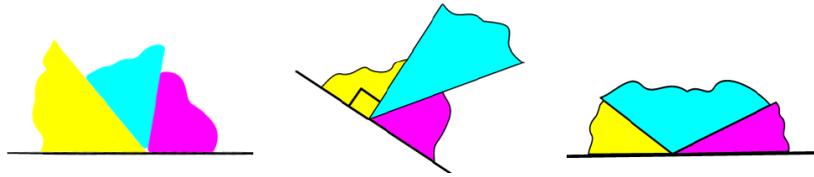
(二)核心概念與本題的教學重點

1. 學生在三年級應該已經認識圓的「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。而五年級的教學重點是認識扇形及圓心角。
2. 圓的圓心角是周角，周角的角度是 360 度，而扇形的圓心角是周角的部分， $\frac{1}{2}$  圓的圓心角是周角的  $\frac{1}{2}$ ，可以利用  $360 \times \frac{1}{2} = 180$ (度)，算出  $\frac{1}{2}$  圓的圓心角是 180 度。相同的方式，可以透過  $360 \times \frac{1}{n}$ ，算出  $\frac{1}{n}$  圓的圓心角是多少度。
3. 部分學生誤認為半徑比較長的  $\frac{1}{n}$  圓，它的圓心角比較大，半徑比較短的  $\frac{1}{n}$  圓，它的圓心角比較小。教師可以透過下圖，幫助學生理解，半徑比較長的  $\frac{1}{6}$  圓，扇形面積比較大，圓心角對應的圓弧比較長，但是它們的圓心角都是 60 度，都一樣大。



4. 下面提供三種幫助學生理解三角形的內角和是 180 度的方法：

- 方法一：拿出或畫出很多不同的三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生測量出這些三角形的所有角，再分別算出這些三角形三個角的和。幫助學生察覺所有三角形三個角的角度和大約都是 180 度。
- 方法二：拿出一些三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生剪下三角形的 3 個角，再將同一個三角形的 3 個角拼湊在一起，幫助學生察覺所有三角形的三個角都可以拼成一個平角，這些三角形 3 個角的角度和大約都是 180 度。
- 方法三：教師也可以只剪下兩個角，再和沒有剪下的那個角拼湊在一起，也能夠拼出一個平角，得到三角形 3 個角的角度和大約都是 180 度。



5.所有的三角形都滿足內角和是 180 度的性質，教師不宜只求出某一個三角形的內角和是 180 度，就說明所有三角形的內角和都是 180 度。教師應幫助學生認識，直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形的內角和都是 180 度。

題號	12		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。		
試題內容	<p>12. 妹妹下午 9 時 15 分上床睡覺，一直睡到隔天上午 6 時 55 分起床。 請問妹妹睡了多久？</p> <p>① 2 小時 20 分鐘 ② 9 小時 ③ 9 小時 40 分鐘 ④ 16 小時 10 分鐘</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.23	0.04
2	0.08	0.15	0.03
3*	0.67	0.41	0.90
4	0.11	0.20	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.67	鑑別度	0.49
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.49，正確答案為選項③，通過率為67%，顯示近七成的學生已具備跨日時間和時刻加減計算的能力。</p> <p>2.有14%的學生選擇①(低分組有23%)，這些學生可能不具備跨日時間和時刻加減計算的能力，直接將兩個時刻相減得出答案。</p> <p>3.有8%的學生選擇②(低分組有15%)，這些學生可能不具備跨日時間和時刻加減計算的能力，他們只算出今天下午9時睡到隔天的6時，大約睡了9小時。</p> <p>4.有 11%的學生選擇④(低分組有 20%)，這些學生可能不具備跨日時間和時刻加減計算的能力，直接將兩個時刻相加得出答案。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-13 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並做同單位時間量及時、分複名數的加減計算(不進、退位)。	4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。

**(一)錯誤類型的可能原因**

- 1.這些學生可能不具備跨日時間和時刻加減計算的能力。
- 2.學生可能無法畫出時間數線，或無法將時刻轉換為時間。
- 3.學生可能不理解題意，直接將題目中給定的時刻相加或相減。

**(二)核心概念與本題的教學重點**

本題主要在於解決跨日的時間計算問題，過程中也涉及到時間的換算。相關系列教學參考如下：

- 1.時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」的計算：

三年級：只處理同單位加減及不進退位的複名數時間量加減問題。

四年級：處理進退位的複名數時間量加減問題。

- 2.四年級時間的加減包含下列類型，都可以進退位：

- (1)時間量的加減：

例如：「3小時50分鐘和2小時30分鐘合起來是多少小時多少分鐘？」。

- (2)時刻及時間的加減：

- a.兩時刻間經過多少時間：

上午3時45分到下午7時18分經過多少小時多少分鐘？

- b.甲時刻經過某時間量後是什麼時刻：

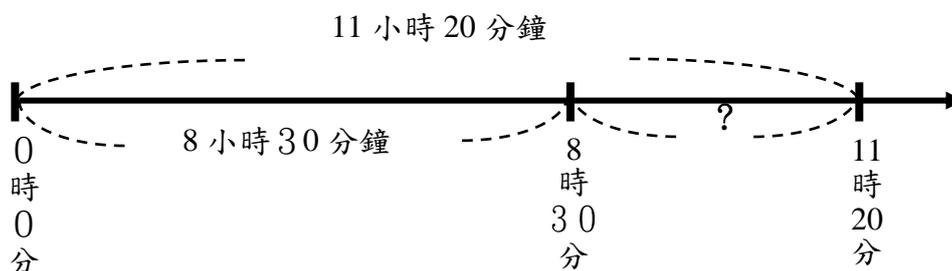
現在是3時25分，經過5小時47分鐘後是幾時幾分？

- c.甲時刻在某時間量之前是什麼時刻：

現在是下午3時25分，5小時47分鐘前是上午幾時幾分？

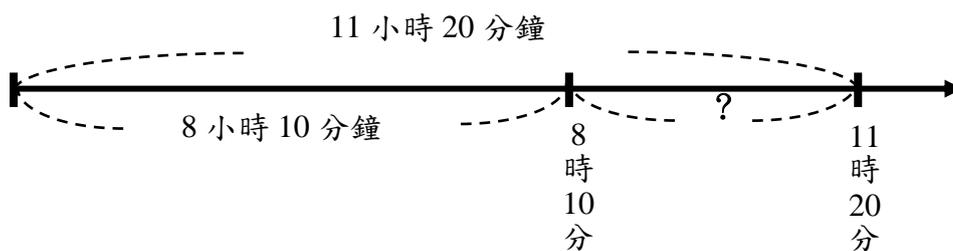
- 3.教師可透過時間數線，幫助學生利用加減算式解決時刻及時間的加減問題。

以「上午8時30分到上午11時20分，經過幾小時幾分鐘？」為例，可以透過時間數線，將「上午8時30分」解讀為和上午0時0分的距離是「8小時30分鐘」，將「上午11時20分」解讀為和上午0時0分的距離是「11小時20分鐘」，利用「11小時20分鐘－8小時30分鐘＝2小時50分鐘」，就能得到經過2小時50分鐘的答案。

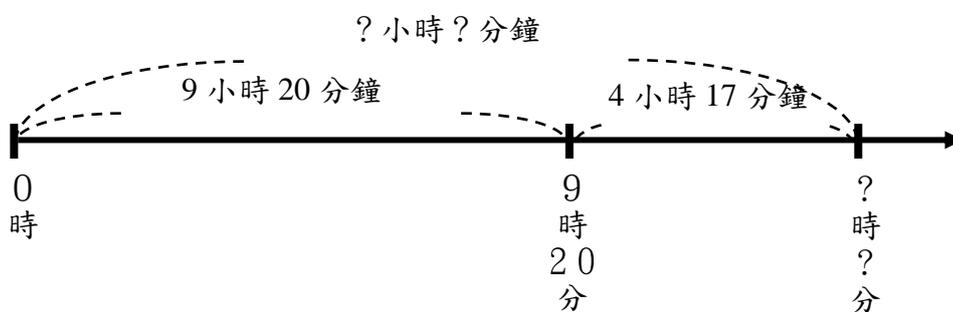


- 4.教師透過時間數線進行教學時，應清楚標示時間量或時刻的用語。以下圖為例，時間數線上刻度標示的是時刻「8時10分」及「11時20分」，距離標示的是時間量「8小時10分鐘」及「11小時20分鐘」。將兩時間量相減可以算

出 8 時 30 分到 11 時 20 分經過 2 小時 50 分鐘。

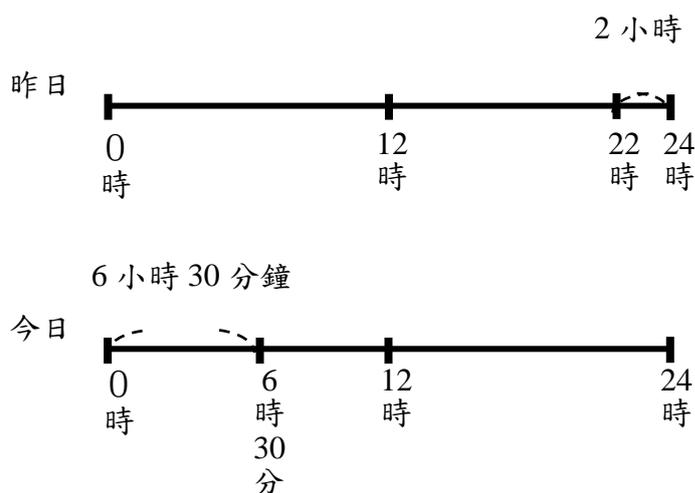


5. 以「一部電影片長 4 小時 17 分鐘，從上午 9 時 20 分開始播放，電影結束是幾時幾分？(用 12 時制表示)」為例，可以透過時間數線，將「上午 9 時 20 分」解讀為和上午 0 時 0 分的距離是「9 小時 20 分鐘」，利用「9 小時 20 分鐘 + 4 小時 17 分鐘 = 13 小時 37 分鐘」，算出結束的時間是「13 時 37 分」。13 時 37 分就是下午 1 時 37 分。



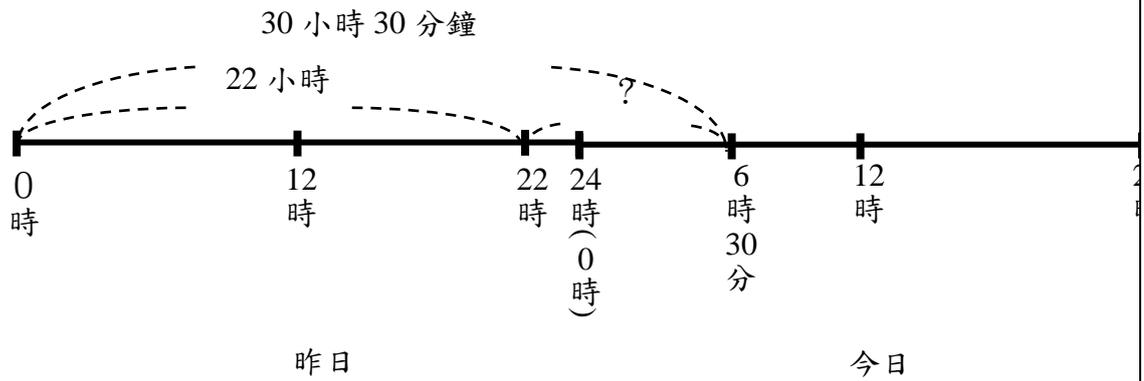
6. 以「哥哥昨天下午 10 時上床睡覺，今天上午 6 時 30 分起床，他總共睡了幾小時幾分鐘？」為例，教師透過時間數線進行跨日時間教學時，宜先畫出兩日的兩條時間數線幫助學生解題，解題成功後再將兩日的時間數線合併。

方法一：畫出兩日的時間數線解題



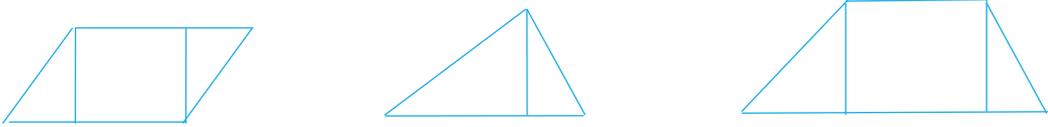
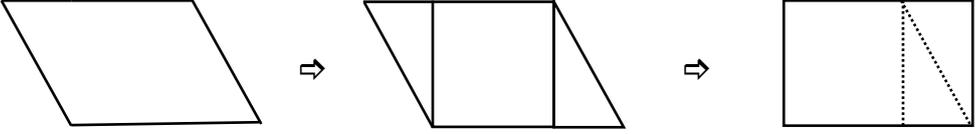
下午 10 時改記成 24 時制是 22 時， $24 - 22 = 2$ ，表示昨日睡了 2 小時。6 時 30 分到 0 時的距離是 6 小時 30 分鐘，表示今日睡了 6 小時 30 分鐘， $2 \text{ 小時} + 6 \text{ 小時 } 30 \text{ 分鐘} = 8 \text{ 小時 } 30 \text{ 分鐘}$ ，表示哥哥從昨日下午 10 時到今日上午 6 時 30 分，共睡了 8 小時 30 分鐘。

方法二：連接兩日時間數線解題



下午10時改記成24時制是22時，0時到22時的距離是22小時。24小時+6小時30分鐘=30小時30分鐘，表示昨日0時到今日6時30分的距離是30小時30分鐘。30小時30分鐘-22小時=8小時30分鐘，表示哥哥從昨日下午10時到今日上午6時30分，共睡了8小時30分鐘。

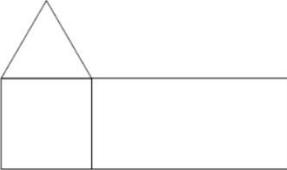
題號	13		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-n-18)		
試題內容	<p>13. 平行四邊形乙和平行四邊形丙都不是長方形。  長方形甲的長是 18 公分、寬是 12 公分；  平行四邊形乙的底邊是 18 公分、高是 12 公分；  平行四邊形丙的底邊是 18 公分、鄰邊是 12 公分；  下列關於甲、乙、丙三個圖形面積大小順序的描述，何者正確？</p> <p>① 甲 = 乙，乙 &gt; 丙  ② 甲 = 乙，乙 &lt; 丙  ③ 甲 &gt; 乙，乙 &gt; 丙  ④ 甲 &gt; 乙，乙 = 丙</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1 *	0.39	0.19	0.66
2	0.22	0.29	0.14
3	0.15	0.25	0.06
4	0.23	0.27	0.14
未作答	0.01		
通過率	0.39	鑑別度	0.47
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為 0.47，正確答案為選項①，通過率為 39%，顯示近四成的學生已具備利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力。</p> <p>2.有 22%的學生選擇②(低分組有 29%)，這些學生可能已具備利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力，但是不理解兩平行線間的垂線最短，也就是平行四邊形乙的高和平行四邊形丙的鄰邊一樣長時，平行四邊形丙的高比平行四邊形乙的高短，因此誤判乙 &lt; 丙。</p> <p>3.有 23%的學生選擇④(低分組有 27%)，這些學生可能已具備利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力，誤認為甲 &gt; 乙。</p> <p>4.有 15%的學生選擇③(低分組有 25%)，這些學生這些學生可能尚未這些學生可能已具備利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力，誤認為甲 &gt; 乙；這些學生可能不理解兩平行線間的垂線最短，也就是平行四邊形乙的高和平行四邊形丙的鄰邊一樣長時，平行四邊形丙的高比平行四邊形乙的高短，因此誤判乙 = 丙。</p>			

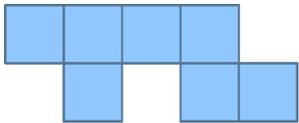
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-1 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-s-09) 4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-n-18)	6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-s-05)
補救教學建議			
<p>(一)錯誤類型的可能原因</p> <p>1. 學生可能不理解兩平行線間的垂線最短，也就是平行四邊形乙的高和平行四邊形丙的鄰邊一樣長時，平行四邊形丙的高比平行四邊形乙的高短。</p> <p>2. 學生可能不具備利用長方形與平行四邊形面積公式解題的能力。</p> <p>(二)核心概念與本題的教學重點</p> <p>1 建議教師先透過將平行四邊形切割再重組成長方形的方式，引入平行四邊形的面積公式。再透過將兩個三角形拼成平行四邊形，以及將兩個梯形拼成平行四邊形的方式，引入三角形及梯形面積公式。</p> <p>這種引入三角形、平行四邊形與梯形面積公式的方法，其優點是只要操弄圖形就能導出公式，不涉及代數式的運算，缺點是解法不自然，學生無法自發性的解題，必須透過教師的引導才能導出公式。</p> <p>2. 學生已學過長方形面積公式，也知道沿著長方形的對角線剪開，會剪出兩個全等的直角三角形，因此剪成的直角三角形面積是長方形面積的一半。</p> <p>如下圖，教師不宜將三角形、平行四邊形與梯形分別切割成長方形和直角三角形，再將它們面積相加的方式，引入面積公式，這種方法雖然能算出三角形、平行四邊形與梯形的面積，但是五年級學生不易將這些算式併式後引入公式。</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>3. 下面概略說明如何引入平行四邊形、三角形的面積公式</p> <p>(1) 將平行四邊形先切割再重組(如下圖)，將平行四邊形轉換成等積異形的長方形，其中長方形的長邊就是平行四邊形的底邊，長方形的寬邊就是平行四邊形的高。平行四邊形面積 = 長方形面積 = 長 × 寬 = 底 × 高。</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>教師應強調長方形的長邊和寬邊互相垂直，因此平行四邊形的底邊和高也互相垂直，為以後找不同形狀平行四邊形給定底邊求對應高的問題鋪路。</p>			

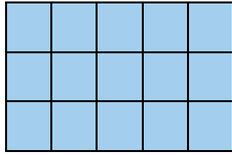
(2)透過將兩個全等的三角形拼成平行四邊形的方式，導出三角形面積公式，其中三角形的底就是拼成平行四邊形的底，三角形的高就是拼成平行四邊形的高。  
三角形面積 = 平行四邊形面積  $\div 2 = (\text{底} \times \text{高}) \div 2$ 。



學生並不知道兩個全等三角形拼成的四邊形一定是平行四邊形，教師應要求學生檢查拼成的四邊形是平行四邊形；也要強調平行四邊形的底和高互相垂直，所以三角形的底和高也互相垂直，為以後找不同形狀三角形給定底邊求對應高的問題鋪路。

題號	14		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-n-18)		
試題內容	<p>14. 妹妹拿出了一個正三角形、一個正方形及一個長方形的色紙貼成下面的圖形。</p>  <p>已知正三角形周長是 36 公分，長方形較長一邊的長是 26 公分，請問長方形面積是多少平方公分？</p> <p>① 76 ② 234 ③ 312 ④ 936</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.19	0.02
2	0.15	0.23	0.06
3*	0.55	0.25	0.85
4	0.20	0.32	0.07
未作答	0.01		
通過率	0.55	鑑別度	0.60
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.60，正確答案為選項③，通過率為55%，顯示近六成的學生已具備利用長方形面積公式解題的能力。</p> <p>2.有10%的學生選擇①(低分組有19%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題的能力，但是他們誤解題意，算出長方形的周長，這些學生可能的算法如下：<math>36 \div 3 = 12</math>，<math>(12 + 26) \times 2 = 76</math>。</p> <p>3.有15%的學生選擇②(低分組有23%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題的能力，但是他們誤解題意，將正三角形周長誤看成長方形的另一邊，這些學生可能的算法如下：<math>36 \div 4 = 9</math>，<math>26 \times 9 = 234</math>。</p> <p>4.有 20%的學生選擇④(低分組有 32%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題的能力，但是他理解題意，直接將題目給定的兩數相乘當成答案，他們可能的算法如下：<math>36 \times 26 = 936</math>。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分 年 細 目	3-n-18 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。(同 3-s-05) 3-s-02 能認識周長，並實測周長。	4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-n-18)	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-n-18)
補救教學建議			
<p>(一)錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.學生可能不具備利用長方形面積公式解題的能力。</li> <li>2.學生可能混淆長方形面積公式和長方形周長公式的意義。</li> <li>3.學生可能混淆正方形周長與正三角形周長的意義。</li> </ol> <p>(二)核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.學生常混淆正方形及長方形周長及面積公式解題的意義，教師應多提供學生利用長度單位「1公分」或「1公尺」實測的經驗，例如50個「1公分」接起來，剛好和甲繩一樣長，可以稱甲繩的長度是50公分；也應該多提供學生利用面積單位「1平方公分」或「1平方公尺」實測的經驗，例如將30個「1平方公分」合起來，剛好和色紙一樣大，就可以稱色紙的面積是30平方公分。 「1公分」和「1平方公分」是兩種不相同的量，當學生有豐富的長度及面積單位實測的經驗，比較不會混淆正方形及長方形周長及面積公式解題的意義。</li> <li>2.如果學生混淆正方形及長方形周長及面積公式，教師可以要求學生熟記面積公式即可，評量周長時，學生只要理解正方形邊長、長方形長邊、寬邊，以及圓形周長的意義，並畫出正方形及長方形的圖形，就能順利的解題。</li> <li>3.以「長5公分、寬3公分長方形的面積是多少平方公分？」為例，說明如何幫助學生理解長邊及寬邊都是整公分的長方形面積公式。</li> </ol> <p>步驟一：建立單位面積1平方公分的概念</p> <p>例如知道下圖是由7個1平方公分合起來的，所以下圖的面積是7平方公分。</p>  <p>步驟二：利用1平方公分的方瓦覆蓋給定的長方形，並利用乘法算式算出有多少個1平方公分。</p> <p>例如下圖是用1平方公分方瓦覆蓋的長方形，要求學生用一排有幾個1平方公分，一共有幾排的方式，利用乘法「<math>5 \times 3 = 15</math>」算出面積是15平方公分。</p>			



步驟三：理解被乘數、乘數和長邊、寬邊的公分數之間的關係。

例如長邊是 5 公分，剛好有 5 個 1 平方公分的方瓦，也就是一排有 5 個 1 平方公分，寬邊是 3 公分，剛好有 3 個 1 平方公分的方瓦，也就是一共有 3 排。

步驟四：透過長邊和寬邊的公分數，直接用乘法算出單位面積的個數，並形成長乘以寬面積公式算法的共識。

長邊是 5 公分，表示一排有 5 個 1 平方公分，寬邊是 3 公分，表示一共有 3 排，因此可以透過長邊及寬邊的公分數，利用一排有幾個、有幾排的方式算出長方形的面積，並得到「長方形面積＝長邊的公分數×寬邊的公分數」的結果。

當學生有一些利用上述公式解題的經驗後，教師可以將上述公式中「長邊的公分數×寬邊的公分數」簡記為「長邊×寬邊」或「長×寬」。

題號	15		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。		
試題內容	15. 算算看， $308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 = ?$ ① 196 ② 260 ③ 1800 ④ 4200		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.41	0.16	0.72
2	0.23	0.27	0.15
3	0.24	0.41	0.07
4	0.11	0.15	0.06
未作答	0.00		
通過率	0.41	鑑別度	0.56
試題品質分析			
1.本題鑑別度為0.56，正確答案為選項①，通過率為41%，顯示超過四成的學生已具備多步驟整數四則混合計算的能力。			
2.有23%的學生選擇②(低分組有27%)，這些學生可能不具備多步驟整數四則混合計算的能力，他們知道括號要先算，但括號內有加和除的運算，學生忘記要先除後加，而直接由左往右算，但是算出括號內的答案後，他們又記得先乘除後加減的約定，這些學生可能的計算過程如下： $  \begin{aligned}  &308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 \\  &= 308 - 8 \times (15 \div 5) \times 2 \\  &= 308 - 8 \times 3 \times 2 \\  &= 308 - 24 \times 2 \\  &= 308 - 48 \\  &= 260  \end{aligned}  $			
3.有24%的學生選擇③(低分組有41%)，這些學生可能不具備多步驟整數四則混合計算的能力，他們知道括號要先算，但括號內有加有除，他直接由左往右算，但是算出括號內的答案後，接著又由左往右算，這些學生可能的計算過程如下： $  \begin{aligned}  &308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 \\  &= 308 - 8 \times (15 \div 5) \times 2 \\  &= 308 - 8 \times 3 \times 2 \\  &= 300 \times 3 \times 2 \\  &= 900 \times 2 \\  &= 1800  \end{aligned}  $			

4.有11%的學生選擇④(低分組有15%)，這些學生可能不具備多步驟整數四則混合計算的能力，他們在括號內的計算過程記得先乘除後加減的約定，但在算出括號內的答案後，又忘記先乘除後加減的約定，由左往右算算出答案，這些學生可能的計算過程如下：

$$\begin{aligned}
 &308 - 8 \times (5 + 10 \div 5) \times 2 \\
 &= 308 - 8 \times (5 + 2) \times 2 \\
 &= 308 - 8 \times 7 \times 2 \\
 &= 300 \times 7 \times 2 \\
 &= 2100 \times 2 \\
 &= 4200
 \end{aligned}$$

#### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-05 能做整數四則混合計算(兩步驟)。	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。

#### 補救教學建議

##### (一)錯誤類型的可能原因

- 1.學生面對多步驟計算問題時，不知道第一步要算什麼。
- 2.學生可能混淆運算次序「括號先算、先乘除後加減、由左往右算」的約定。
- 3.學生利用先乘除後加減的約定算出括弧內的數後，忽視加減與乘除混時，還要先乘除再進行加減運算。

##### (二)核心概念與本題的教學重點

- 1.教師應區分運算次序與運算性質的差異，運算次序討論的重點是「括號先算、先乘除後加減、由左往右算」；運算性質討論的重點是「加法及乘法交換律、加法及乘法結合律、乘法對加法的分配律」等。
- 2.四年級兩步驟計算問題中，只會用到：括號先算、先乘除後加減、由左往右算，這三個約定其中的一個約定。  
建議教師將兩步驟計算問題分成有括號和沒有括號兩類，來幫助學生解題。  
第一類：有括號的兩步驟計算問題  
括號的部分要先算，簡稱為括號先算。  
第二類：沒有括號的兩步驟計算問題  
(1) 算式中加、減，乘、除都有時，要先算乘、除的部分。簡稱為先乘除後加減。  
(2) 算式中都是乘、除時，要由左往右算；算式中都是加、減時，也要由左往右算。簡稱為由左往右算。
- 3.五年級引入三步驟計算問題，學生只要知道第一步要算什麼，三步驟計算問題，就能簡化成二步驟計算問題。四年級將兩步驟計算問題分成有括號和沒有括號兩類，來幫助學生解題的約定，也能適用於三步驟問題及更多步驟的問題。

第一類：有括號的三步驟計算問題

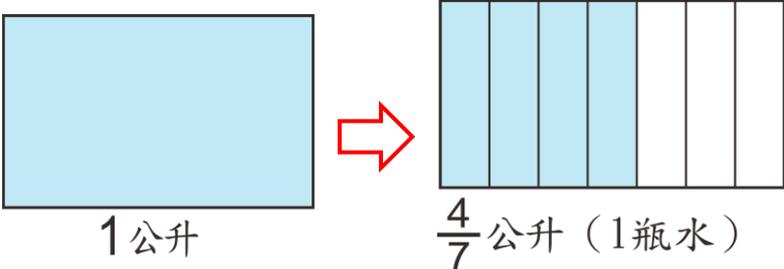
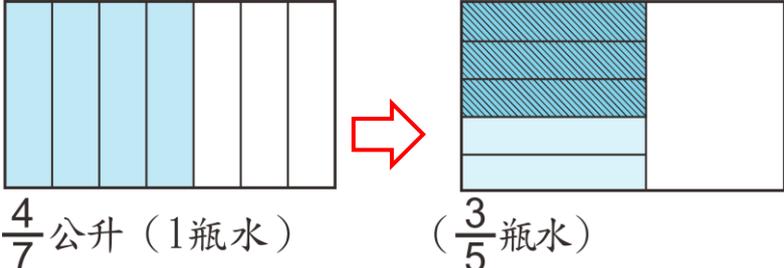
括號的部分要先算，簡稱為括號先算。

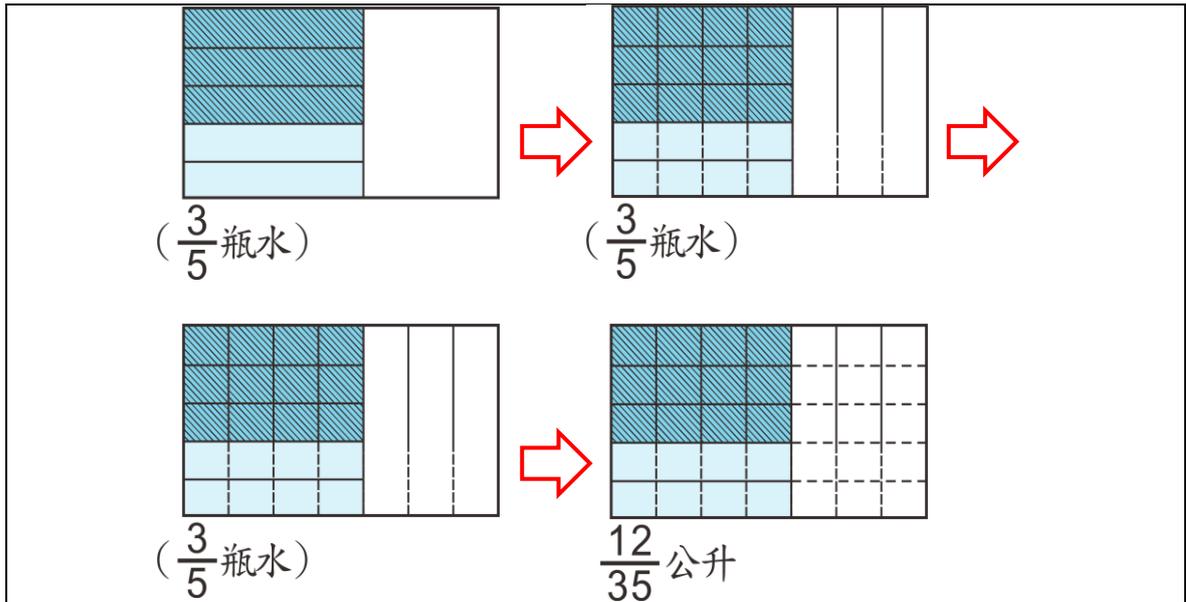
第二類：沒有括號的三步驟計算問題

(1)算式中加、減，乘、除都有時，要先算乘、除的部分。簡稱為先乘除後加減。

(2)算式中都是乘、除時，要由左往右算；算式中都是加、減時，也要由左往右算。簡稱為由左往右算。

題號	16		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。		
試題內容	<p>16. 下面哪個算式正確？</p> <p>① <math>1\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} &gt; 1 + \frac{4}{5}</math></p> <p>② <math>1\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} &gt; 1 + \frac{6}{7}</math></p> <p>③ <math>1\frac{4}{5} \times \frac{7}{6} &gt; 1 + \frac{4}{5}</math></p> <p>④ <math>1\frac{4}{5} \times \frac{7}{6} &gt; \frac{7}{6} + \frac{7}{6}</math></p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.25	0.05
2	0.16	0.25	0.08
3*	0.46	0.22	0.74
4	0.22	0.27	0.12
未作答	0.01		
通過率	0.46	鑑別度	0.53
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.53，正確答案為選項③，通過率為46%，顯示近五成的學生已具備利用分數乘法解決生活中問題的能力。</p> <p>2.有15%的學生選擇①(低分組有25%)，這些學生可能不具備利用分數乘法解決生活中問題的能力，他們不知道被乘數乘以一個比1小的數後，積會小於原來的被乘數。這些學生可能的解題過程如下：</p> $1\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = (1 + \frac{4}{5}) \times \frac{6}{7} = \frac{6}{7} + \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} > 1 + \frac{4}{5}$ <p>3.有16%的學生選擇②(低分組有25%)，這些學生可能不具備利用分數乘法解決生活中問題的能力，他們可能不理解帶分數<math>1\frac{4}{5} = 1 + \frac{4}{5}</math>，也誤以為真分數乘已真分數的乘積會大於1，這些學生可能的解題過程如下：</p> $1\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = 1 + \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} > 1 + \frac{6}{7}$ <p>4.有22%的學生選擇④(低分組有27%)，這些學生可能不具備利用分數乘法解決生活中問題的能力，他們可能不知道真分數乘以一數的積會小於該數。這些學生可能的解題過程如下：</p> $1\frac{4}{5} \times \frac{7}{6} = (1 + \frac{4}{5}) \times \frac{7}{6} = \frac{7}{6} + \frac{4}{5} \times \frac{7}{6} > \frac{7}{6} + \frac{7}{6}$			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-07 理解分數之「整數相除」的意涵。	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。
補救教學建議			
<p><b>(一)錯誤類型的可能原因</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.學生可能不具備利用分數乘法解決生活中問題的能力。</li> <li>2.學生可能不理解「分數乘以一個比1小的數會小於該數」或「分數乘以一個比1大的數會大於該數」。</li> <li>3.學生只有比較兩個數字大小關係的能力，沒有比較兩個算式大小關係的能力。</li> <li>4.學生可能無法掌握帶分數的意義。</li> </ol> <p><b>(二)核心概念與本題的教學重點</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.下面以「一瓶水有<math>\frac{4}{7}</math>公升，<math>\frac{3}{5}</math>瓶水有多少公升？」為例，說明為什麼可以透過「分子乘以分子，分母乘以分母」的方式算出答案。</li> </ol> <p>步驟一：題目問「水有多少公升？」，先畫一個長方形表示1公升，接著畫出<math>\frac{4}{7}</math>公升表示1瓶水，如下圖：</p>  <p>1公升 <span style="margin-left: 200px;"><math>\frac{4}{7}</math>公升 (1瓶水)</span></p> <p>步驟二：以1瓶水(<math>\frac{4}{7}</math>公升)為單位，平分成5份，再取出其中的3份，並在這3份畫上斜線，斜線部分就是<math>\frac{3}{5}</math>瓶水，如下圖：</p>  <p><math>\frac{4}{7}</math>公升 (1瓶水) <span style="margin-left: 200px;">(<math>\frac{3}{5}</math>瓶水)</span></p> <p>步驟三：「和1公升(原來的長方形)比比看，1公升被分割成幾小份？」，可以用算式「<math>7 \times 5 = 35</math>」算出1公升被分割成35小份，其中的1小份是<math>\frac{1}{35}</math>公升。再算算看，斜線部分有幾小份，用算式「<math>4 \times 3 = 12</math>」算出有12小份，這12小份合起來是<math>\frac{12}{35}</math>公升。如下圖：</p>			



步驟四：看著算式「 $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{7 \times 5}$ 」說說看：「分母乘以分母(7×5)」是否記錄了將1公升(原來的長方形)先平分成7份、每1份再平分成5小份？也就是將1公升平分成35(7×5)小份，而其中的1小份是 $\frac{1}{7 \times 5}$ 公升。」

「分子乘以分子(3×4)」是否記錄了有12個 $\frac{1}{7 \times 5}$ 公升？也就是12個 $\frac{1}{35}$ 公升。」

2. 以「一桶果汁 $\frac{5}{6}$ 公升， $\frac{3}{4}$ 桶有多少公升？」為例，學生利用「 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ 」解題

時，不宜要求學生將被乘數的分母6和乘數的分子3直接約分，因為 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{3}{4}$ 兩個數字的單位不一樣。

當學生算出「 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ 」之後， $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ 是一個數字，因為分母的6和分子的3有公因數3，所以可以將(6×4)和(5×3)同時除以3，得到

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times \cancel{3}^1}{\cancel{6}_2 \times 4} = \frac{5 \times 1}{2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

教師也可以比對先約分和算出積後再約分的算式，幫助學生認識最後的結果都一樣，因此可以先約分後算出答案。

題號	17		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。		
試題內容	<p>17. 左圖是「<math>53 \div 7</math>」求商到小數第二位的直式計算。 右圖是「<math>53 \div 7</math>」求商到小數第三位的直式計算。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 7.57 \\ 7 \overline{)53} \\ \underline{49} \phantom{0} \\ 40 \\ \underline{35} \phantom{0} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 1 \end{array}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 7.571 \\ 7 \overline{)53} \\ \underline{49} \phantom{0} \\ 40 \\ \underline{35} \phantom{0} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 3 \end{array}</math> </div> </div> <p>右圖中的除法直式將左圖除法直式下面的 1 後面補一個 0 繼續除，請問表示什麼意思？</p> <p>① 把 1 個 10 換成 10 個 1      ② 把 1 個 1 換成 10 個 0.1      ③ 把 1 個 0.1 換成 10 個 0.01      ④ 把 1 個 0.01 換成 10 個 0.001</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.26	0.03
2	0.27	0.34	0.15
3	0.14	0.22	0.06
4*	0.43	0.17	0.76
未作答	0.01		
通過率	0.43	鑑別度	0.59
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為 0.59，正確答案為選項④，通過率為 43%，顯示超過四成的學生已具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力。</p> <p>2.有 15%的學生選擇①(低分組有 26%)、這些學生可能不具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力，誤認為百分位的 1 是 1 個⑩。</p> <p>3.有 27%的學生選擇②(低分組有 34%)、這些學生可能不具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力，誤認為百分位的 1 是 1 個①。</p> <p>4.有 14%的學生選擇③(低分組有 22%)，這些學生可能不具備整數除以整數商是三位小數直式計算的能力，誤認為百分位的 1 是 1 個 0.1。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。
補救教學建議			
<p><b>(一)錯誤類型的可能原因</b></p> <p>1. 學生可能已掌握整數除以整數商是整數的程序性計算過程，但是無法掌握計算過程中位值的意義，無法延伸商是整數的計算過程至商是小數的情境。</p> <p>2. 學生可能不知道商是整數時餘數是多少個①，商是一位小數時餘數是多少個0.1，商是二位小數時餘數是多少個0.01。</p> <p><b>(二)核心概念與本題的教學重點</b></p> <p>1. 教師可以先布小數除以整數，商數是小數且有餘數的問題，例如：「<math>17.5 \div 4</math>」。再布整數除以整數，商數是小數且有餘數的等分除問題，例如：「<math>17 \div 4</math>」。「<math>17.5 \div 4</math>」的被除數是一位小數，學生較容易類比整數除法直式計算，將整數位的餘數1轉換成10個0.1，再加上原有的0.5後繼續運算。而「<math>17 \div 4</math>」的被除數是整數，學生不易自行加上小數點，再將整數位的餘數1轉換成10個0.1。</p> <p>2. 以「將231.8公升果汁，平分裝成14瓶，每瓶最多可以裝幾公升，剩下幾公升？(商數算到小數第一位)」為例，說明如何幫助學生解小數除以整數除法直式計算。</p> <p>步驟一：將231.8分解為2個「100」、3個「10」、1個「1」和8個「0.1」。</p> <p>步驟二：先分2個「100」，2個「100」平分成14份不夠分；將2個「100」換成20個「10」，加上原有的3個「10」，合起來是23個「10」。23個「10」平分成14份，每份是1個「10」。</p> <p>步驟三：還剩下9個「10」不夠分，9個「10」再換成90個「1」，加上原有的1個「1」，合起來是91個「1」。</p> <p>步驟四：91個「1」平分成14份，每份是6個「1」，分掉84個「1」。</p> <p>步驟五：還剩下7個「1」不夠分，7個「1」換成70個「0.1」，加上原有的8個「0.1」，合起來是78個「0.1」。</p> <p>步驟六：78個「0.1」平分成14份，每份是5個「0.1」，分掉70個「0.1」。</p> <p>步驟七：剩下8個「0.1」。</p> <p>步驟八：每瓶分到1個「10」、6個「1」和5個「0.1」，剩下8個「0.1」，也就是每瓶分到16.5公升，剩下0.8公升。</p> <p>上述的解題活動，可以使用下列直式來記錄：</p>			

	1 6. 5	⇒ 步驟八
1 4 )	2 3 1. 8	⇒ 步驟一
	1 4	⇒ 步驟二
	9 1	⇒ 步驟三
	8 4	⇒ 步驟四
	7 8	⇒ 步驟五
	7 0	⇒ 步驟六
	8	⇒ 步驟七

3.最簡分數的分母是  $2^m \times 5^n$  的樣式，其中  $m$ 、 $n$  都是非負整數，才能轉換成有限小數。

例如： $\frac{3}{8}$  的分母是  $2^3 \times 5^0$ ，可以透過下列算式將  $\frac{3}{8}$  改記成有限小數。

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{8 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{10 \times 10 \times 10} = \frac{375}{1000} = 0.375。$$

4.建議教師先幫助學生澄清除法解題的意義，再幫助學生將整數情境的除法問題延伸到小數情境。

(1)整數情境等分除問題解題的意義：有兩種解讀 5983 元的方式。

第一種：以 1 元為單位的合成方式，將 5983 元視為 5000 元、900 元、80 元和 3 元的合成結果。

第二種：以 1 千元、1 百元、十元及一元四個單位的合成方式，將 5983 元視為 5 張 1 千元、9 張 1 百元、8 個十元和 3 個一元的合成結果。

將 5983 元視為 5 張 1 千元、9 張 1 百元、8 個十元和 3 個一元的合成結果，可以將要運算的數字變小，方便計算。

以問題「將 5983 元平分給 72 人，每人最多可以分到幾元，剩下多少元？」為例：可以將 5983 元視為 5 張千元鈔票、9 張百元鈔票、8 個十元硬幣、3 個一元硬幣的合成結果：先分千元鈔票，5 張千元鈔票平分給 72 個人不夠分。換成百元鈔票，5 張千元鈔票可以換 50 張百元鈔票，加上原有的 9 張百元鈔票，合起來有 59 張百元鈔票。59 張百元鈔票平分給 72 個人不夠分，再換成十元硬幣，59 張百元鈔票可以換成 590 個十元硬幣，加上原有的 8 個十元硬幣，合起來有 598 個十元硬幣。598 個十元硬幣平分給 72 個人，每個人分到 8 個十元硬幣。還剩下 22 個十元硬幣不夠分，再換成一元硬幣，22 個十元硬幣可以換成 220 個一元硬幣，加上原有的 3 個一元硬幣，合起來有 223 個一元硬幣。223 個一元硬幣平分給 72 個人，每個人分得 3 個一元硬幣，還剩下 7 個一元硬幣。

因此，每一個人分到 8 個十元硬幣和 3 個一元硬幣，還剩下 7 個一元硬幣，也就是說，每一個人分到 83 元，剩下 7 元。

上述的解題活動可以使用下列直式來記錄：

千百十個	$83$	→ 每人先分到8個十元硬幣，再分到3個一元硬幣。
$72$	$\begin{array}{r} 5983 \\ -576 \\ \hline 223 \\ -216 \\ \hline 7 \end{array}$	<p>→ 每人先分到8個十元硬幣，用掉576個十元硬幣。</p> <p>→ 剩下22個十元硬幣，換成220個一元硬幣，和題目裡的3個一元硬幣合起來有223個一元硬幣。</p> <p>→ 每人再分到3個一元硬幣，用掉216個一元硬幣。</p> <p>→ 剩下7個一元硬幣</p>

(2)小數情境等分除問題解題的意義：

下面以「 $31.8 \div 5$ 」為例，說明小數除以整數除法算則解題的意義。

建議教師依下列步驟幫助學生解題。

步驟一：將31.8分解為3個「10」、1個「1」和8個「0.1」。

步驟二：先分3個「10」，3個「10」平分成5份不夠分；將3個「10」換成30個「1」，加上原有的1個「1」，合起來是31個「1」。31個「1」平分成5份，每份是6個「1」。

步驟三：還剩下1個「1」不夠分，1個「1」再換成10個「0.1」，加上原有的8個「0.1」，合起來是18個「0.1」。

步驟四：18個「0.1」平分成5份，每份是3個「0.1」，分掉15個「0.1」。

步驟五：還剩下3個「0.1」不夠分，3個「0.1」換成30個「0.01」。

30個「0.01」平分成5份，每份是6個「0.01」。

每瓶分到6個「1」、3個「0.1」和6個「0.01」，也就是每瓶分到6.36公升。

上述的解題活動可以使用下列直式來記錄：

十個 位	十個 位	十個 位	十個 位	
			$6.36$	→ 每人先分到6個「1」，再分到3個「0.1」，最後分到6個「0.01」。合起來是6.36。
$5$	$\begin{array}{r} 31.8 \\ -30 \\ \hline 18 \\ -15 \\ \hline 30 \\ -30 \\ \hline 0 \end{array}$			<p>→ 31個「1」平分成5份，每份是6個「1」，分掉30個「1」，剩下1個「1」。換成10個「0.1」，和題目裡的8個「0.1」合起來是18個「0.1」。</p> <p>→ 18個「0.1」，平分成5份，每份是3個「0.1」，分掉15個「0.1」，剩下3個「0.1」，換成30個「0.01」。</p> <p>→ 30個「0.01」平分成5份，每份是6個「0.01」，分掉30個「0.01」。</p> <p>→ 剩下0個「0.01」。</p>

題號	18		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。		
試題內容	<p>18. 「1.99、<math>2\frac{3}{10}</math>、<math>\frac{14}{5}</math>、2.5」，這四個數中，哪個數最大？</p> <p>① 1.99</p> <p>② <math>2\frac{3}{10}</math></p> <p>③ <math>\frac{14}{5}</math></p> <p>④ 2.5</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.16	0.02
2	0.10	0.21	0.01
3*	0.59	0.28	0.88
4	0.23	0.34	0.09
未作答	0.01		
通過率	0.59	鑑別度	0.60
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.60，正確答案為選項③，通過率為59%，顯示近六成的學生已具備分數與小數互換及比較大小的能力。</p> <p>2.有8%的學生選擇①(低分組有16%)、這些學生可能不具備分數與小數互換及比較大小的能力，他們可能不理會小數點，也不理解帶分數的意義，或認為分數一定比整數小，直接比較整數199、2和25，得到1.99最大的答案。</p> <p>3.有10%的學生選擇②(低分組有21%)，這些學生可能不具備分數與小數互換及比較大小的能力，誤認為帶分數最大。</p> <p>4.有23%的學生選擇④(低分組有34%)，這些學生可能不具備分數與小數互換及比較大小的能力；他們可能已具備比較小數大小的能力，但是無法將<math>\frac{14}{5}</math>轉換成小數，因此只比較1.99、2.3和2.5的大小，得到2.5最大的答案。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	3-n-11 能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。

## (一)錯誤類型的可能原因

1. 學生無法將分數轉換成小數，或小數轉換成分數。
2. 學生可能無法比較小數的大小。
3. 學生可能無法比較分數的大小。

## (二)核心概念與本題的教學重點

1. 等值分數是約分、擴分和通分的前置經驗，以及異分母分數加減的基礎，教學上稱 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{4}$ 為等值分數，而不稱它們是相等的分數，表示它們是不同的兩個分數，只是等值(量一樣多)。

以 $\frac{1}{2}$ 條繩子和 $\frac{2}{4}$ 條繩子為例， $\frac{1}{2}$ 條繩子是將1條繩子平分成2段後其中1段的名字， $\frac{2}{4}$ 條繩子是將1條繩子平分成4段後其中2段的名字， $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條的分割和合成的方式都不相同，因此以 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條是兩個不同的分數。但是 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條繩子的長度相同，數學上稱長度相同的 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條繩子為等值分數，將 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條繩子長度相同的結果記成 $\frac{1}{2}$ 條 $=$  $\frac{2}{4}$ 條。

建議教師先引入「 $\frac{1}{2}$ 條 $=$  $\frac{2}{4}$ 條」的記法，當學生掌握等值分數的意義後，才能將「 $\frac{1}{2}$ 條 $=$  $\frac{2}{4}$ 條」的記法簡記成「 $\frac{1}{2}$  $=$  $\frac{2}{4}$ 」。

2. 四年級等值分數的教學必須在具體情境中進行，例如「 $\frac{1}{2}$ 條繩子的長度和 $\frac{2}{4}$ 條繩子一樣長，可以記成 $\frac{1}{2}$ 條 $=$  $\frac{2}{4}$ 條」，或「 $\frac{2}{3}$ 張色紙的面積和 $\frac{4}{6}$ 張色紙一樣大，可以記成 $\frac{2}{3}$ 張 $=$  $\frac{4}{6}$ 張」，或「 $\frac{2}{5}$ 包水餃和 $\frac{4}{10}$ 包水餃的個數一樣多，可以記成 $\frac{2}{5}$ 包 $=$  $\frac{4}{10}$ 包」。

3. 「進行簡單異分母分數的大小比較與加減」中的「簡單異分母分數」，指的是一分母為另一分母之倍數。

4. 以「比較 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{3}{4}$ 條誰比誰長？」為例，教師應在長度情境中，先找出 $\frac{1}{2}$ 條和 $\frac{2}{4}$ 條一樣長，再比較出 $\frac{3}{4}$ 條比 $\frac{2}{4}$ 條長。最後才將 $\frac{3}{4}$ 條比 $\frac{2}{4}$ 條長的結果記成「 $\frac{3}{4}$ 條 $>$  $\frac{1}{2}$ 條」。

當學生掌握等值分數的意義後，才能將「 $\frac{3}{4}$ 條 $>$  $\frac{1}{2}$ 條」的記法簡記成「 $\frac{3}{4}$  $>$  $\frac{1}{2}$ 」。

5. 為「能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算」及「能用約分、擴分處理等值分數的換算」都是五年級的教材，因此四年級「簡單分數與小數的互

換」中的「簡單」，指的是只處理分母為2、5、10、100的情況。

題號	19		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。		
試題內容	19. 已知三角形的兩邊長分別是 5 公分和 15 公分。 下列何者可能是這個三角形的周長？ ① 30 公分 ② 35 公分 ③ 40 公分 ④ 45 公分		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.22	0.27	0.15
2*	0.46	0.25	0.67
3	0.16	0.25	0.07
4	0.16	0.22	0.10
未作答	0.01		
通過率	0.46	鑑別度	0.43
試題品質分析			
1.本題鑑別度為0.43，正確答案為選項②，通過率為46%，顯示近五成的學生已具備利用三角形任意兩邊和大於第三邊性質解題的能力。 2.有22%的學生選擇①(低分組有27%)，這些學生可能尚未理解三角形任意兩邊和大於第三邊的性質，誤以為三角形中任意兩邊和等於第三邊亦可形成三角形，因此選擇此答案。學生可能的算法如下： $30 - (5 + 15) = 10$ ， $10 + 5 = 15$ 。 3.16%的學生選擇③(低分組有25%)，這些學生可能尚未理解三角形任意兩邊和大於第三邊的性質，誤以為三角形中任意兩邊和等於第三邊亦可形成三角形，因此選擇此答案。學生可能的算法如下： $40 - (5 + 15) = 20$ ， $5 + 15 = 20$ 。 4.有 16%的學生選擇④(低分組有 22%)，這些學生尚未理解三角形任意兩邊和大於第三邊的性質。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-12	5-n-10	5-n-11

	能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。	能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。	能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。
--	---------------------------------	-------------------------------------	---------------------------

### 補救教學建議

#### (一)錯誤類型的可能原因

- 1.以三角形三邊長是  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為例，學生可能誤解「三角形任意兩邊和大於第三邊」的意義，誤認為只要「 $a+b>c$ 、 $b+c>a$ 、 $a+c>b$ 」中有一組成立就可以圍成三角形，不知道必須三組都成立才可以圍成三角形。
- 2.可能學生上課操作的都是具體物(例如數棒)，但是評量時出現的都是數字，學生可能無法連結數棒長短和數字大小間的關係。

#### (二)核心概念與本題的教學重點

- 1.五年級學生應該已能掌握連接兩點的繩子，以直線為最短。教師可以利用這個性質，幫助學生理解三角形任意兩邊和大於第三邊。以三角形  $ABC$  為例，連接  $A$ 、 $B$  兩點的繩子，以線段  $AB$  為最短，所以  $AC+BC>AB$ ；連接  $A$ 、 $C$  兩點的繩子，以線段  $AC$  為最短，所以  $BC+AB>AC$ ；連接  $B$ 、 $C$  兩點的繩子，以線段  $BC$  為最短，所以  $AB+AC>BC$ ，也就是三角形任意兩邊和大於第三邊。
- 2.«三角形任兩邊的和的大於第三邊»與«三角形比較短的兩邊和大於最長邊»是等價的定義。假設三角形三邊的長度是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ， $a\geq b\geq c$ ，如果  $b+c>a$  成立，那麼  $a+b>c$ 、 $a+c>b$  一定也會成立。所以當«三角形比較短的兩邊和大於最長邊»成立時，«三角形任兩邊的和的大於第三邊»也會成立。  
建議教師教學時必須說明«三角形任兩邊的和的大於第三邊»的性質，但是在判斷是否能圍成三角形時，只要判斷«比較短的兩邊和是否大於最長邊»即可。學生只要掌握«比較短的兩邊和的大於最長邊»時，就能圍成三角形，就能發展出«比較短的三邊和的大於最長邊»時，就能圍成四邊形，以及«比較短的  $n-1$  邊和的大於最長邊»時，就能圍成  $n$  邊形的性質。
- 3.判斷給定的三線段是否能拼成三角形時，不必檢查任意兩邊和大於第三邊，只要檢查較短的兩邊和是否大於最長邊即可。  
如左下圖，較短的兩邊和的大於最長邊，因此可以圍成一個三角形。  
如右下圖，較短的兩邊和的小於最長邊，因此不可以圍成一個三角形。



題號	20		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。		
試題內容	<p>20. 日常生活中常聽到「奈米科技」，奈米和毫米一樣，都是長度的單位，1 毫米是千分之一米，也就是千分之一公尺，1 奈米是十億分之一米，也就是十億分之一公尺。</p> <p>頭髮的直徑大約是 40000 奈米，請問 40000 奈米和多少公尺一樣長？</p> <p>① 0.004 ② 0.0004 ③ 0.00004 ④ 0.000004</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.19	0.06
2	0.28	0.38	0.18
3*	0.32	0.19	0.50
4	0.26	0.24	0.25
未作答	0.01		
通過率	0.32	鑑別度	0.31
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.31，正確答案為選項③，通過率為32%，顯示超過三成的學生已認識多位小數並具備長度單位奈米和公尺化聚的能力。</p> <p>2.有13%的學生選擇①(低分組有19%)，這些學生可能不認識多位小數、也不具備長度單位奈米和公尺化聚的能力，他們可能不理解題意，受到題目中「千分之一公尺」敘述的影響，誤認為40000奈米就是千分之四公尺，所以選擇0.004這個答案。</p> <p>3.有28%的學生選擇②(低分組有38%)，這些學生可能不認識多位小數、也不具備長度單位奈米和公尺化聚的能力，他們可能不理解題意，將40000奈米化成公尺時，誤認為要在小數的萬分位標記4，所以得到0.0004這個答案。</p> <p>4.有 26%的學生選擇④(低分組有 24%)，這些學生可能不認識多位小數、也不具備長度單位奈米和公尺化聚的能力，它們可能以小數點為對稱中心，類比整數的命名方式：個位、十位、百位、千位、.....，將小數點後的各位值誤判為：個分位、十分位、百分位、千分位、.....，因此將十億分之一轉換成小數時，誤認為十億分之一=0.0000000001，所以 40000 奈米=0.000004 公尺。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。

### 補救教學建議

#### (一)錯誤類型的可能原因

1. 學生不理解小數位值命名的意義，「十分位」的「1」代表 $\frac{1}{10}$ 、「百分位」的「1」代表 $\frac{1}{100}$ 、……。
2. 學生可能以小數點為對稱中心，類比整數的命名方式：個位、十位、百位、千位、……，將小數點後的各位值誤判為：個分位、十分位、百分位、千分位、……。
3. 學生可能不認識多位小數、也不具備長度單位奈米和公尺化聚的能力。

#### (二)核心概念與本題的教學重點

1. 小數是整數十進位系統的延伸，在引入一位小數時，十分位的值必須是個位的 $\frac{1}{10}$ 倍，因此規定「 $0.1 = \frac{1}{10}$ 」。

在引入二位小數時，百分位的值必須是個位的 $\frac{1}{100}$ 倍，因此規定「 $0.01 = \frac{1}{100}$ 」。百分位位名的由來是「 $\frac{1}{100} = 0.01$ 」的關係。

相同的理由，千分位的值必須是個位的 $\frac{1}{1000}$ 倍，因此規定「 $0.001 = \frac{1}{1000}$ 」，以此類推。

2. 透過下列兩組數字，說明小數點的功能。

第一組數字：7.7      77.77      777.777

第二組數字：77.7      777.77      7777.777

就數字本身視覺的觀點，7.7 小數點的左邊及右邊各有一個7，77.77 小數點的左邊及右邊各有二個7，777.777 小數點的左邊及右邊各有三個7，因此以小數點為對稱中心時，第一組小數是左右對稱的。

但是就位值的觀點，第二組小數才是左右對稱的。當我們以個位的7為對稱中心，並忽略小數點時，左右兩邊的位值是對稱的，個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，十位的左邊是百位，十分位的右邊是百分位，百位的左邊是千位，百分位的右邊是千分位，十位及十分位，百位及百分位，千位及千分位分別對稱於個位。如下所示：

千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
		7	7.	7		
	7	7	7.	7	7	
7	7	7	7.	7	7	7

因為數字的單位是 1，而記幾個 1 的位置是個位，因此個位才是數字的對稱中心。個位的左邊是十位，個位的右邊是十分位，不會有個分位的位名，而小數點的功能是告訴我們個位在哪裡。

3. 教師宜透過「先比較整數部分，再比較小數部分」的方法，幫助學生比較多位小數的大小。先比較整數部分，再類比整數比較大小的經驗，進行小數部分的大小比較，依序比較十分位、百分位、千分位的數字。

下面以「12.5、5.21、5.2099 哪一個數最大？哪一個數最小？」為例，說明如何幫助學生解題。建議教師依下列步驟幫助學生解題：

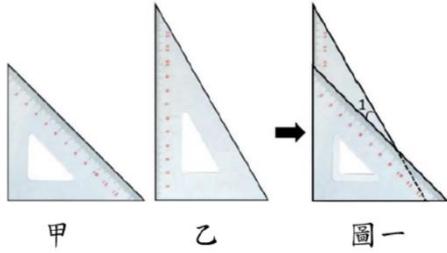
步驟一：先比較整數部分。「12.5」、「5.21」、「5.2099」整數部分的數字分別是 12、5、5，12 比 5 大，所以，「12.5」最大。

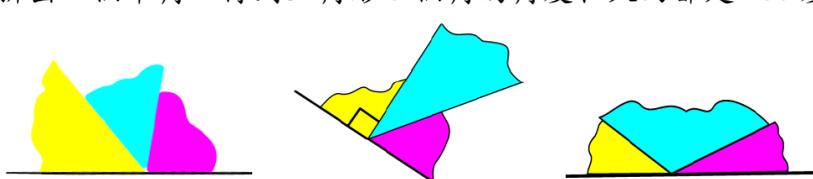
步驟二：再比較小數部分。「5.21」、「5.2099」整數部分的數字都是 5，所以依序比較十分位、百分位、千分位的數字。「5.21」、「5.2099」的十分位數字都是 2，表示有 2 個 0.1。「5.21」、「5.2099」的百分位數字分別是 1 和 0，分別表示 1 個 0.001 和 0 個 0.001，0 個比 1 個小，所以「5.2099」最小。

4. 以長度的單位為例，我國每十倍就會有一個單位的名稱，例如公里、公引、公尺、公尺、公寸、公分、公厘都是長度的單位；公制單位每十倍也會有一個單位的名稱，例如 km(千米)、hm(百米)、dam(十米)、m(米)、dm(分米)、cm(厘米)、mm(毫米)等都是長度的單位，但是日常生活中，並不需要用到這麼多的單位。

以公制長度的基本單位「米」為例，西方人認為 1000 以內的數量都是可以掌握的，因此 13 個「1 米」稱為 13 米即可，並不需要引入新的單位「十米」，將 13 米稱為 1「十米」3「米」；278 個「1 米」稱為 278 米即可，並不需要引入新的單位「百米」和「十米」，將 278 米稱為 2「百米」7「十米」8「米」。當「1 米」的個數超過 1000 個時，才需要引入新的單位「千米」，並將 2465 個「1 米」稱為 2「千米」465「米」。

公制單位是西方人發明的，延伸西方人三位一撇的概念，在長度單位中，經常使用的單位是「千米」、「米」、「毫米」、「微米」、「奈米」，其中「千米」是「米」的 1000 倍，「米」是「毫米」的 1000 倍、「毫米」是「微米」的 1000 倍、「微米」是「奈米」的 1000 倍，也就是說，經常使用的單位間都滿足 1000 倍的關係。轉換成我們熟悉的單位，日常生活中經常使用的長度單位是「公里」、「公尺」、「公分」、「公厘」，重量單位是「公噸」、「公斤」、「公克」，容量單位是「公秉」、「公升」、「公撮」，如果將公分拿走，相鄰兩個單位間都是 1000 倍的關係。換句話說，只要能掌握三位一撇的概念，再記憶公分和公尺、公分和公厘的倍數關係，就可以掌握國小階段長度、重量、容量相鄰單位間的倍數關係。

題號	21		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。		
試題內容	<p>21. 如圖，甲三角板三個角的角度是 45 度、45 度和 90 度，乙三角板三個角的角度是 30 度、60 度和 90 度。小明將這兩個三角板疊成圖一，請問圖一中角 1 的角度是多少度？</p>  <p>甲                  乙                  圖一</p> <p>① 5 ② 10 ③ 15 ④ 25</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.19	0.28	0.07
2	0.18	0.25	0.08
3*	0.54	0.30	0.80
4	0.09	0.16	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.54	鑑別度	0.50
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.50，正確答案為選項③，通過率為54%，顯示超過五成的學生已具備利用三角形內角和為180度解題的能力。</p> <p>2.有19%的學生選擇①(低分組有28%)、這些學生可能不具備利用三角形內角和為180度解題的能力。</p> <p>3.有18%的學生選擇②(低分組有25%)、這些學生可能不具備利用三角形內角和為180度解題的能力。</p> <p>4.有9%的學生選擇④(低分組有16%)，這些學生可能不具備利用三角形內角和為180度解題的能力。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年 細目	4-n-16 能認識角度單位「度」，並使用量角器實測角度或畫出指定的角度。(同 4-s-04)	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。	S-8-2 凸多邊形的內角和：凸多邊形的意義；內角與外角的意義；凸多邊形的內角和公式；正 n 邊形的每個內角度數。 備註：不處理多邊形外角和公式。
補救教學建議			
<p>(一)錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.學生可能不具備利用三角形內角和為 180 度解題的能力。</li> <li>2.學生可能無法從複雜圖形中察覺角 1 與給定角度間的關係。</li> <li>3.學生可能直觀的猜測角 1 的角度，或用量角器測量角 1 的角度。</li> </ol> <p>(二)核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.下面提供三種幫助學生理解三角形的內角和是 180 度的方法： <ul style="list-style-type: none"> <li>方法一：拿出或畫出很多不同的三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生測量出這些三角形的所有角，再分別算出這些三角形三個角的和。幫助學生察覺所有三角形三個角的角度和大約都是 180 度。</li> <li>方法二：拿出一些三角形(要包含直角、銳角及鈍角三角形三類)，要求學生剪下三角形的 3 個角，再將同一個三角形的 3 個角拼湊在一起，幫助學生察覺所有三角形的三個角都可以拼成一個平角，這些三角形 3 個角的角度和大約都是 180 度。</li> <li>方法三：教師也可以只剪下兩個角，再和沒有剪下的那個角拼湊在一起，也能夠拼出一個平角，得到三角形 3 個角的角度和大約都是 180 度。</li> </ul> </li> </ol> <div style="text-align: center;">  </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>2.教師應注意教學重點是所有三角形的內角和都是 180 度，教師不宜只求出某一個三角形的內角和是 180 度，就說明所有三角形的內角和都是 180 度。教師應幫助學生認識，直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形的內角和都是 180 度。</li> </ol>			

題號	22		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。		
試題內容	<p>22. 一桶果汁有 7 公升，老闆買了 5 桶果汁，用掉了 <math>\frac{1}{3}</math> 公升果汁，請問用掉了多少桶果汁？</p> <p>① <math>\frac{1}{3}</math></p> <p>② <math>\frac{1}{15}</math></p> <p>③ <math>\frac{1}{21}</math></p> <p>④ <math>\frac{1}{105}</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.18	0.13
2	0.36	0.41	0.30
3*	0.27	0.22	0.34
4	0.20	0.17	0.22
未作答	0.01		
通過率	0.27	鑑別度	0.12
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.12，正確答案為選項③，通過率為27%，顯示近三成的學生已具備利用除數為整數的分數除法解決生活中問題的能力。</p> <p>2.有 16%的學生選擇①(低分組有 18%)，這些學生可能不具備利用分數除以整數的分數除法解決生活中問題的能力，他們認為<math>\frac{1}{3}</math>公升就是<math>\frac{1}{3}</math>桶。</p> <p>3.有36%的學生選擇②(低分組有41%)，這些學生可能不具備利用分數除以整數的分數除法解決生活中問題的能力；他們也可能混淆桶及公升單位的意義。</p> <p>4.有20%的學生選擇④(低分組有17%)，這些學生可能不具備利用分數除以整數的分數除法解決生活中問題的能力；他們也可能混淆桶及公升單位的意義。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-07 理解分數之「整數相除」的意涵。	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

## 補救教學建議

### (一)錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不熟悉利用桶及公升兩個單位描述果汁的情境。
2. 學生可能混淆桶及公升兩個單位計數的意義，不知道1桶果汁7公升， $\frac{1}{3}$ 公升是1公升的 $\frac{1}{21}$ ，也就是1桶的 $\frac{1}{21}$ ，所以 $\frac{1}{3}$ 公升是 $\frac{1}{21}$ 桶。
3. 學生混淆桶及公升兩個單位計數的意義，隨意將題目中給定的數字相除。

### (二)核心概念與本題的教學重點

1. 整數除以整數的等分除問題為整數乘以分數問題的先備知識，以整數乘以分數的乘法問題「一瓶果汁有3公升， $\frac{2}{7}$ 瓶果汁是多少公升？」為例，學生必須透過先除「 $3 \div 7 = \frac{3}{7}$ 」再乘「 $\frac{3}{7} \times 2 = \frac{6}{7}$ 」兩個步驟，才能算出 $\frac{2}{7}$ 瓶果汁有 $\frac{6}{7}$ 公升；其中整數除以整數「 $3 \div 7 = \frac{3}{7}$ 」是本基本學習內容教學的重點。

2. 區分有餘數及沒有餘數問題的意義及記法：

有餘數問題的記法： $a \div b = q \dots r$ ， $q$ 是整數， $0 \leq r < b$ 。

沒有餘數問題的記法： $a \div b = \frac{a}{b}$ ， $b \neq 0$ 。

有餘數的等分除問題：13個蘋果平分給5個人，每人最多分到幾個？剩下幾個蘋果？

$$13 \div 5 = 2 \dots 3$$

答：每人最多分到2個，剩下3個蘋果。

沒有餘數的等分除問題：13個蘋果平分給5個人，全部分完，每人分到幾個蘋果？

$$13 \div 5 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

答：每人分到 $\frac{13}{5}$ (或 $2\frac{3}{5}$ )個蘋果。

有餘數的包含除問題：13公分長的繩子，5公分剪一段，最多可以剪幾段，剩下幾公分？

$$13 \div 5 = 2 \dots 3$$

答：最多可以剪成2段，剩下3公分。

沒有餘數的包含除問題：13公分長的繩子，5公分剪成一段，全部剪完，相當於剪成幾段？

$$13 \div 5 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

答：相當於剪成 $\frac{13}{5}$ (或 $2\frac{3}{5}$ )段。

下列問題的餘數是0，餘數是0的問題也屬於有餘數的問題：15個蘋果平分給5個人，每人最多分到幾個？剩下幾個蘋果？

$$15 \div 5 = 3 \dots 0$$

答：每人最多分到 3 個，剩下 0 個蘋果。

3. 以等分除問題「5 公升果汁，平分裝成 3 瓶，全部裝完，每瓶裝幾公升？」為例，可以有兩種解題的策略，第一種是回到整數除以整數，商數是整數，餘數是 0 的舊經驗；第二種是回到分數命名的舊經驗(每次拿 1 公升來分)，建議教師必須引入第二種解題策略，幫助學生擴展分數的意義。

下面分別說明這兩種解題策略。

第一種：回到整數除以整數，商數是整數，餘數是 0 的舊經驗

$$5 \text{ 公升} = \frac{15}{3} \text{ 公升} \text{ (15 個 } \frac{1}{3} \text{ 公升)}, 15 \div 3 = 5 \text{ (5 個 } \frac{1}{3} \text{ 公升)},$$

$$\text{答：每瓶裝 } \frac{5}{3} \text{ 公升}$$

第二種：回到分數命名的舊經驗(每次拿 1 公升來分)

$$1 \div 3 = \frac{1}{3} \text{ (1 公升果汁平分成 3 份，其中的 1 份是 } \frac{1}{3} \text{ 公升)}$$

$$5 \text{ 公升是 5 個 1 公升} \Rightarrow \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3} \text{ (公升)}, \text{ 答：每瓶裝 } \frac{5}{3} \text{ 公升}$$

當學生有一些解題成功的經驗後，應要求學生用沒有餘數的除法算式「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」

把問題和答案記下來，並說明以後再遇到這個問題時，可以直接利用整數除以整

數的算式「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」算出答案。

題號	23		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。		
試題內容	<p>23. 下面是一條數線，( ) 內要填入哪個數？</p>  <p>① <math>\frac{3}{4}</math></p> <p>② <math>\frac{5}{8}</math></p> <p>③ <math>\frac{5}{10}</math></p> <p>④ <math>\frac{5}{12}</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.46	0.64	0.22
2	0.19	0.16	0.18
3	0.09	0.11	0.08
4*	0.25	0.08	0.51
未作答	0.01		
通過率	0.25	鑑別度	0.42
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為 0.46，正確答案為選項④，通過率為 26%，顯示近三成的學生已掌握分數數線的意義。</p> <p>2.有 45%的學生選擇①(低分組有 65%)，這些學生可能無法掌握分數數線的意義；也可能不知道數線的單位都是 1，無法將單位 1 進行兩次的分割，他們直接以 <math>\frac{1}{4}</math> 為單位計數 3 格，得到 <math>\frac{3}{4}</math> 的答案。</p> <p>3.有 18%的學生選擇②(低分組有 16%)，這些學生可能無法掌握分數數線的意義；也可能不知道數線的單位都是 1，無法將單位 1 進行兩次的分割，他們以 0 到 <math>\frac{1}{4}</math> 中間的 2 個點來進行分割，得到一份是 <math>\frac{1}{8}</math>，從頭開始數，得到 <math>\frac{5}{8}</math> 的答案。</p> <p>4.有 9%的學生選擇③(低分組有 10%)，這些學生可能無法掌握分數數線的意義；也可能不知道數線的單位都是 1，無法將單位 1 進行兩次的分割，他們直接以 <math>\frac{1}{10}</math> 為單位計數 5 格，得到 <math>\frac{5}{10}</math> 的答案。</p>			

### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-10 能將簡單分數標記在數線上。	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。	N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a-b $ 表示數線上兩點 a,b 的距離。 備註：絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。

### 補救教學建議

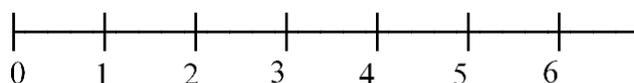
#### (一)錯誤類型的可能原因

1. 學生可能無法掌握分數數線的意義。
2. 學生可能不知道數線的單位都是 1，無法將單位 1 進行兩次的分割
3. 學生可能無法進行數線上刻度  $\frac{1}{4}$  和長度  $\frac{1}{4}$  的轉換，例如在數線上點的坐標是  $\frac{1}{4}$ ，該點和原點 0 的距離是  $\frac{1}{4}$ 。

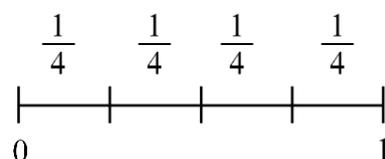
#### (二)核心概念與本題的教學重點

1. 教師可以透過下列方法繪製分數數線，幫助學生認識分數數線：

步驟一：先復習整數數線的意義，幫助學生標示出整數數線 0、1、2、...

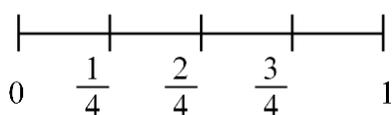


步驟二：先建立 0 和 1 間的分數數線。0 和 1 兩點間的距離是 1，將 1 平分成 4 份，其中的 1 份長  $\frac{1}{4}$ ，在數線標示每一份的長是  $\frac{1}{4}$ 。



步驟三：透過和 0 的距離是多少的想法，標示出數線上的分數。

數線上的  $\frac{1}{4}$  指的是  $\frac{1}{4}$  和 0 的距離是  $\frac{1}{4}$ ， $\frac{2}{4}$  指的是  $\frac{2}{4}$  和 0 的距離是 2 個  $\frac{1}{4}$ ，也就是  $\frac{2}{4}$ ， $\frac{3}{4}$  指的是  $\frac{3}{4}$  和 0 的距離是 3 個  $\frac{1}{4}$ ，也就是  $\frac{3}{4}$ 。

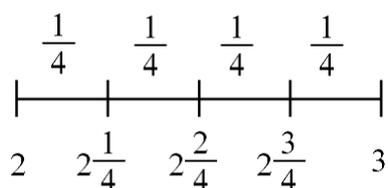


步驟四：仿前面建立 0 和 1 間分數數線的步驟，建立其它的分數數線。

下面以建立 2 和 3 之間的分數數線為例說明：

先標示整數數線 0、1、2、3、...

數線上的  $2\frac{1}{4}$  指的是  $2\frac{1}{4}$  和 2 的距離是  $\frac{1}{4}$ ， $2\frac{2}{4}$  指的是  $2\frac{2}{4}$  和 2 的距離是  $\frac{2}{4}$ ， $2\frac{3}{4}$  指的是  $2\frac{3}{4}$  和 2 的距離是  $\frac{3}{4}$ 。



步驟五：幫助學生建立其它的分數數線。教師應幫助學生認識帶分數的整數部分相當於數線上的整數。數線是國中學習直角坐標的先備知識，也是統整所有數系及幾何的重要基礎，教師應多提供學生利用數線解題的經驗。

2. 提供下面解本題的說明給教師們參考：

(1) 數線的單位長度都是 1，看到刻度  $\frac{1}{4}$  時，必須想到單位長 1 已經被分割成 4 大格。

(2) 看到刻度 0 到刻度  $\frac{1}{4}$  間又被等分成 3 小格，必須想到單位長 1 先被平分成 4 大格，每 1 大格又被平分成 3 小格，所以單位長 1 被平分成 12 小格。

(3) 單位長 1 被平分成 12 小格，所以每一小格的長度都是  $\frac{1}{12}$ 。

(4) 可以得到( )內要填入  $\frac{5}{12}$ 。

題號	24		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。		
試題內容	<p>24. 「甲、乙、丙三人一同出遊，每人先交 1000 元，約定共同分攤旅遊花費。旅遊時花了交通及門票共 960 元，飲食及雜支共 1500 元，請問每人可以退多少元？」下列哪個算式能算出正確的答案？</p> <p>① <math>1000 - (960 + 1500) \div 3</math></p> <p>② <math>1000 \times 3 - (960 + 1500)</math></p> <p>③ <math>(1000 + 960 + 1500) \div 3</math></p> <p>④ <math>(1000 \times 3 - 960 + 1500) \div 3</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.27	0.22	0.34
2	0.26	0.29	0.20
3	0.13	0.22	0.05
4	0.33	0.25	0.39
未作答	0.02		
通過率	0.27	鑑別度	0.11
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.11，正確答案為選項①，通過率為27%，顯示近三成的學生已具備多步驟平均問題列式的能力。</p> <p>2.有26%的學生選擇②(低分組有29%)，這些學生可能不具備多步驟平均問題列式的能力，他們沒有注意到題目問的是「每人可以退多少元？」，直接計算出總結餘的錢數。</p> <p>3.有13%的學生選擇③(低分組有22%)，這些學生可能不具備多步驟平均問題列式的能力；這些學生也可能不理解題意，直接將題目中的三個數進行相加求平均。</p> <p>4.有33%的學生選擇④(低分組有25%)，這些學生可能已具備多步驟平均問題列式的能力，用三人總金額扣除他們所有花費(960+1500)後再均分成3份，但算式中少了括弧。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-05 能做整數四則混合計算(兩步驟)。	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。

**(一)錯誤類型的可能原因**

1. 學生可能不具備多步驟平均問題列式的能力。
2. 本題的答案可能不是學生熟悉的解題方式，學生熟悉的列式是「 $(1000 \times 3 - 960 - 1500) \div 3$ 」，題目中沒有該選項。

**(二)核心概念與本題的教學重點**

1. 整數兩步驟問題引入的順序包含三個部分：

第一部分：用兩個算式記錄解題活動

二年級引入「加、減」及「加(減)、乘」兩步驟問題；

三年級引入「加(減)、除」及「連乘」兩步驟問題；

四年級引入「乘、除」及「連除」兩步驟問題。

第二部分：將兩個算式改記成一個併式，再用一個併式記錄解題活動。

第三部分：先列式，再用逐次減項的記法記錄解題過程。

第二及第三部分是四年級教學的重點。

2. 整數三步驟問題引入的順序包含兩個部分：

第一部分：用兩個算式(其中一個是併式)記錄解題活動

第二部分：將兩個算式(其中一個是併式)改記成一個併式，再用一個併式記錄解題活動。

第三部分：先列式，再用逐次減項的記法記錄解題過程。

3. 建議教師幫助學生用併式列出三步驟問題的算式，並利用逐次減項的記法記錄解題活動。

下面以「小洋原本有 100 元，買了 2 個 25 元的麵包後，爸爸又給他 48 元，請問小洋現在有多少元？」為例，說明三步驟問題的教學流程。

- (1) 用一個併式及一個算式記錄解題活動  $100 - 25 \times 2 = 50$ ， $50 + 48 = 98$ ，

答：現在有 98 元。

- (2) 將一個併式及一個算式改記成併式的記法將「 $100 - 25 \times 2 = 50$ ， $50 + 48 = 98$ 」改記成「 $100 - 25 \times 2 + 48 = 98$ 」。

- (3) 用併式記錄解題活動  $100 - 25 \times 2 + 48 = 98$ ，答：現在有 98 元。

- (4) 用算式填充題來列式  $100 - 25 \times 2 + 48 = ( )$ 。

- (5) 先列式，再用逐次減項的記法記錄解題活動  $100 - 25 \times 2 + 48 = ( )$

$100 - 25 \times 2 + 48 = 100 - 50 + 48 = 50 + 48 = 98$ ，答：現在有 98 元。

4. 以逐次減項的記法「 $5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10 = 100 - 10 = 90$ 」為例，

逐次減項是以下解題過程的摘要記法：

$$5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10,$$

$$5 \times 20 - 10 = 100 - 10,$$

$$100 - 10 = 90$$

因為等號滿足遞移性( $A = B$ ， $B = C$ ， $C = D$ ，所以  $A = D$ )，

所以  $5 \times (12 + 8) - 10 = 90$  逐次減項記法中除了把重複出現的算式「 $5 \times 20 - 10$ 」

和「 $100-10$ 」只記一次之外，還把解題過程最重要的部分「因為等號滿足遞移性，所以  $5 \times (12+8) - 10 = 90$ 」也省略了。教師可以透過詢問為什麼

「 $5 \times (12+8) - 10$ 」的答案是 90，檢查學生是否掌握利用等號遞移性記錄的意義。

5. 學生面對沒有見過的多步驟問題時，只能用多個算式來記錄解題活動，學生解題成功後，教師應要求學生將多個算式改記成併式。以後再遇到相同的問題時，應要求學生先用併式來列式，再利用逐次減項的記法記錄解題活動。儘量要求學生以併式的方法思考與演算，這是代數列式的前置經驗。

題號	25		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	5-n-04 能理解因數和倍數。		
試題內容	<p>25. 下面是甲、乙、丙、丁四人關於因數與倍數的說法。</p> <p>甲說：48 最小的因數是 2 。</p> <p>乙說：48 最大的因數是 48 。</p> <p>丙說：48 最小的倍數是 1 。</p> <p>丁說：48 最大的倍數是 48 。</p> <p>哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有乙正確</p> <p>② 只有甲、乙正確</p> <p>③ 只有丙、丁正確</p> <p>④ 甲、乙、丙、丁都正確</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.48	0.19	0.78
2	0.22	0.30	0.12
3	0.15	0.26	0.05
4	0.13	0.23	0.03
未作答	0.02		
通過率	0.48	鑑別度	0.60
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.60，正確答案為選項①，通過率為48%，顯示近五成的學生已理解因數和倍數的意義。</p> <p>2.有22%的學生選擇②(低分組有30%)，這些學生可能不理解因數和倍數的意義，他們知道48最大的因數是48，但是誤以為48最小的因數是2。</p> <p>3.有15%的學生選擇③(低分組有26%)，這些學生可能不理解因數和倍數的意義，他們可能受到關鍵字大和小的影響，或混淆因數和倍數的意義，誤認為48最小的倍數是1，48最大的倍數是48。</p> <p>4.有 13%的學生選擇④(低分組有 23%)，這些學生可能不理解因數和倍數的意義。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	2-n-08 能理解九九乘法。	5-n-04 能理解因數和倍數。	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。

## (一)錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不理解因數和倍數的意義。
2. 學生可能受到關鍵字大和小的影響，誤認為最大公因數比較大，最小公倍數比較小。

## (二)核心概念與本題的教學重點

1. 多數國小五年級學生已經掌握整數情境的乘除互逆，因此教師可以透過乘法算式「 $5 \times 8 = 40$ ，5、8 以及 40 都是整數」，幫助學生認識 5 是 40 的因數，也可以透過除法算式「 $40 \div 5 = 8 \dots 0$ ，40、5 以及 8 都是整數」，幫助學生認識 5 是 40 的因數。

國小五年級引入因數問題時，給定的數字多在九九乘法的範圍，因此部分教師喜歡透過乘法算式幫助學生認識因數。建議教師必須提供學生利用除法判斷因數的解題經驗，因為當數字變大時，無法直接利用乘法算式找出因數，以「23 是否為 12581 的因數」為例，學生不易透過乘法算式「 $23 \times (\quad) = 12581$ 」來判斷，必須透過除法算式「 $12581 \div 23$ 」來判斷。

2. 以「求 60 的因數和倍數」為例，五年級的教學重點是看著數字 60 找出 60 的因數及倍數，六年級的教學重點是看著 60 質因數分解的算式  $2 \times 2 \times 3 \times 5$  找出 60 的因數及倍數。本基本學習內容限制五年級只能透過嘗試錯誤的方式，尋找兩數的公因數和最大公因數，以及公倍數和最小公倍數。

教師不宜引入短除法求最大公因數及最小公倍數的方法，利用短除法求最大公因數及最小公倍數是六年級的教學重點。

3. 利用嘗試錯誤找出一數所有的因數，或找出兩數的公因數或最大公因數，學生必須進行很多次的乘除計算，要花很多的時間，而且到六年級時，會引入比較有效率的解題策略，例如質因數分解法或短除法。建議教師只要讓學生有一些解題的經驗即可，不必要求學生熟練，也不宜過度評量。

4. 區分「倍數」與「幾倍」的意義。

學生可能混淆「倍數」與「幾倍」的意義，誤認為 2 是 0.1 的倍數。

正確的說法是：2 不是 0.1 的倍數，但 2 是 0.1 的 20 倍。

- (1) 倍數的意義：

數學上只在整數的情境討論因數與倍數，因此，不論透過乘法  $b = a \times q$  或除法  $b \div a = q \dots 0$ ，判斷 a 是否為 b 的因數時，a、b 和 q 都必須是整數。0.1 不是整數，因此 0.1 不是 2 的因數，2 也不是 0.1 的倍數。

- (2) 幾倍的意義：

a 是 b 的  $\frac{a}{b}$  倍，指的是將 b 視為基準量 1 時，比較量 a 是  $\frac{a}{b}$ 。

將 0.1 視為基準量 1，比較量 2 是 20 個 0.1，因此 2 是 0.1 的 20 倍。

## 捌、六年級試題選項分析與教學建議

題號	1		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。		
試題內容	<p>下面是小明利用短除法計算 90 和 72 最小公倍數的過程。</p> $  \begin{array}{r}  2 \overline{) 90 \quad 72} \\  \underline{18 \quad 36} \\  B \overline{) A \quad 36} \\  \underline{D \quad 15 \quad C} \\  \quad 5 \quad E  \end{array}  $ <p>請問下列敘述何者<u>錯誤</u>？</p> <p>① <math>B \times C = 36</math></p> <p>② <math>B \times D \times 5 = A</math></p> <p>③ <math>2 \times B \times D \times 5 = 90</math></p> <p>④ <math>2 \times B \times D \times 5 \times E = 90 \times 72</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.19	0.03
2	0.12	0.22	0.04
3	0.09	0.17	0.02
4*	0.69	0.42	0.91
未作答	0.00		
通過率	0.69	鑑別度	0.49
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.49，正確答案為選項④，通過率為69%，顯示近七成的學生已理解利用短除法求兩數最小公倍數計算過程的意義。</p> <p>2. 有10%的學生選擇①(低分組有19%)，這些學生可能不理解利用短除法求兩數最小公倍數計算過程的意義；也可能誤解題意，選擇正確的敘述。</p> <p>3. 有12%的學生選擇②(低分組有22%)，這些學生可能不理解利用短除法求兩數最小公倍數計算過程的意義。</p> <p>4. 有9%的學生選擇③(低分組有17%)，這些學生可能不理解利用短除法求兩數最小公倍數計算過程的意義。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。	N-7-2 質因數分解的標準分解式；質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能只知道利用短除法求兩數最小公倍數的計算過程，但是不理解利用短除法求兩數最小公倍數計算過程的意義。</li> <li>2. 用短除法求兩數最小公倍數的計算過程中含有未知數，學生可能無法掌握未知數的意義。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 建議教師幫助學生利用短除法求兩數的最大公因數時，質因數都要小於 20，被分解數要小於 100。</li> <li>2. 建議教師只處理二個整數最大公因數的問題，不處理三個整數(以上)最大公因數的問題。</li> <li>3. 建議教師先引入質因數分解法求兩數的最大公因數，再透過質因數分解法，引入短除法求兩數的最大公因數。教師不宜直接引入短除法求兩數的最大公因數。</li> <li>4. 以「找出 18 和 24 的最大公因數」為例，說明如何利用短除法求兩數的最大公因數。            步驟一：複習質因數分解法求兩數的最大公因數，18 和 24 的最大公因數 <math>2 \times 3</math> 是共同質因數的乘積。            步驟二：2 是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 2，得到 <math>18 = 2 \times 9</math>，<math>24 = 2 \times 12</math>。            步驟三：<math display="block">\begin{array}{r l} 2 &amp; 18 \quad 24 \\ \hline 3 &amp; 9 \quad 12 \\ &amp; 3 \quad 4 \end{array}</math>            3 也是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 3，得到 <math>18 = (2 \times 3) \times 3</math>，<math>24 = (2 \times 3) \times 4</math>。            步驟四：3 和 4 互質，沒有共同的質因數。            步驟五：共同質因數的乘積是 <math>2 \times 3</math>，<math>2 \times 3</math> 是 18 和 24 的最大公因數。</li> <li>5. 以「找出 18 和 24 的最小公倍數」為例，說明如何利用短除法求兩數的最小公倍數。            步驟一：複習質因數分解法求兩數的最小公倍數，18 和 24 的最小公倍數「<math>2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3</math>」是「共同質因數乘積 <math>2 \times 3</math>」和「剩下質因數乘積 <math>2 \times 2 \times 3</math>」的乘積。</li> </ol>			

步驟二：
$$\begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline & 9 & 12 \end{array}$$

2 是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 2，得到  $18=2\times 9$ ， $24=2\times 12$ 。

步驟三：
$$\begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline 3 & 9 & 12 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

3 也是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 3，  
得到  $18=(2\times 3)\times 3$ ， $24=(2\times 3)\times 4$

步驟四：3 和 4 互質，沒有共同的質因數。

步驟五：幫助學生認識下面的 4 可以質因數分解成  $2\times 2$ 。

「共同質因數的乘積  $2\times 3$ 」，是短除法左邊兩個質因數的乘積。

「剩下質因數乘積  $3\times 2\times 2=3\times 4$ 」，是短除法下面兩數的乘積。

步驟六：最小公倍數是「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積，只要將左邊的質因數 2、3，和下面的數字 3、4 相乘，就能得到最小公倍數  $= (2\times 3)\times (3\times 4)$ 。

6. 應幫助學生理解公因數是最大公因數的因數，公倍數是最小公倍數的倍數。

利用短除法解題時，只能求出最大公因數，無法求出所有的公因數。

利用短除法解題時，只能求出最小公倍數，無法求出其它的公倍數。

題號	2																										
內容領域	代數	認知歷程向度	解題思考																								
學習內容	6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13)																										
試題內容	<p>2. 火車站有 120 個寄物櫃，下圖是火車站寄物櫃號碼的排列方式。</p> <table border="1" style="margin-left: 40px;"> <tr> <td>第一層 →</td> <td>1</td> <td>5</td> <td>9</td> <td>13</td> <td>……</td> </tr> <tr> <td>第二層 →</td> <td>2</td> <td>6</td> <td>10</td> <td>14</td> <td>……</td> </tr> <tr> <td>第三層 →</td> <td>3</td> <td>7</td> <td>11</td> <td>15</td> <td>……</td> </tr> <tr> <td>第四層 →</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>12</td> <td>16</td> <td>……</td> </tr> </table> <p>請問寄物櫃第 95 號在哪一層？</p> <p>① 第一層 ② 第二層 ③ 第三層 ④ 第四層</p>			第一層 →	1	5	9	13	……	第二層 →	2	6	10	14	……	第三層 →	3	7	11	15	……	第四層 →	4	8	12	16	……
第一層 →	1	5	9	13	……																						
第二層 →	2	6	10	14	……																						
第三層 →	3	7	11	15	……																						
第四層 →	4	8	12	16	……																						
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)																										
選項	整體	低分組	高分組																								
1	0.12	0.19	0.04																								
2	0.07	0.14	0.02																								
3*	0.76	0.57	0.92																								
4	0.05	0.10	0.02																								
未作答	0.00																										
通過率	0.76	鑑別度	0.35																								
試題品質分析																											
<p>1. 本題鑑別度為0.35，正確答案為選項③，通過率為76%，顯示近八成的學生已具備利用常用數量關係解題的能力。</p> <p>2. 有12%的學生選擇①(低分組有19%)、這些學生可能尚未具備利用常用數量關係解題的能力；這些學生也可能認為5號置物櫃在第一層，所以95號置物櫃也在第一層。</p> <p>3. 有7%的學生選擇②(低分組有14%)、這些學生可能尚未具備利用常用數量關係解題的能力；這些學生也可能沒有發現4個圖形一循環的規律，無法利用除以4所得到的餘數來解題。。</p> <p>4. 有5%的學生選擇④(低分組有10%)，這些學生可能尚未具備利用常用數量關係解題的能力；這些學生也可能沒有發現4個圖形一循環的規律，無法利用除以4所得到的餘數來解題。</p>																											

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。	6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13)	A-7-2 一元一次方程式的意義；一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。

補救教學建議

(一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生無法將本題解讀成 4 個一循環的數字序列。
2. 學生看不到 4 個一循環的數字序列和數字除以 4 後餘數 0、1、2、3...間的對應關係，例如：5→餘數 1、6→餘數 2、7→餘數 3、8→餘數 0.....。
3. 學生可能發現 4 個數字一循環的規律，但是不知道為什麼可以利用除以 4 所得到的餘數來解題。例如：5→餘數 1、6→餘數 2、7→餘數 3、8→餘數 0，可以透過  $5-4=1$ ，也就是  $5\div 4=1...1$ ，知道數字 5 和數字 1，都會在同一層。

(二) 核心概念與本題的教學重點

1. 引導學生觀察下表中相鄰兩列數字的關係

第一層	1	5	9	13
第二層	2	6	10	14
第三層	3	7	11	15
第四層	4	8	12	16

2. 引導學生發現：

第一層	1	$-4$	5	$-4$	9	$-4$	13
第二層	2	$-4$	6	$-4$	10	$-4$	14
第三層	3	$-4$	7	$-4$	11	$-4$	15
第四層	4		8		12		16

$\boxed{13}-4-4-4=1$ ， $\boxed{9}-4-4=1$ ， $\boxed{5}-4=1$ ，數字 13、9、5、1 都會在同一層(第一層)。

$\boxed{14}-4-4-4=2$ ， $\boxed{10}-4-4=2$ ， $\boxed{6}-4=2$ ，數字 14、10、6、2 都會在同一層(第二層)。

$\boxed{15}-4-4-4=3$ ， $\boxed{11}-4-4=3$ ， $\boxed{7}-4=3$ ，數字 15、11、7、3 都會在同一層(第三層)。

$\boxed{16}-4-4-4=4$ ， $\boxed{12}-4-4=4$ ， $\boxed{8}-4=4$ ，數字 16、12、8、4 都會在同一層(第四層)。

以上的方法，可以用除法記錄下來。

$\boxed{13} \div 4 = 3 \dots 1$ ， $\boxed{9} \div 4 = 2 \dots 1$ ， $\boxed{5} \div 4 = 1 \dots 1$ ，數字 13、9、5、1 都會在同一層(第一層)。

$\boxed{14} \div 4 = 3 \dots 2$ ， $\boxed{10} \div 4 = 2 \dots 2$ ， $\boxed{6} \div 4 = 1 \dots 2$ ，數字 14、10、6、2 都會在同一層(第二層)。

$\boxed{15} \div 4 = 3 \dots 3$ ， $\boxed{11} \div 4 = 2 \dots 3$ ， $\boxed{7} \div 4 = 1 \dots 3$ ，數字 15、11、7、3 都會在同一層(第三層)。

$\boxed{16} - 4 - 4 - 4 = 4$ ， $\boxed{12} - 4 - 4 = 4$ ， $\boxed{8} - 4 = 0$ ， $\rightarrow$ 連減 4，剩下 4，還可以再減 4，結果會剩下 0，如下所示：

$\boxed{16} - 4 - 4 - 4 - 4 = 0$ ， $\boxed{12} - 4 - 4 - 4 = 0$ ， $\boxed{8} - 4 - 4 = 0$ ， $\boxed{4} - 4 = 0$ ，可以用除法記錄下來。

$\boxed{16} \div 4 = 4 \dots 0$ ， $\boxed{12} \div 4 = 3 \dots 0$ ， $\boxed{8} \div 4 = 2 \dots 0$ ， $\boxed{4} \div 4 = 1 \dots 0$

數字 16、12、8、4 都會在同一層(第四層)。

### 3. 解決週期排列的問題

運用  $n \div 4$  推算數字 95 在第幾層， $95 \div 4 = 23 \dots 3$ ，在第三層。

題號	3		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-n-03 能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。		
試題內容	<p>已知 <math>\frac{12}{a}</math> 為最簡分數，下列敘述何者<u>錯誤</u>？</p> <p>① <math>a</math> 一定是質數</p> <p>② <math>a</math> 不是 2 的倍數</p> <p>③ <math>a</math> 和 12 的最大公因數是 1</p> <p>④ <math>a</math> 和 12 的最小公倍數是 <math>12 \times a</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.50	0.26	0.78
2	0.10	0.18	0.04
3	0.15	0.24	0.04
4	0.25	0.31	0.14
未作答	0.00		
通過率	0.50	鑑別度	0.52
試題品質分析			
<p>1.本題鑑別度為0.52，正確答案為選項①，通過率為50%，顯示有五成的學生已掌握兩數互質及最簡分數的意義。</p> <p>2.有10%的學生選擇②(低分組有18%)，這些學生可能無法掌握兩數互質及最簡分數的意義；這些學生也可能混淆互質和質數的意義。</p> <p>3.有15%的學生選擇③(低分組有24%)，這些學生可能無法掌握兩數互質及最簡分數的意義。</p> <p>4.有25%的學生選擇④(低分組有31%)，這些學生可能不理解最簡分數的意義；這些學生也可能不理解當兩數互質時，兩數的最小公倍數是兩數的乘積。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解。	6-n-03 能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。	N-7-1 100以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不理解「質數」和「互質」的差異。
2. 學生可能不理解最簡分數中分子與分母必須互質的意義。
3. 學生可能不理解當兩數互質，則兩數的最小公倍數是兩數的乘積。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師應指導學生區分「質數」和「互質」的差異。

質數：質數討論的是一個數的性質，判斷該數是否滿足只有 1 和自己兩個因數的條件。

互質：互質討論的是 a、b 兩個數的關係，當 $(a, b)=1$ ，數學上稱 a 和 b 互質。

例如：1 不是質數，但是 $(1, 6)=1$ ，所以 1 和 6 互質。

2. 最簡分數是很多等值分數比較的結果，教師不宜透過直接宣告「一個分數的分子和分母互質，我們稱這個分數為最簡分數」的方式引入最簡分數。

教師應透過比較活動引入最簡分數，例如列出一些分子和分母都比 $\frac{18}{30}$ 小的等

值分數 $\frac{9}{15}$ 、 $\frac{6}{10}$ 、 $\frac{3}{5}$ ，說明這些分數中， $\frac{3}{5}$ 的分子和分母最小，稱 $\frac{3}{5}$ 為這些等值分數中的最簡分數，最後再說明可以利用分子和分母互質，判斷該分數是最簡分數。

3. 在進行過上述的學習過程後，以下以「將 $\frac{24}{18}$ 化為最簡分數」為例，說明如何幫助學生解題：

步驟一：先溝通最簡分數的意義：當一個分數的分子和分母互質時，我們稱該分數為最簡分數。

步驟二：復習互質的意義：兩整數除了 1 以外沒有其它的公因數，稱該兩數互質。

步驟三：幫助學生用短除法找出 18 和 24 的最大公因數

2	18	24	(先提出共同的質因數 2)
3	9	12	(再提出共同的質因數 3)
	3	4	(確認無法再提出共同的質因數了)

18 和 24 的最大公因數，就是將兩次所提出來的共同質因數(2 和 3)之乘積，也就是 $2 \times 3 = 6$ 。

步驟四：說明要求得最簡分數時，需要透過約分活動，將分子與分母同時除以兩數的最大公因數。

步驟五： $\frac{24}{18} = \frac{24 \div 6}{18 \div 6} = \frac{4}{3}$ ，得到 $\frac{24}{18}$ 的最簡分數是 $\frac{4}{3}$ 。

題號	4		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-a-01 能理解等量公理。		
試題內容	<p>已知「<math>3 \times y + 25 \times 999 = 99999</math>」，請問 <math>(3 \times y + 25 \times 999) \times 3 + 3 = ?</math></p> <p>① 25008 ② 100002 ③ 299997 ④ 300000</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.13	0.01
2	0.11	0.21	0.02
3	0.14	0.25	0.04
4*	0.68	0.40	0.93
未作答	0.00		
通過率	0.68	鑑別度	0.53
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.53，正確答案為選項④，通過率為68%，顯示近七成的學生已具備利用等量公理解題的能力。</p> <p>2. 有6%的學生選擇①(低分組有13%)，這些學生可能已具備利用等量公理解題的能力，但是誤解題意，直接算出等式中y的值。</p> <p>3. 有11%的學生選擇②(低分組有21%)，這些學生可能不具備利用等量公理解題的能力，無法將一個算式看成一個數來進行運算，他們沒有先將等號右邊的數字先乘以3再加3，而是直接加3算出答案。</p> <p>4. 有14%的學生選擇③(低分組有25%)，這些學生可能具備利用等量公理解題的能力，他們將等號右邊的數字乘以3為答案，沒有注意還要加3。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分 年 細 目	2-n-03 能用 $<$ 、 $=$ 與 $>$ 表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律。(同 2-a-01)	6-a-01 能理解等量公理。	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能無法將一個算式看成一個數來進行運算。
2. 學生可能不具備利用等量公理解題的能力。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 等量公理： $a, b, c$  三個數，若  $a=b$  則滿足  $a+c=b+c$ ； $a-c=b-c$ ； $a \times c=b \times c$ ； $a \div c=b \div c$  ( $c \neq 0$ )。
2. 教師可透過操作天平，幫助學生理解利用等量公理解題的意義，不宜透過數的運算公式來理解等量公理解題的意義。  
教師可以幫助學生將未知數  $x$  看成沙包、數字看成砝碼，透用操作天平，說明如何解決「 $x+5=8$ 」，並用多個等式記錄解題過程。
  - (1) 「 $x+5=8$ 」可以看成天平左邊有 1 個沙包和 5 個砝碼，天平右邊有 8 個砝碼，天平兩邊一樣重。
  - (2) 將天平兩邊同時拿走 5 個砝碼，天平兩邊還是一樣重，可以記成「 $x+5-5=8-5$ 」。
  - (3) 此時，天平左邊剩下 1 個沙包，天平右邊剩下 3 個砝碼，得到沙包和 3 個砝碼一樣重，也就是  $x=3$  的答案。
3. 本題兩種解題方式如下，建議教師能夠引導學生透過方法二進行簡化計算，以掌握本指標的精髓。

方法一： $99999 \times 3 + 3$   
 $= 299997 + 3$   
 $= 300000$

方法二： $99999 \times 3 + 3$   
 $= 99999 \times 3 + 1 \times 3$   
 $= (99999 + 1) \times 3$   
 $= 100000 \times 3$   
 $= 300000$

題號	5		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。		
試題內容	<p>5. 左邊是某飲料的舊包裝，右邊是新包裝。</p>  <p>已知新包裝額外免費贈送 20%，也就是新包裝比舊包裝多了 50c.c.，請問舊包裝的飲料有多少 c.c.？</p> <p>① 200 ② 250 ③ 300 ④ 350</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.22	0.33	0.10
2*	0.61	0.38	0.86
3	0.12	0.20	0.03
4	0.04	0.08	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.61	鑑別度	0.47
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.47，正確答案為選項②，通過率為61%，顯示超過六成的學生已具備利用比率解決生活中問題的能力。</p> <p>2. 有22%的學生選擇①(低分組有33%)，這些學生可能不具備利用比率解決生活中問題的能力；也可能混淆基準量和比較量的關係，他們誤認為<math>50 \div 20\%</math>求出來的是比較量，利用<math>250 - 50 = 200</math>，得到答案為200c.c.。</p> <p>3. 有12%的學生選擇③(低分組有20%)，這些學生可不具備利用比率解決生活中問題的能力；他們可能不知道<math>50 \div 20\%</math>商的意義，看到多了50c.c.，利用<math>250 + 50 = 300</math>，得到答案為300c.c.。</p> <p>4. 有4%的學生選擇④(低分組有8%)，這些學生可能不具備利用比率解決生活中問題的能力。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-07 能理解分數之「整數相除」的意涵。	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備利用比率解決生活中問題的能力。</li> <li>2. 學生可能混淆基準量、比較量和差異量之間的關係，不知道多出的 20% 指的是基準量或比較量的 20%。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 五年級引入比率，六年級引入比值，比率和比值的意義相同，都是用一個數表示兩量的關係，比率討論的是部分和全體的情境，限制以全體為基準量，部分為比較量，而比值討論是任意兩量的情境，可以選擇其中的一量為基準量，剩下的另一量為比較量。</li> <li>2. 五年級比率教學的重點是部分及全體的關係。            例如：「全班 20 人，男生有 12 人，將全班人數看成基準量 1，男生人數看成比較量，男生人數佔全班的 <math>\frac{3}{5}</math> (或 60%)」。            六年級比值的教學重點是基準量及比較量兩量間的關係。            例如：「甲的體重是 18 公斤，乙的體重是 30 公斤，將甲的體重看成基準量 1，乙的體重看成比較量，乙的體重是甲的 <math>\frac{5}{3}</math> 倍。</li> <li>3. 比率問題包含「比率未知」、「部分量未知」及「全部量未知」三類問題。因為「全部量未知」的問題涉及除數是分數的除法計算，因此五年級只處理「比率未知」及「部分量未知」的問題，等待六年級引入除數是分數的除法後，再處理「全部量未知」的問題。            下面以「全班有 25 人，女生有 10 人」為例，說明這三類問題的題型：            比率未知問題：全班有 25 人，女生有 10 人，女生佔全班的幾分之幾？            部分量未知問題：全班有 25 人，女生佔全班的 <math>\frac{2}{5}</math>，女生有多少人？            全部量未知問題：女生有 10 人，佔全班的 <math>\frac{2}{5}</math>，全班有多少人？</li> <li>4. 比率是比或比值的先備知識，教師可以幫助學生用兩量併置的想法來解釋比率問題。            例如全班有 20 人，男生有 12 人，男生人數佔全班的 60%，指的是當全班看成 100 人時，男生有 60 人；男生人數佔全班的 <math>\frac{3}{5}</math>，指的是將全班看成 1 份時，男生有 <math>\frac{3}{5}</math> 份，或將全班看成 1 時，男生有 <math>\frac{3}{5}</math>。            因為六年級才引入比或比值的記法，因此不能利用比或比值的記法來記錄比</li> </ol>			

率問題，例如：「男生人數：全班人數=12：20」或「男生人數：全班人數的比值為 $\frac{3}{5}$ 」。

5. 比率是部分與全體的關係，教師描述比率時應同時呈現部分與全體。以「出席率為80%」為例，教師應先說「出席人數和全班人數的比率為80%」，等待學生掌握其意義後，再說明「出席人數和全班人數的比率為80%」，可以簡稱為「出席率為80%」。

6. 「打八折」有兩種說法：

說法一：售價是定價的0.8倍

把定價當1，售價是0.8，售價 $\div$ 定價=0.8，售價=定價 $\times$ 0.8。

說法二：售價是定價的80%。

把定價當1，售價是 $\frac{80}{100}$ ，售價 $\div$ 定價= $\frac{80}{100}$ ，售價=定價 $\times$  $\frac{80}{100}$ ，

售價=定價 $\times$ 80%。

「20% off」是指把定價當作1時，售價比定價減少20%。為了與「20% off」教學一致性，建議教師採用說法二(售價是定價的80%)引入「打八折」。

7. 教師應幫助學生區分「打八折」和「打七五折」的意義，「打八折」指的是售價是定價的80%，「打七五折」指的是售價是定價的75%。建議教師教學時先說明「打七五折」指的是售價是定價的75%，再說明「打八折」指的是售價是定價的80%，簡稱為「打八折」。

8. 建議教師仿打折的方式，透過百分率說明加成的意義。

「加二成」指的是把成本當作1時，定價比成本多20%，

「加三成五」指的把成本當作1時，定價比成本多35%。

9. 本基本學習內容限制比率或百分率都不能大於1。

以「成本是100元，加二成五為定價，請問定價是多少元？」為例：

教師可以透過「 $100 \times 25\% = 25$ ， $25 + 100 = 125$ 」算出定價是125元；

但不宜透過「 $100\% + 25\% = 125\%$ ， $100 \times 125\% = 125$ 」算出定價是125元。

題號	6		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-a-03 能用符號表示常用的公式。		
試題內容	<p>6. 平行四邊形柱底面的底為 <math>A</math> 公分，高為 <math>B</math> 公分，平行四邊形柱的柱高為 <math>C</math> 公分，下列哪個算式能算出平行四邊形柱的體積是多少立方公分？</p> <p>① <math>(A + C) \times B</math></p> <p>② <math>A \times B \times C</math></p> <p>③ <math>A \times (B + C)</math></p> <p>④ <math>A \times B \div 2 \times C</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.05	0.12	0.00
2*	0.79	0.52	0.97
3	0.04	0.10	0.00
4	0.12	0.26	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.79	鑑別度	0.45
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.45，正確答案為選項②，通過率為79%，顯示近八成的學生已具備用符號表示常用公式的能力。</p> <p>2. 有5%的學生選擇①(低分組有12%)、這些學生可能不具備利用符號表示常用公式的能力；這些學生也可能不會計算平行四邊形柱的體積。</p> <p>3. 有4%的學生選擇③(低分組有10%)、這些學生可能不具備利用符號表示常用公式的能力；這些學生也可能不會計算平行四邊形柱的體積。</p> <p>4. 有12%的學生選擇④(低分組有26%)，這些學生可能不具備利用符號表示常用公式的能力；也可能會計算平行四邊形柱的體積，但是記錯求底面平行四邊形面積的公式。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-18 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-s-05)	6-a-03 能用符號表示常用的公式。	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用符號表示常用公式的能力。
2. 學生可能不會計算平行四邊形柱的體積。
3. 學生可能記錯平行四邊形面積的公式。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 本分年細目為周長、面積及體積公式之總結，幫助學生用符號表示常用的公式。
2. 能用符號表示常用公式中的符號，是變數的概念，不是未知數的概念。  
以用符號表示長方形面積公式為例，教師應提供學生一些求長方形面積的問題，例如可以用「 $3 \times 4$ 」算出長 3 公分、寬 4 公分的長方形面積，用「 $5 \times 6$ 」算出長 5 公分、寬 6 公分的長方形面積，...，幫助學生抽象出可以透過「長 $\times$ 寬」算出已知長邊和寬邊長度的長方形面積，並注意到長邊和寬邊的長度單位必須相同，例如當長邊和寬邊的長度單位是公分時，算出來面積的單位是平方公分。
3. 本分年細目教學重點是利用未知數符號來替代學生已學過的中文簡記式，讓學生理解用符號代表數的好處。

題號	7		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。		
試題內容	<p>7. 王叔叔以時速 3.6 公里的速率走路，大約走 20 分鐘可以到公司且剛好趕上 8 點整的打卡。今天晚了 5 分鐘出門，請問王叔叔必須以時速多少公里走路，才能剛好趕上 8 點整的打卡？</p> <p>① 2.88 ② 4 ③ 4.8 ④ 5.2</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.17	0.05
2	0.19	0.30	0.08
3*	0.58	0.34	0.84
4	0.10	0.17	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.58	鑑別度	0.49
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.49，正確答案為選項③，通過率為58%，顯示近六成的學生已具備利用速率概念解題的能力。</p> <p>2. 有12%的學生選擇①(低分組有17%)，這些學生可能不具備利用速率概念解題的能力，他們先利用<math>3.6 \div 5 = 0.72</math>，再用<math>3.6 - 0.72</math>得出2.88。</p> <p>3. 有19%的學生選擇②(低分組有30%)，這些學生可能不具備利用速率概念解題的能力，他們可能在時間換算上誤將20分鐘換算為<math>\frac{20}{100}</math>小時，求得距離為0.72km後，再用<math>3.6 \div 20</math>得到0.18，再進行兩數相除得出結果為4。</p> <p>4. 有10%的學生選擇④(低分組有17%)，這些學生可能不具備利用速率概念解題的能力。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用速率概念解題的能力。
2. 學生可能不具備時速幾公里和分速幾公里的換算能力。
3. 學生也可能不理解題意。
4. 學生可能無法掌握時間、距離、速率三者之間的關係。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 六年級只在等速的情境下討論平均速率(課綱使用速度，課本都使用速率的說法)。

2. 速度與速率是兩種不同的概念，速度是向量的概念，速率是純量的概念。

例如甲、乙兩地的距離是 100 公里，由甲地開車先到乙地，再由乙地開車回甲地，共花了 2 小時。

開車的距離是 200 公里，時間是 2 小時，我們說平均速率是 100 公里/小時；

開車的位移是 0 公里，時間是 2 小時，我們說平均速度為 0 公里/小時。

日常生活中常混用這兩個名詞，將速率與速度都稱之為速度。

本基本學習內容的速度，指的是日常生活中常用的一般名詞，也就是速率的意思。建議教師在教學時，儘量使用速率的說法。

3. 「平均 1 小時跑 60 公里」是日常生活中常見的說法，下面提供三種也可以溝通「平均 1 小時跑 60 公里」的方法。

方法一：60 公里：1 小時

方法二：60 公里/小時

方法三：時速 60 公里

方法一是利用比的記法來溝通速率，

方法二是利用比值的記法來溝通速率，

方法三是日常生活中常用的說法。

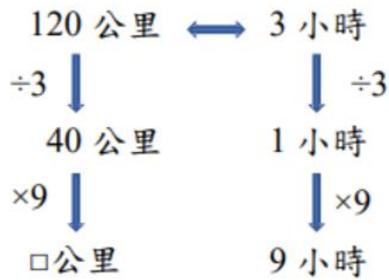
建議教師幫助學生熟練「時速 60 公里」、「速率 60 公里/小時」、

「60 公里：1 小時」這三種說法間的轉換，但在解題時，儘量利用比的方法來解題，因為比的記法較能夠看到時間和距離兩量的關係。

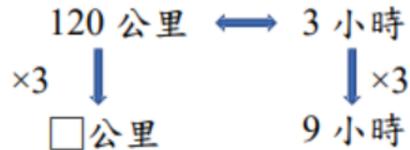
4. 以「甲車 3 小時跑 120 公里，9 小時跑多少公里？」為例，建議教師使用比的想法來解題。

- (1) 先用算式「120 公里：3 小時 = □ 公里：9 小時」來記錄問題，再利用關係式的記法，利用單價法或倍數法來解題。

單價法： $(120 \div 3) = 40$ ， $40 \times 9 = 360$ ，答：360 公里



倍數法： $3 \times 3 = 9$  (或  $9 \div 3 = 3$ )， $120 \times 3 = 360$ ，答：360 公里



- (2) 先用算式「120 公里：3 小時 = □ 公里：9 小時」來記錄問題，  
再利用「外項乘以外項等於內項乘以內項」來解題。

$$120 \times 9 = \square \times 3, \square = 360, \text{答：360 公里}$$

5. 當學生應該已經認識速率，並能解決生活中的問題。所以本基本學習內容接著幫助學生認識速率常用單位，並進行速率常用單位間的化聚。
6. 以「汽車的時速 90 公里，它的分速是多少公尺？」為例，學生比較無法掌握比值想法解決速率換單位問題解題的意義。

$$90 \frac{\text{公里}}{\text{小時}} = 90 \times \frac{1000 \text{ 公尺}}{60 \text{ 分鐘}} = 90 \times \frac{1000}{60} \frac{\text{公尺}}{\text{分鐘}} = 1500 \frac{\text{公尺}}{\text{分鐘}}$$

建議教師可以透過比的想法，來幫助學生解決時速、分速及秒速單位間的換算問題。

$$\begin{aligned} 90 \text{ 公里/小時} &= 90 \text{ 公里} : 1 \text{ 小時} \\ &= 90000 \text{ 公尺} : 60 \text{ 分鐘} \\ &= 90000 \text{ 公尺} \div 60 : 60 \text{ 分鐘} \div 60 \\ &= 1500 \text{ 公尺} : 1 \text{ 分鐘 (分速是 1500 公尺)} \end{aligned}$$

7. 教師在教學時，應先進行只有時間單位進行化聚或只有距離單位進行化聚的問題，例如  $60 \text{ 公里/小時} = ( ) \text{ 公尺/小時}$ ，或  $60 \text{ 公里/小時} = ( ) \text{ 公里/分鐘}$ 。

再引入時間單位和距離單位都進行化聚的問題，

例如  $60 \text{ 公里/小時} = ( ) \text{ 公尺/分鐘}$ ，但是不宜過度評量。

題號	8		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。		
試題內容	<p>8. 「<math>\frac{7}{5}</math> 公尺長的繩子相當於 <math>\frac{3}{8}</math> 條，請問 <math>\frac{4}{11}</math> 條繩子長多少公尺？」</p> <p>下列哪個算式可以算出正確答案？</p> <p>① <math>\frac{7}{5} \times \frac{3}{8} \times \frac{4}{11}</math></p> <p>② <math>\frac{7}{5} \times \frac{3}{8} \div \frac{4}{11}</math></p> <p>③ <math>\frac{7}{5} \div \frac{3}{8} \times \frac{4}{11}</math></p> <p>④ <math>\frac{7}{5} \div \frac{3}{8} \div \frac{4}{11}</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.22	0.05
2	0.15	0.27	0.04
3*	0.64	0.39	0.89
4	0.06	0.11	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.64	鑑別度	0.50
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.50，正確答案為選項③，通過率為64%，顯示超過六成的學生已具備分數兩步驟問題列式的能力。</p> <p>2. 有14%的學生選擇①(低分組有22%)，這些學生可能尚未具備分數乘除兩步驟問題列式的能力；這些學生也可能不理解「相當於」的語意。</p> <p>3. 有15%的學生選擇②(低分組有27%)，這些學生可能尚未具備分數乘除兩步驟問題列式的能力；這些學生也可能不理解「相當於」的語意。</p> <p>4. 有6%的學生選擇④(低分組有11%)，這些學生可能尚未具備分數乘除兩步驟問題列式的能力；這些學生也可能不理解「相當於」的語意。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。	6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。	A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不容易理解單位數不是整數的相當於問題。
2. 學生可能無法將本題的語意轉換成乘除的語意，再利用乘除運算來解題。
3. 「 $\frac{10}{3}$ 公尺長的繩子相當於 $\frac{3}{8}$ 條，1條長多少公尺？」不是除法的語意，學生不知道為何可以利用除法解題。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 二步驟問題的教學包含三個重點，第一個重點是能夠解決問題，並用二個算式記錄解題過程；第二個重點是能夠用併式記錄解題過程；第三個重點是能夠列式，並用逐次減項的記法記錄解題過程。
2. 以分數兩步驟問題「媽媽買了 $\frac{10}{3}$ 公升的果汁6瓶，全部分裝到 $\frac{5}{4}$ 公升的杯子裡，相當於裝滿幾杯？」為例，如果學生無法解題，建議教師先將原問題修改為整數情境的問題，  
例如修改為「媽媽買了10公升的果汁6瓶，全部分裝到5公升的瓶子裡，相當於裝滿幾瓶？」。待學生解題成功後，再回到原分數情境的問題，希望學生能類比整數情境的問題來解決相同情境分數的問題。
3. 下面以「甲有15元，乙有25元，1枝鉛筆賣5元，兩人合起來可以買幾枝？」為例，說明整數兩步驟問題的教學流程。

教師可以仿下面的教學流程，進行分數兩步驟問題的教學。

#### (1) 用兩個算式記錄解題活動

$$15 + 25 = 40, 40 \div 5 = 8, \text{答：可以買 8 枝}$$

#### (2) 將兩個算式改記成併式的記法

$$\text{將「} 15 + 25 = 40, 40 \div 5 = 8 \text{」改記成「} (15 + 25) \div 5 = 8 \text{」}$$

#### (3) 用併式記錄解題活動

$$(15 + 25) \div 5 = 8, \text{答：可以買 8 枝}$$

#### (4) 用算式填充題來列式

$$(15 + 25) \div 5 = ( \quad )$$

#### (5) 先列式，再用逐次減項記錄解題活動

$$(15 + 25) \div 5 = ( \quad )$$

$$(15 + 25) \div 5$$

$$= 40 \div 5$$

$$= 8$$

答：可以買 8 枝

#### 4. 以逐次減項的記法「 $5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10 = 100 - 10 = 90$ 」

為例，它是以下解題過程的摘要記法：

$$5 \times (12 + 8) - 10 = 5 \times 20 - 10, 5 \times 20 - 10 = 100 - 10, 100 - 10 = 90$$

因為等號滿足遞移性( $A=B, B=C, C=D$ ，所以 $A=C$ )，

$$\text{所以 } 5 \times (12 + 8) - 10 = 90$$

逐次減項記法中除了把重複出現的算式「 $5 \times 20 - 10$ 」和「 $100 - 10$ 」只記一次

之外，還把解題過程最重要的部分「因為等號滿足遞移性，所以 $5 \times (12 + 8) - 10 = 90$ 」也省略了。

教師可以透過詢問為什麼「 $5 \times (12 + 8) - 10$ 」的答案是90，檢查學生是否掌握利用等號遞移性記錄的意義。

5. 以「 $\frac{10}{3}$ 公尺長的繩子相當於 $\frac{3}{8}$ 條， $\frac{4}{11}$ 條長多少公尺？」為例，建議教師可透過下列步驟引導學生解題。

步驟一：透過分段布題，幫助學生解題先布「 $\frac{10}{3}$ 公尺長的繩子相當於 $\frac{3}{8}$ 條，1條長多少公尺？」，要求學生用算式 $\frac{10}{3} \div \frac{3}{8} = \frac{80}{9}$ 把做法記下來。

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{10}{3} \text{公尺} & \longleftrightarrow & \frac{3}{8} \text{條} \\
 \div \frac{3}{8} & \downarrow & \downarrow & \div \frac{3}{8} \\
 ? \text{公尺} & & 1 \text{條} \\
 \\ 
 \frac{10}{3} \div \frac{3}{8}
 \end{array}$$

步驟二：再布「1條繩子長 $\frac{80}{9}$ 公尺， $\frac{4}{11}$ 條長多少公尺？」要求學生用算式 $\frac{80}{9} \times \frac{4}{11} = \frac{320}{99}$ 把做法記下來。

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{80}{9} \text{公尺} & \longleftrightarrow & 1 \text{條} \\
 \times \frac{4}{11} & \downarrow & \downarrow & \times \frac{4}{11} \\
 ? \text{公尺} & & \frac{4}{11} \text{條} \\
 \\ 
 \frac{80}{9} \times \frac{4}{11}
 \end{array}$$

步驟三：回到原問題，要求學生先用兩個算式把作法記下來，

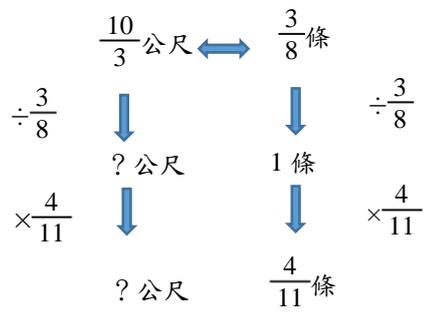
再改用併式 $\frac{10}{3} \div \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{320}{99}$ 記錄。

步驟四：要求學生用一個併式 $\frac{10}{3} \div \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{320}{99}$ 把做法記下來。

步驟五：要求學生先列式 $\frac{10}{3} \div \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = ( \quad )$ ，

再用逐次減項的記法記錄解題活動。

$$\frac{10}{3} \div \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{80}{9} \times \frac{4}{11} = \frac{320}{99}$$



題號	9		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解(質數 $<20$ ，質因數 $<20$ ，被分解數 $<100$ )。		
試題內容	<p>9. 下列關於質數和合數的敘述，哪個是正確的？</p> <p>① 兩個質數的和一定是偶數</p> <p>② 兩個質數相加一定是合數</p> <p>③ 最小的質數與最小的合數的和是 7</p> <p>④ 1、2、3、...、100，這 100 個數中的質數和合數共有 99 個</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.22	0.28	0.12
2	0.19	0.28	0.09
3	0.10	0.19	0.03
4*	0.49	0.24	0.76
未作答	0.00		
通過率	0.49	鑑別度	0.52
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.52，正確答案為選項④，通過率為49%，顯示近五成的學生已掌握質數和合數的意義。</p> <p>2. 有22%的學生選擇①(低分組有28%)，這些學生可能無法掌握質數和合數的意義；這些學生也可能混淆質數、合數和奇偶數的意義，誤認為質數一定是奇數，所以判定質數+質數=奇數+奇數=偶數；這些學生也可能誤認為合數一定是偶數，且質數+質數=合數，所以質數+質數=合數=偶數。</p> <p>3. 有19%的學生選擇②(低分組有28%)，這些學生可能無法掌握質數和合數的意義；這些學生也可能混淆質數、合數和奇偶數的意義，因為奇數+奇數=偶數，所以誤認為質數+質數=合數。</p> <p>4. 有10%的學生選擇③(低分組有19%)，這些學生可能尚未掌握質數和合數的意義，誤認為最小的質數是3，最小的合數是4，得到3+4=7的答案。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解(質數 $<20$ ，質因數 $<20$ ，被分解數 $<100$ )。	6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能無法掌握質數和合數的意義。
2. 學生可能混淆質數、合數和奇偶數的意義。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

教師可以透過分類的活動，將正整數區分成因數只有 1 個、因數只有 2 個、以及因數有 3 個或比 3 個多的數等三類，幫助學生區分 1、質數與合數。

例如列出 1~12 各數的所有因數，幫助學生認識：

因數只有 1 個的數：1

因數只有 2 個的數：2、3、5、7、11

因數有 3 個或比 3 個多的數：4、6、8、9、10、12

1. 2 的因數是 1 和 2；3 的因數是 1 和 3；5 的因數是 1 和 5，....。

因數只有 2 個的數，它們的因數都是 1 和本身，數學上稱這些數為質數。也可以說，除了 1 和自己之外，沒有其它因數的整數稱為質數。

2. 4 的因數除了 1 和 4 之外還有 2；6 的因數除了 1 和 6 之外還有 2 和 3；8 的因數除了 1 和 8 之外還有 2 和 4，....。

因數有 3 個或比 3 個多的數，它們的因數除了 1 和本身以外，還有其他的數，數學上稱這些數為合數。

3. 1 的因數只有 1 個，所以 1 不是質數也不是合數。

題號	10		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-17 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算。		
試題內容	<p>10. 標準的籃球場長 25 公尺，寬 15 公尺，請問面積是多少公畝？</p> <p>① 375</p> <p>② 37.5</p> <p>③ 3.75</p> <p>④ 0.375</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.34	0.04
2	0.11	0.16	0.06
3*	0.51	0.26	0.77
4	0.21	0.23	0.13
未作答	0.00		
通過率	0.51	鑑別度	0.52
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.52，正確答案為選項③，通過率為51%，顯示超過五成的學生已具備利用長方形面積公式解題及平方公尺聚成公畝的能力。</p> <p>2. 有17%的學生選擇①(低分組有34%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題能力，但是不具備平方公尺聚成公畝的能力，將算出的面積375平方公尺看成375公畝。</p> <p>3. 有11%的學生選擇②(低分組有16%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題能力，但是記錯公畝與平方公尺間的關係，誤以為1公畝=10平方公尺。</p> <p>4. 有21%的學生選擇④(低分組有23%)，這些學生可能已具備利用長方形面積公式解題能力，但是記錯公畝與平方公尺間的關係，誤以為1公畝=1000平方公尺。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-17 能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並做相關計算。	5-n-17 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算。	6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備將平方公尺聚成公畝的能力。
2. 學生可能混淆平方公尺和公畝的化聚關係，誤認為 1 公畝=10 平方公尺或 1 公畝=1000 平方公尺。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 本學習內容的教學重點是幫助學生認識較大的面積單位「公畝」、「公頃」及「平方公里」；進行「平方公尺、公畝」、「平方公尺、公頃」、「公畝、公頃」、「平方公尺、平方公里」單位間的化聚，以及進行「平方公尺、公畝」，「公畝、公頃」及「平方公尺、平方公里」單位複名數的加減及整數倍乘法計算。
2. 平方公里單位的引入，和平方公分及平方公尺單位引入的方式相同(見下表)，數學上稱邊長 1 公分正方形的面積是 1 平方公分，邊長 1 公尺正方形的面積是 1 平方公尺，相同的命名方式，邊長 1 公里正方形的面積是 1 平方公里。

正方形的邊長	1 公分	1 公尺	1 公里
正方形的面積	1 平方公分	1 平方公尺	1 平方公里

3. 平方公分、平方公尺和平方公里都是利用正方形的邊長引入，建議教師也透過正方形的邊長引入公頃和公畝。教師可以命名邊長 10 公尺正方形的面積為 1 公畝，邊長 100 公尺正方形的面積為 1 公頃(如下表)；再透過面積公式說明 1 公畝的面積為 100 平方公尺，1 公頃的面積為 10000 平方公尺。

正方形的邊長	1 公尺	10 公尺	100 公尺	1000 公尺
正方形的面積	1 平方公尺	1 公畝	1 公頃	1 平方公里
平方公尺之值	1	100	10000	1000000

4. 可以透過 1 公里=1000 公尺及正方形面積公式，說明邊長 1 公里的正方形面積是 1 平方公里， $1000 \times 1000 = 1000000$ ，邊長 1000 公尺正方形面積是 1000000 平方公尺，所以 1 平方公里=1000000 平方公尺。但是不宜過度評量平方公里和平方公尺雙向化聚的問題，例如：

「3 平方公里=( )平方公尺」或「3.5 平方公里=( )平方公尺」。

本基本學習內容討論小數的範圍不超過三位小數，

因此不引入「1 平方公尺= $\frac{1}{1000000}$  (或 0.000001) 平方公里」的問題。

題號	11		
內容領域	量與實測	認知歷程向度	解題思考
學習內容	5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。		
試題內容	<p>11. 如圖，有甲、乙兩個長方體容器，將甲容器裝滿水後，全部倒入空的乙容器中，乙容器水位的高度為 8 公分，請問乙容器底面的寬是幾公分？</p> <p>(單位：公分)</p> <p>① 25 ② 20 ③ 16 ④ 10</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.60	0.25	0.93
2	0.18	0.31	0.04
3	0.14	0.28	0.01
4	0.08	0.15	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.60	鑑別度	0.68
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.68，正確答案為選項①，通過率為60%，顯示有六成的學生已理解容量和體積間的關係。</p> <p>2. 有18%的學生選擇②(低分組有31%)，這些學生可能不理解容量和體積間的關係；這些學生也可能已理解題意，算出甲容器的體積後，忽略了乙容器的高，直接除以乙容器的底邊，但是在計算過程中粗心少了一個0，得出20的答案。</p> <p>3. 有14%的學生選擇③(低分組有28%)，這些學生可能不理解容量和體積間的關係；這些學生也可能不理解題意，直接將乙容器的寬當成甲容器的寬。</p> <p>4. 有8%的學生選擇④(低分組有15%)，這些學生可能不理解容量和體積間的關係，他們先算出甲容器的底面積，再除以乙容器的長後得到乙容器的寬。學生可能的計算過程如下：<math>(16 \times 20) \div 32 = 10</math></p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。	5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。	6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-s-05)
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不理解容量和體積間的關係。</li> <li>2. 學生可能無法進行立方公分和毫升單位間的互換。</li> <li>3. 學生可能無法掌握容量情境乘除互逆的關係。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 以玻璃杯為例，玻璃是固體，玻璃部分所佔的空間，稱為玻璃杯的體積；如果玻璃杯最多能裝 500 立方公分的水，我們稱玻璃杯的容量為 500 毫升；玻璃杯的容量是 500 毫升，指的是當它裝滿水時，水的體積是 500 立方公分。</li> <li>2. 「c.c.」是英文「cubic centimeter(立方公分)」的簡記，而立方公分是體積的單位，因此「c.c.」是體積的單位，ml(毫公升或毫升)才是容量的單位。</li> <li>3. 教師可以透過下列步驟，說明長 5 公分、寬 4 公分、高 3 公分長方體容器的容量是 60ml。 <ul style="list-style-type: none"> <li>步驟一：幫助學生理解長方體容器裝滿水時，容器內水的形狀是長 5 公分、寬 4 公分、高 3 公分長方體。</li> <li>步驟二：長方體體積 = <math>5 \times 4 \times 3 = 60</math>，得到水的體積是 60 立方公分。</li> <li>步驟三：長方體容器裝滿水時，水的體積是 60 立方公分，所以長方體容器的容量是 60ml。</li> </ul> </li> <li>4. 以「量杯中有 1200 毫升的水，1 塊石頭完全沉入水中，水位上升至刻度 1500 毫升，請問這塊石頭的體積是多少立方公分？」為例，問題中出現毫升和立方公分兩種單位，教師幫助學生將毫升單位轉換成立方公分後再解題。 <p>建議教師依下列步驟幫助學生解題時。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>步驟一：量杯中有 1200 毫升的水，也就是水的體積是 1200 立方公分。</li> <li>步驟二：水位上升至 1500 毫升時，也就是水和石頭的體積合起來是 1500 立方公分。</li> <li>步驟三：<math>1500 - 1200 = 300</math>(立方公分)，得到石頭的體積是 300 立方公分。</li> </ul> </li> </ol>			

題號	12		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。		
試題內容	<p>12. 老闆把 <math>5\frac{5}{8}</math> 公升的冬瓜檸檬汁，每 <math>\frac{3}{5}</math> 公升裝成 1 瓶，全部裝完，相當於裝成 <math>9\frac{3}{8}</math> 瓶。請問沒有裝滿的那瓶冬瓜檸檬汁有多少公升？</p> <p>① <math>\frac{3}{5}</math>          ② <math>\frac{3}{8}</math>          ③ <math>\frac{9}{40}</math>          ④ <math>\frac{15}{64}</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.17	0.02
2	0.34	0.44	0.13
3*	0.47	0.23	0.81
4	0.09	0.15	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.47	鑑別度	0.58
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.58，正確答案為選項③，通過率為47%，顯示近五成的學生已具備利用分數除法解決生活中問題的能力，能利用帶分數除以真分數的商(帶分數表示)，算出商為整數時的餘數。</p> <p>2. 有9%的學生選擇①(低分組有17%)，這些學生可能不具備利用分數除法解決生活中問題的能力，無法利用帶分數除以真分數的商(帶分數表示)，算出商為整數時的餘數；這些學生也可能不理解題意，將1瓶的量<math>\frac{3}{5}</math>公升當作餘數。</p> <p>3. 有34%的學生選擇②(低分組有44%)，這些學生可能不具備利用分數除法解決生活中問題的能力，無法利用帶分數除以真分數的商(帶分數表示)，算出商為整數時的餘數，他們可能看到商是<math>9\frac{3}{8}</math>瓶後，誤將<math>\frac{3}{8}</math>瓶直接當作餘數<math>\frac{3}{8}</math>公升。</p> <p>4. 有9%的學生選擇④(低分組有15%)，這些學生可能不具備利用分數除法解決生活中問題的能力，無法利用帶分數除以真分數的商(帶分數表示)，算出商為整數時的餘數；這些學生也可能不理解題意，將<math>5\frac{5}{8}</math>公升的「<math>\frac{5}{8}</math>」和<math>9\frac{3}{8}</math>瓶的「<math>\frac{3}{8}</math>」相乘當作答案。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備利用分數除法解決生活中問題的能力。</li> <li>2. 學生可能無法利用帶分數除以真分數的商(帶分數表示)，算出商為整數時的餘數</li> <li>3. 學生看到商是 <math>9\frac{3}{8}</math> 瓶後，誤將 <math>\frac{3}{8}</math> 瓶直接當作餘數 <math>\frac{3}{8}</math> 公升。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 有三個因素和分數除法問題的難度有關： <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 題目的類型 <ol style="list-style-type: none"> <li>① 等分除問題：<math>\frac{41}{5}</math> 公升果汁相當於 <math>\frac{4}{7}</math> 瓶，1 瓶果汁有幾公升？</li> <li>② 包含除問題：<math>\frac{51}{7}</math> 公升果汁，每 <math>\frac{3}{5}</math> 公升裝 1 瓶，全部相當於裝成幾瓶？</li> </ol> </li> <li>(2) 記錄的格式 <ol style="list-style-type: none"> <li>① <math>a\div b=q\dots r</math> (<math>q</math> 是整數，<math>0\leq r&lt;b</math>)： <math display="block">\frac{51}{7}</math> 公升果汁，每 <math>\frac{3}{5}</math> 公升裝 1 瓶，最多可以裝滿幾瓶，剩下幾公升？</li> <li>② <math>a\div b=\frac{a}{b}</math>： <math display="block">\frac{51}{7}</math> 公升果汁，每 <math>\frac{3}{5}</math> 公升裝 1 瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？</li> </ol> </li> <li>(3) 單位數的範圍 <ol style="list-style-type: none"> <li>① 單位數是整數：<math>\frac{41}{5}</math> 公升果汁，平分成 4 瓶，1 瓶果汁有幾公升？</li> <li>② 單位數是分數或小數：<math>\frac{41}{5}</math> 公升果汁相當於 <math>\frac{4}{7}</math> 瓶，1 瓶果汁有幾公升？</li> </ol> </li> </ol> </li> <li>2. 以「① <math>70\div 20</math>、② <math>7\div 2</math>、③ <math>0.7\div 0.2</math>」為例，當我們限制記錄的格式是 <math>a\div b=q\dots r</math> 時，這三題的答案不相同；當我們限制記錄的格式是 <math>a\div b=\frac{a}{b}</math> 時，這三題的答案相同。 <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 記錄格式是 <math>a\div b=q\dots r</math> <math display="block">\textcircled{1} 70\div 20=3\dots 10、\textcircled{2} 7\div 2=3\dots 1、\textcircled{3} 0.7\div 0.2=3\dots 0.1，</math> 這三題的答案不相同。 </li> <li>(2) 記錄格式是 <math>a\div b=\frac{a}{b}</math> <math display="block">\textcircled{1} 70\div 20=\frac{70}{20}=\frac{7}{2}、\textcircled{2} 7\div 2=\frac{7}{2}、\textcircled{3} 0.7\div 0.2=\frac{0.7}{0.2}=\frac{7}{2}，</math> 這三題的答案相同。 </li> </ol> </li> </ol>			

教師布題時應強調答案是哪種記錄格式，如果要求的記錄格式是  $a \div b = q \dots r$ ，不論餘數為 0 或不為 0，布題時應同時詢問商及餘數，如果要求的記錄格式是  $a \div b = \frac{a}{b}$ ，建議要加上「全部分完」的限制。

3. 我們熟悉單位數是整數的情境，例如「3 瓶果汁、4 條繩子、轉 5 圈」，「走 3 步、打 4 下、加 5 次」等。

我們可能也接受下面這些單位數不是整數的情境，例如「 $\frac{3}{5}$  瓶果汁、 $\frac{3}{5}$  條繩子、轉  $\frac{3}{5}$  圈」等。但是，我們不接受下面這些單位數不是整數的情境，例如：走  $\frac{3}{5}$  步、打  $\frac{3}{5}$  下、加  $\frac{3}{5}$  次等。

我們可以接受以  $\frac{3}{5}$  瓶果汁，可能的原因是我們已掌握 1 瓶果汁的量， $\frac{3}{5}$  瓶果汁是和 1 瓶果汁比較的結果。

我們可以接受轉  $\frac{3}{5}$  圈，可能的原因是我們已掌握轉 1 圈的量，例如已知轉 1 圈是 360 度，轉  $\frac{3}{5}$  圈(216 度)是和轉 1 圈比較的結果。

我們不接受走  $\frac{3}{5}$  步，可能的原因是我們走每一步的距離並不相同，也就是無法掌握走 1 步的量，因此無法接受走  $\frac{3}{5}$  步。假設走每一步的距離都是 50 公分，現在走的這一步是 30 公分，和 50 公分比較，走 30 公分可以說相當於走了  $\frac{3}{5}$  步。

我們不接受打  $\frac{3}{5}$  下，可能的原因是每打每一下的力量都不相同，也就是無法掌握打 1 下的量，因此無法接受打  $\frac{3}{5}$  下。假設打每一下的量都是 50 公斤，如果打這一下只有 30 公斤，和 50 公斤比較，30 公斤可以說相當於打了  $\frac{3}{5}$  下。

4. 單位數不是整數的問題，數學上稱為「相當於問題」，本基本學習內容限制「相當於問題」的記錄格式只能是  $a \div b = \frac{a}{b}$ ，都不討論餘數。例如「 $\frac{9}{7}$  公升果汁相當於  $\frac{3}{5}$  瓶，一瓶有多少公升？」的單位數不是整數，不討論餘數。

5. 問題 1：8 公尺長的繩子平分成 5 段，1 段長幾公尺？

問題 2：8 公尺長的繩子平分成  $\frac{3}{5}$  段，1 段長幾公尺？

問題 3：8 公尺長的繩子相當於  $\frac{3}{5}$  段，1 段長幾公尺？

學生熟悉問題 1 的問法，但是不接受問題 2 的問法，因為問題 1 是等分除問題的問法，在等分除情境中，繩子只能平分成整數段，不能平分成數段。學生不接受問題 2 的問法，但是可能會接受問題 3 的問法，因為問題 3 是比的問法，指的是  $\frac{3}{5}$  段繩子的長度是 8 公尺時，1 段繩子的長度是多少公尺。

建議教師在單位數不是整數的問題情境中，都使用「相當於」的描述。

例如：1 盒蘋果有 5 顆，3 顆相當於多少盒？ $\frac{51}{7}$  公升果汁，每  $\frac{3}{5}$  公升裝 1 瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？

除數是分數的包含除問題包含有餘數和沒有餘數兩種題型：

有餘數的問題：緞帶長  $\frac{9}{5}$  公尺，每  $\frac{4}{7}$  公尺做一朵花，最多可以做成幾朵花？剩下幾公尺？

沒有餘數的問題：緞帶長  $\frac{9}{5}$  公尺，每  $\frac{4}{7}$  公尺做一朵花，全部做完，相當於做成多少朵花？

6. 以「 $\frac{41}{5}$  公升果汁， $\frac{4}{7}$  公升裝 1 瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？」為例，說明如何引入沒有餘數的分數除法算則(顛倒相乘)。

步驟一：利用被除數及除數同時換單位策略來解題。

$$\begin{aligned} & \frac{41}{5} \div \frac{4}{7} \\ &= \frac{41 \times 7}{5 \times 7} \div \frac{4 \times 5}{7 \times 5} \rightarrow (\text{通分}) \\ &= (41 \times 7) \div (4 \times 5) \rightarrow (\text{同時以 } \frac{1}{35} \text{ 公升換單位}) \\ &= \frac{41 \times 7}{4 \times 5}, \text{ 答：相當於裝成 } \frac{41 \times 7}{4 \times 5} \text{ 瓶} \end{aligned}$$

步驟二：學生不易發現問題「 $\frac{41}{5} \div \frac{4}{7}$ 」和答案「 $\frac{41 \times 7}{4 \times 5}$ 」的關係。

教師先將答案改記成兩分數的乘積。

$$\begin{aligned} \frac{41 \times 7}{4 \times 5} &= \frac{41 \times 7}{5 \times 4} \rightarrow (\text{乘法交換律}) \\ &= \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} \rightarrow (\text{分數} \times \text{分數} = \frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}}) \end{aligned}$$

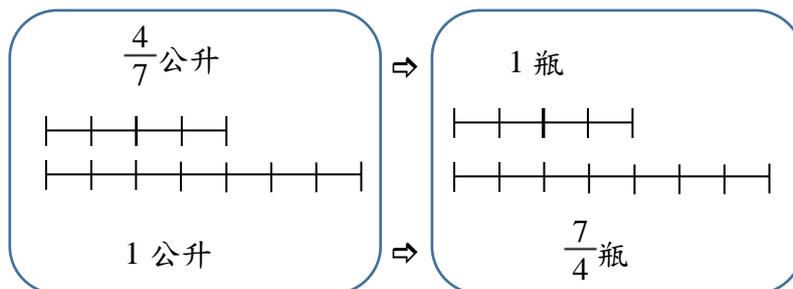
步驟三：要求學生觀察問題「 $\frac{41}{5} \div \frac{4}{7}$ 」和改寫後答案「 $\frac{41}{5} \times \frac{7}{4}$ 」的關係。

幫助學生發現可以利用顛倒相乘的方式直接算出答案。

7. 下面以問題「 $\frac{41}{5}$  公升果汁， $\frac{4}{7}$  公升裝 1 瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？」

為例，提供利用倒數概念的解題方法給教師參考。

步驟一：說明  $\frac{4}{7}$  公升裝 1 瓶時，1 公升可以裝  $\frac{7}{4}$  瓶。



透過上面線段圖，可以理解「 $\frac{4}{7}$ 公升裝成1瓶時，1公升是 $\frac{7}{4}$ 瓶」，其中 $\frac{4}{7}$ 和 $\frac{7}{4}$ 互為倒數。

步驟二：引入沒有餘數的分數除法算則(顛倒相乘)。

$$\frac{41}{5} \text{公升是} \frac{41}{5} \text{個} 1 \text{公升}$$

$$\Rightarrow \frac{41}{5} \text{個} 1 \text{公升是} \frac{41}{5} \text{個} \left(\frac{7}{4} \text{瓶}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{41}{5} \text{個} 1 \text{公升是} \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} \text{瓶}$$

8. 以「 $\frac{41}{5}$ 公升果汁， $\frac{4}{7}$ 公升裝1瓶，最多裝滿幾瓶，還剩下多少公升？」為例，

說明如何幫助學生解有餘數的包含除問題。

下面提供兩種解題的方法：

方法一：利用被除數和除數同時換單位策略來解題

$$\frac{41}{5} \text{公升} = \frac{287}{35} \text{公升} \Rightarrow 287 \text{個} \frac{1}{35} \text{公升}$$

$$\frac{4}{7} \text{公升} = \frac{20}{35} \text{公升} \Rightarrow 20 \text{個} \frac{1}{35} \text{公升}$$

$$287 \div 20 = 14(\text{瓶}) \dots 7 \left(7 \text{個} \frac{1}{35} \text{公升}\right)$$

$$\text{可以記成：} \frac{287}{35} \div \frac{20}{35} = 14 \dots \frac{7}{35} \left(\frac{7}{35} = \frac{1}{5}\right)$$

答：最多裝滿14瓶，剩下 $\frac{1}{5}$ 公升

方法二：利用沒有餘數的分數除法算則(顛倒相乘)來解題

步驟一：利用顛倒相乘算出全部裝完相當於多少瓶

$$\frac{41}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{287}{20} = 14 \frac{7}{20} (\text{瓶})$$

步驟二：說明 $14 \frac{7}{20} = 14(\text{瓶}) + \frac{7}{20}(\text{瓶})$ ，

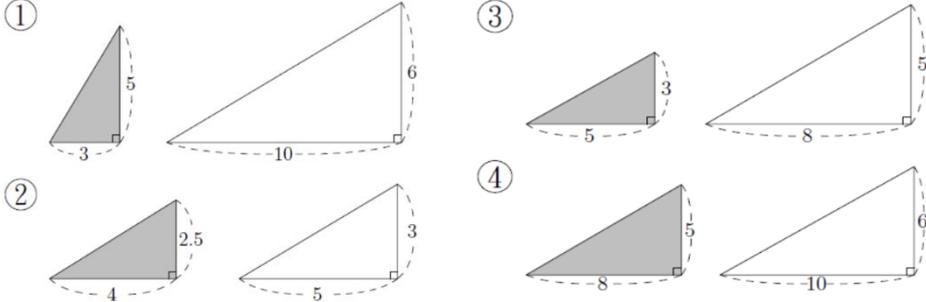
所以最多裝滿14瓶，剩下 $\frac{7}{20}$ 瓶。

步驟三：將剩下的 $\frac{7}{20}$ 瓶換成多少公升。

$$\frac{4}{7} \times \frac{7}{20} = \frac{1}{5} (\text{公升})$$

答：最多裝滿14瓶，剩下 $\frac{1}{5}$ 公升

三年級學生已在整數情境中，理解乘除互逆的意義。本能力指標已完成分數乘除的教學，教師應檢查學生是否能在分數情境中，理解乘除互逆的意義。

題號	13		
內容領域	幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。		
試題內容	<p>13. 下列哪個選項中的兩個三角形互為放大縮小圖？(單位：公分)</p> 		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1 *	0.43	0.25	0.61
2	0.18	0.24	0.12
3	0.20	0.29	0.12
4	0.19	0.22	0.14
未作答	0.00		
通過率	0.43	鑑別度	0.36
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.36，正確答案為選項①，通過率為43%，顯示超過四成的學生已具備辨識放大圖及縮小圖的能力</p> <p>2. 有18%的學生選擇②(低分組有24%)，這些學生可能不具備辨識放大圖及縮小圖的能力，而是直觀的透過視覺來判斷。</p> <p>3. 有20%的學生選擇③(低分組有29%)，這些學生可能不具備辨識放大圖及縮小圖的能力，而是直觀的透過視覺來判斷。</p> <p>4. 有19%的學生選擇④(低分組有22%)，這些學生可能不具備辨識放大圖及縮小圖的能力，而是直觀的透過視覺來判斷。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。	S-8-4 全等圖形：全等圖形的意義(兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合)；兩個多邊形

全等則其對應邊和對應角相等(反之亦然)。

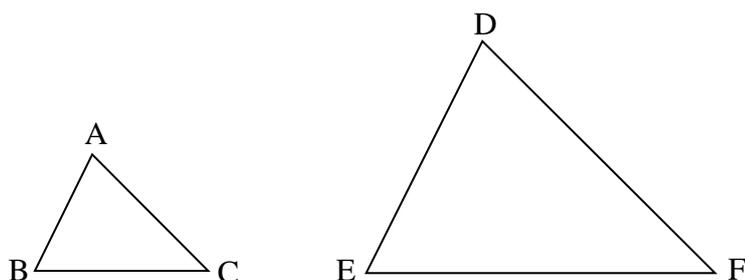
### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能無法利用放大圖與縮小圖的定義來辨識兩圖形間的關係，而是直觀的利用視覺判斷。
2. 學生可能無法正確地找到兩圖形的對應邊及對應角。
3. 學生可能熟悉邊長是幾倍的關係，但不熟悉對應邊成比例的關係。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師應透過操作與測量協助學生學習圖形的放大圖、縮小圖，幫助學生看到兩個相似圖形間構成要素的對應關係，例如：三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖，邊 AB 的對應邊為邊 DE，邊 DE 的長度=邊 AB 的長度 $\times 2$ ，邊 BC 的對應邊為邊 EF，邊 EF 的長度=邊 BC 的長度 $\times 2$ ，邊 AC 的對應邊為邊 DF，邊 DF 的長度=邊 AC 的長度 $\times 2$ ；A 點的對應點為 D 點，B 點的對應點為 E 點，C 點的對應點為 F 點； $\angle A$  的對應角為  $\angle D$ ， $\angle A = \angle D$ ， $\angle B$  的對應角為  $\angle E$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\angle C$  的對應角為  $\angle F$ ， $\angle C = \angle F$ 。



2. 教師應幫助學生連結「比」、「比值」和「幾倍放大(縮小)圖」的關係。教師應幫助學生認識下面三種表示法都可以說明「三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖」的關係，為引入比例尺的教學鋪路。

第一種：比的表示法

$$\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 1, \overline{EF} : \overline{BC} = 2 : 1, \overline{DF} : \overline{AC} = 2 : 1$$

第二種：比值的表示法

$$\overline{DE} \div \overline{AB} = 2, \overline{EF} \div \overline{BC} = 2, \overline{DF} \div \overline{AC} = 2$$

第三種：倍的表示法

$$\overline{DE} \text{長是} \overline{AB} \text{的} 2 \text{倍}, \overline{EF} \text{長是} \overline{BC} \text{的} 2 \text{倍}, \overline{DF} \text{長是} \overline{AC} \text{的} 2 \text{倍}$$

3. 以「將正方形甲對摺兩次，得到正方形乙，請問正方形乙是正方形甲的幾倍縮小圖？」為例，有兩種溝通幾倍縮小圖的方法。

第一種：利用邊長的關係來溝通

正方形甲和正方形乙相似，對應邊成比例，正方形乙的邊長是正方形甲對應邊長的  $\frac{1}{2}$  倍，稱正方形乙是正方形甲的  $\frac{1}{2}$  倍縮小圖。

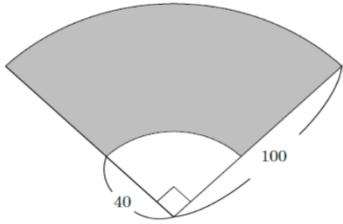
第二種：利用面積的關係來溝通

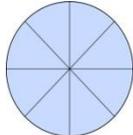
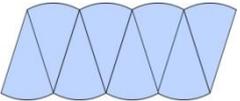
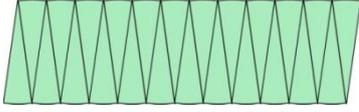
正方形乙的面積是正方形甲面積的 $\frac{1}{4}$ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 $\frac{1}{4}$ 倍縮小圖。

因為長度比面積容易測量，因此數學上約定乙是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍縮小圖，指的是乙的邊長是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍，不是指乙的面積是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍。

4.放大和縮小都是兩個圖形的關係，教師在課堂活動或評量時，應同時描述放大或縮小前、後的兩個圖形。

例如「 $\triangle ABC$ ， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle B=20^\circ$ ，將該三角形放大 2 倍後， $\angle C=?$ 」就是錯誤的描述方式，因為問題中沒有說明 $\triangle ABC$ 放大為 2 倍後的圖形為何，正確的描述是「 $\triangle ABC$ ， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle B=20^\circ$ ，將 $\triangle ABC$ 放大為 2 倍後的圖形是 $\triangle DEF$ ，求 $\angle F=?$ 」。

題號	14		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-n-14)		
試題內容	<p>14. 「如圖，樂樂將兩個扇形重疊。請問灰色部分的面積是多少平方公分？」 下列哪個算式可以算出正確答案？(圓周率 = 3.14)</p>  <p>(單位：公分)</p> <p>① <math>(100 - 40) \times (100 - 40) \times 3.14 \times \frac{1}{4}</math>          ② <math>(100 \times 100 - 40 \times 40) \times 3.14 \times \frac{1}{4}</math>          ③ <math>100 \times 100 \times 3.14 - 40 \times 40 \times 3.14 \times \frac{1}{4}</math>          ④ <math>100 \times 100 \times 3.14 \times \frac{1}{4} - 40 \times 40 \times 3.14</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.27	0.08
2*	0.60	0.36	0.82
3	0.17	0.24	0.09
4	0.05	0.12	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.60	鑑別度	0.46
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.46，正確答案為選項②，通過率為60%，顯示有六成的學生已具備利用圓面積公式解題及列式的能力。</p> <p>2. 有17%的學生選擇①(低分組有27%)，這些學生可能尚未具備利用圓面積公式解題及列式的能力，誤以為<math>(100 - 40) \times (100 - 40) \times 3.14 \times \frac{1}{4}</math>可算出灰色部分的面積。</p> <p>3. 有17%的學生選擇③(低分組有24%)，這些學生可能尚未具備利用圓面積公式解題及列式的能力；也可能已具備利用圓面積公式解題的能力，卻忘記運算次序括號先算的約定，誤以為<math>(100 \times 100 \times 3.14 - 40 \times 40 \times 3.14) \times \frac{1}{4}</math>中的括號可以省略。</p> <p>4. 有5%的學生選擇④(低分組有12%)，這些學生可能尚未具備利用圓面積公式解題及列式的能力。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。	6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-n-14)	S-9-5 圓弧長與扇形面積：以 $\pi$ 表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備利用圓面積公式解題及列式的能力。</li> <li>2. 學生可能已具備利用圓面積公式解題的能力，但是不具備列式的能力。</li> <li>3. 學生可能不理會「括號先算」運算次序的約定，自行省略括號。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 先將圓切成兩個半圓，再將兩個半圓都切成很多個(例如 8 個或 16 個)全等的扇形，將這兩個切成扇形的半圓上下交錯疊合起來，會變成接近平行四邊形(或長方形)的圖形，平行四邊形的底(長方形的長)是圓周長的一半，平行四邊形的高(長方形的寬)是圓的半徑，可以透過平行四邊形(長方形)面積求出圓面積。</li> </ol> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="width: 45%;"> <p>圓面積</p> <p>= 平行四邊形面積</p> <p>= 底 × 高</p> <p>= 圓周長的一半 × 半徑</p> <p>= (直徑 × 3.14) ÷ 2 × 半徑</p> <p>= (直徑 ÷ 2 × 3.14) × 半徑</p> <p>= 半徑 × 半徑 × 3.14</p> </div> <div style="width: 45%; text-align: center;">  <p>一個被八等分割的圓</p>  <p>重新組一個被八等分割的圓</p>  <p>重新組一個被二十四等分割的圓</p> </div> </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>2. 以「半徑 10 公分、圓心角 36 度的扇形面積是多少平方公分？」為例，提供兩種解題的方法。 <p>方法一：以幾分之幾圓的想法來解題</p> <math display="block">36 \div 360 = \frac{1}{10}, (10 \times 10 \times 3.14) \times \frac{1}{10} = 31.4, \text{ 答：} 31.4 \text{ 平方公分}</math> <p>方法二：以 1 度圓心角對應的扇形面積為單位來解題</p> <math display="block">(10 \times 10 \times 3.14) \times \frac{36}{360} = 31.4, \text{ 答：} 31.4 \text{ 平方公分}</math> <p>學生較容易掌握第一種方法解題的意義。</p> </li> </ol>			

3. 建議教師在處理同心圓的扇形面積問題時，應試著讓學生動手繪製、塗色，引導學生從操作中發現大扇形面積減掉小扇形面積，就是灰色部分的面積。學生可能在課堂上較少真正進行「觀察並擬定解題策略→用具體物或半具體物確認是否正確」的操作，多數時候僅用眼睛觀察，無法留下深刻印象與解題經驗，所以遇到此類同心圓扇形面積的問題時較難順利解題。

題號	15		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。		
試題內容	<p>下圖是一袋餅乾外包裝上的營養標示。</p>  <p>請問每份的熱量大約是多少大卡？</p> <p>① 3.8 ② 12.7 ③ 114 ④ 380</p>		
	選答率	答題反應比率 (*表正確答案)	
選項	整體	低分組	高分組
1	0.30	0.42	0.12
2	0.16	0.21	0.09
3*	0.44	0.19	0.76
4	0.10	0.18	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.44	鑑別度	0.57
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.57，正確答案為選項③，通過率為44%，顯示超過四成的學生已具備利用比和比值解決生活中問題的能力。</p> <p>2. 有30%的學生選擇①(低分組有42%)，這些學生可能不具備利用比和比值解決生活中問題的能力；這些學生也可能不理解題意，透過380大卡÷100公克=3.8，算出每份的熱量是3.8大卡。</p> <p>3. 有16%的學生選擇②(低分組有21%)，這些學生可能不具備利用比和比值解決生活中問題的能力；這些學生也可能不理解題意，透過380大卡÷30公克=12.666...，並將12.666...取概數到十分位後，算出每份的熱量是12.7大卡。</p> <p>4. 有10%的學生選擇④(低分組有18%)，這些學生可能不具備利用比和比值解決生活中問題的能力；這些學生也可能不理解題意，誤認為1份就是100公克，所以熱量就是380大卡。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活上的應用(含「百分率」、「折」)。	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比為例。

### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用比和比值解決生活中問題的能力。
2. 學生可能不理解餅乾外包裝上的營養標示。

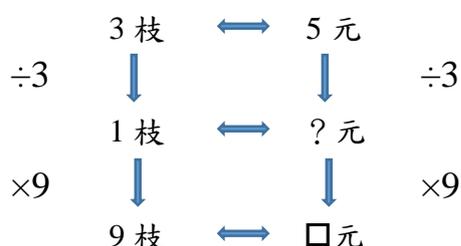
#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 以「3 枝鉛筆賣 5 元，9 枝鉛筆賣幾元？」為例，提出四種解題策略，教師可以提供學生這四種解題策略的經驗，但不宜限制學生使用某種解題策略來解題。

- (1) 單價法：先用除法「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」算出 1 枝鉛筆的單價是  $\frac{5}{3}$  元，再利用乘法

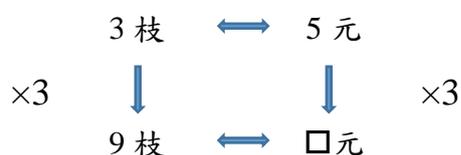
「 $\frac{5}{3} \times 9 = \frac{45}{3} = 15$ 」算出 9 枝鉛筆賣 15 元的答案。

單價法： $(5 \div 3) = \frac{5}{3}$ ， $\frac{5}{3} \times 9 = 15$



- (2) 倍數法：先用除法「 $9 \div 3 = 3$ 」算出 9 枝鉛筆是 3 枝鉛筆的 3 倍，再用乘法「 $5 \times 3 = 15$ 」算出 5 元的 3 倍是 15 元，得到 9 枝鉛筆賣 15 元。

倍數法： $3 \times 3 = 9$ (或  $9 \div 3 = 3$ )， $5 \times 3 = 15$



- (3) 關係式：教師也可以先用比的算式「 $3 : 5 = 9 : \square$ 」記錄問題，再將比的算式由左右併置的記法，改記成上下併置的關係式記法，關係式的記法較容易說明單價法或倍數法解題的意義。

- (4) 外項乘以外項等於內項乘以內項：

先用算式「 $3:5=9:y$ 」記錄問題，透過「外項乘以外項會等於內項乘以內項」得到算式「 $3\times y=5\times 9=45$ 」後，再利用乘除互逆「 $45\div 3=15$ 」，或利用等量公理「 $3\times y=45, y=45\div 3=15$ 」，算出 9 枝鉛筆賣 15 元。

2. 以「 $3:5=\square:15$ 」為例，說明為什麼外項乘以外項會等於內項乘以內項。

$$3:5=\square:15$$

$$\Rightarrow (3\times 15):(5\times 15)=(\square\times 5):(15\times 5)$$

$$\Rightarrow (3\times 15)=(\square\times 5)$$

看著原問題「 $3:5=\square:15$ 」和結果「 $3\times 15=\square\times 5$ 」，

幫助學生發現「 $3\times 15$ 」是「 $3:5=\square:15$ 」兩外項的乘積，「 $\square\times 5$ 」是

「 $3:5=\square:15$ 」兩內項的乘積，可以透過「外項乘以外項會等於內項乘以內項」的關係，由「 $3:5=\square:15$ 」直接得到「 $(3\times 15)=(\square\times 5)$ 」。

題號	16		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。		
試題內容	<p>16. 三角柱和四角柱的體積都是 800 立方公分。 三角柱的底面積是 16 平方公分，四角柱的底面積是 25 平方公分， 請問三角柱柱高和四角柱柱高的比值是多少？</p> <p>① <math>\frac{16}{25}</math> ② <math>\frac{25}{16}</math> ③ <math>\frac{4}{5}</math> ④ <math>\frac{5}{4}</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.32	0.39	0.18
2*	0.45	0.21	0.74
3	0.13	0.23	0.03
4	0.10	0.16	0.04
未作答	0.01		
通過率	0.45	鑑別度	0.53
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.53，正確答案為選項②，通過率為45%，顯示有四成五的學生已具備利用比和比值解題生活中問題的能力。</p> <p>2. 有32%的學生選擇①(低分組有39%)，這些學生可能尚未具備利用比和比值解題生活中問題的能力，他們認為體積相等柱體的柱高的比值和底面積的比值相等。</p> <p>3. 有13%的學生選擇③(低分組有23%)，這些學生可能尚未具備利用比和比值解題的能力。</p> <p>4. 有10%的學生選擇④(低分組有16%)，這些學生這些學生可能尚未具備利用比和比值解題的能力。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活上的應用(含「百分率」、「折」)。	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比為例。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用比和比值解題生活中問題的能力。
2. 學生可能認為體積相等柱體的柱高的比值和底面積的比值相等。
3. 學生無法計算兩個算式的比值，只會計算兩個數字的比值，例如無法直接計算  $800 \div 16 : 800 \div 25$  的比值。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 為了讓比較多個比的大小時更有效率，可以透過將後項轉換成 1 的方式來比較， $5 : 3 = \frac{5}{3} : 1$ ， $8 : 5 = \frac{8}{5} : 1$ ， $\frac{5}{3} > \frac{8}{5}$ ，可以得到  $5 : 3 > 8 : 5$ 。

以「 $5 : 3 = \frac{5}{3} : 1$ 」為例，數學上稱後項為 1 的前項  $\frac{5}{3}$  為  $5 : 3$  的比值，可以透過比值來比較兩個比的大小。

2. 有兩種定義比值的方式：

第一種： $a : b = \frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b}$

第二種： $a : b = a \div b = \frac{a}{b}$

部分教師不喜歡上面的定義方式，認為等號左邊是比，而等號右邊是數字，比和數字不相等，因此不能記成  $a : b = \frac{a}{b}$ ，只能說  $a : b$  的比值是  $\frac{a}{b}$ 。

建議教師透下列方式引入比值的定義：

$a : b = \frac{a}{b} : 1$ ，我們稱  $\frac{a}{b} : 1$  的前項  $\frac{a}{b}$  為  $a : b$  的比值，可以利用  $a \div b = \frac{a}{b}$  算出比值。

3. 以本題為例，解題方法如下：

透過柱體體積公式「柱體的體積為底面積與高的乘積」解題的能力。先算出三角柱、四角柱的柱高後，再算出柱高的比值。

三角柱體積 = 底面積  $\times$  柱高， $800 = 16 \times$  柱高，柱高 = 50

四角柱體積 = 底面積  $\times$  柱高， $800 = 25 \times$  柱高，柱高 = 32

三角柱柱高 : 四角柱的柱高 =  $50 : 32 = \frac{50}{32} : 1$ ，比值是  $\frac{25}{16}$ 。

題號	17		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-n-14)		
試題內容	<p>17. 甲、乙、丙、丁四人談論「圓周率」的問題：</p> <p>甲說：圓周率是圓周長與半徑的比值。  乙說：圓周率是圓周長與直徑的比值。  丙說：周長不同的圓，它們的圓周率也不相同。  丁說：周長不同的圓，它們的圓周率都相同。</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 甲、丙  ② 甲、丁  ③ 乙、丙  ④ 乙、丁</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.17	0.01
2	0.21	0.33	0.08
3	0.11	0.20	0.03
4*	0.59	0.29	0.88
未作答	0.01		
通過率	0.59	鑑別度	0.58
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.58，正確答案為選項④，通過率為59%，顯示近六成的學生已理解圓周率的意義。</p> <p>2. 有8%的學生選擇①(低分組有17%)，這些學生可能尚未理解圓周率的意義，他們誤認為圓周率是圓周長與半徑的比值，也誤認不同圓的圓周率不相同。</p> <p>3. 有21%的學生選擇②(低分組有33%)，這些學生可能不理解圓周率的意義，誤認為圓周率是圓周長與半徑的比值。</p> <p>4. 有11%的學生選擇③(低分組有20%)，這些學生可能不理解圓周率的意義，他們可能知道圓周率是圓周長與半徑的比值，但誤認不同圓的圓周率不相同。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。	6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-n-14)	S-9-5 圓弧長與扇形面積：以 $\pi$ 表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

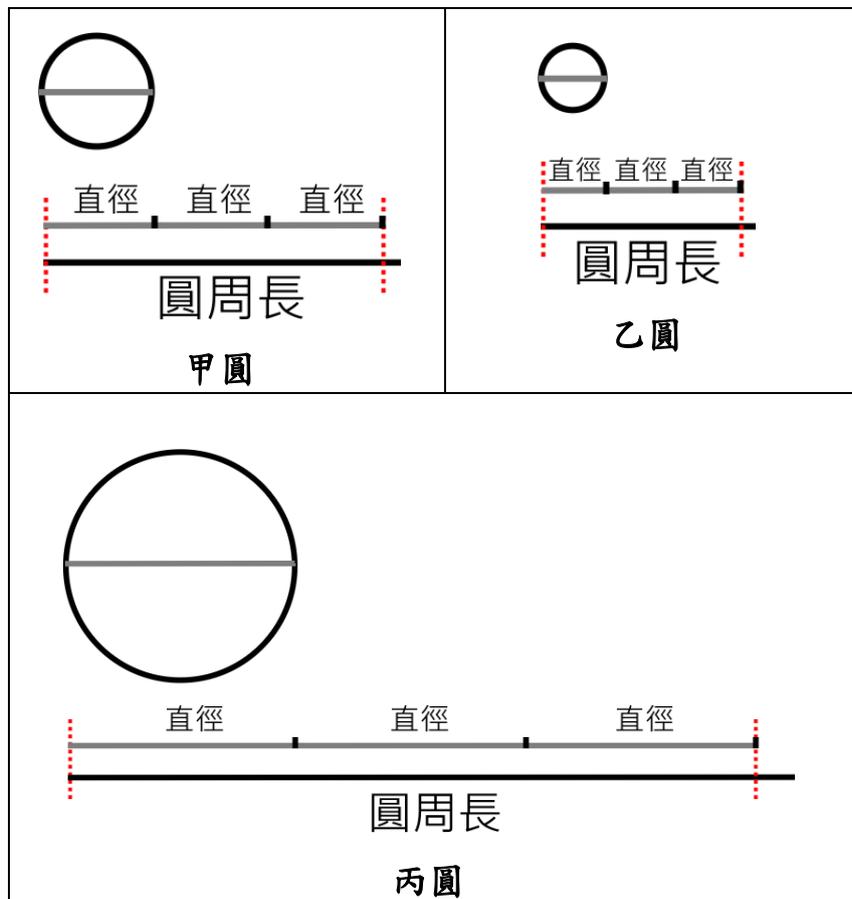
1. 學生可能不理解圓周率的意義。
2. 學生可能受到圓面積公式「圓面積=半徑×半徑×3.14」的影響，誤認為圓周率和半徑有關，誤認為圓周率是圓周長與半徑的比值。
3. 學生可能誤認不同圓的圓周率不相同。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 圓周率的率指的是比率，比率相等指的是所有的圓都相似，也就是說，所有的圓，其圓周長和直徑的比、圓周長和半徑的比以及直徑和半徑的比都相等。圓的周長是曲線，不易測量其長度，而圓的直徑是直線，比較容易測量，因此只要知道「圓周長：直徑長」的比值，測量出直徑後就能算出圓的周長，數學上稱「圓周長：直徑長」的比值為圓周率。
2. 下面說明如何幫助學生掌握圓周率的意義：  
教師先給定 3 個大小不同的圓，再提供下面兩種情境，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。

#### (1) 觀察給定三個圓的圓周長和 3 倍直徑長的長短關係

教師分別畫出這 3 個圓的圓周長以及直徑長的 3 倍，要求學生觀察這些圓的圓周長和 3 倍直徑長，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。如下所示：



(2) 比較三個圓「圓周長÷直徑長」商的大小關係

教師給定三個圓的圓周和直徑的長度，以及「圓周長÷直徑長」的商以四捨五入法取概數到百分位)，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。如下所示：

	圓周長(公分)	直徑長(公分)	圓周長÷直徑長 (四捨五入到百分位)
甲圓	56.5	18	3.14
乙圓	38.0	12	3.17
丙圓	72.5	23	3.15

教師應同時提供兩種情境，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點。第一種是比的想法，學生可以同時看到圓周長和直徑 3 倍長的關係；第二種情境是比值的想法，學生可能只將注意力放在「圓周長÷直徑長」的商，而無法察覺圓周長和直徑 3 倍長的關係。

3. 「圓周長÷直徑長=圓周率( $\frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}}=\text{圓周率}$ )」和「圓周長=直徑長×3.14」

是相同的關係，只記憶其中一個公式，就能導出另一個公式。前者較容易幫助學生認識圓周率的意義，而後者只幫助學生記憶圓周率是 3.14。

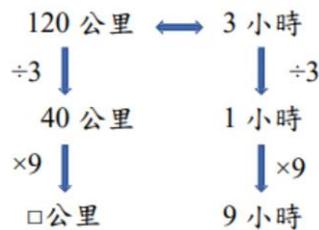
建議教師教學時，宜強調「圓周長÷直徑長=圓周率(3.14)」，

幫助學生掌握圓周率的意義，不宜只強調「圓周長=直徑長×3.14」。

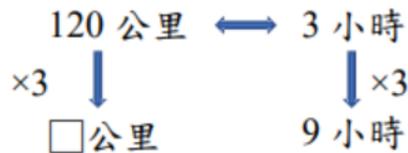
題號	18		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。		
試題內容	<p>18. 下圖是一張臺中站直達嘉義站的高鐵票，已知臺中到嘉義的距離大約是 85 公里，請問這班高鐵的平均時速是多少公里？ (用四捨五入法求商到小數第一位)</p>  <p>① 221.7 ② 259.3 ③ 369.6 ④ 3695.7</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.32	0.15	0.61
2	0.19	0.27	0.10
3	0.36	0.40	0.23
4	0.12	0.17	0.06
未作答	0.01		
通過率	0.32	鑑別度	0.46
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.46，正確答案為選項①，通過率為32%，顯示超過三成的學生已具備利用速率概念解題的能力。</p> <p>2. 有19%的學生選擇②(低分組有27%)，這些學生可能不具備利用速率概念解題的能力，但是有高鐵行車速率的常識(最高速不超過300公里)，他們沒有解題，直接選擇最接近300公里但是沒有超過300公里的選項為答案。</p> <p>3. 有36%的學生選擇③(低分組有40%)，這些學生可能已具備利用速率概念解題的能力，能由高鐵票中知道行駛兩地所花時間，但在由分鐘轉化為小時時，直接將23分轉化為0.23小時，再利用85公里÷0.23小時得出369.6的答案。</p> <p>4. 有12%的學生選擇④(低分組有17%)，這些學生這些學生可能不具備利用速率概念解題的能力，雖能由高鐵票中知道所花時間，但是不理解時速、分速之意義，看到85公里即將它轉換為85000公尺，然後除以時間，其得出數值為每分鐘所行的公尺數。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。	6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備利用速率概念解題的能力。</li> <li>2. 學生可能不理解車票上呈現的相關訊息，無法找出行駛兩地所花的時間。</li> <li>3. 學生可能不具備時速與分速化聚的能力。</li> <li>4. 學生可能除法直式計算不熟練或無法對小數在指定位數取概數。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 速度與速率是兩種不同的概念，速度是向量的概念，速率是純量的概念。 例如甲、乙兩地的距離是 100 公里，由甲地開車先到乙地，再由乙地開車回甲地，共花了 2 小時。 開車的距離是 200 公里，時間是 2 小時，我們說平均速率是 100 公里/小時；開車的位移是 0 公里，時間是 2 小時，我們說平均速度為 0 公里/小時。 日常生活中常混用這兩個名詞，將速率與速度都稱之為速度。 本基本學習內容的速度，指的是日常生活中常用的一般名詞，也就是速率的意思。建議教師在教學時，儘量使用速率的說法。</li> <li>2. 「平均 1 小時跑 60 公里」是日常生活中常見的說法，下面提供三種也可以溝通「平均 1 小時跑 60 公里」的方法。 方法一：60 公里：1 小時 方法二：60 公里/小時 方法三：時速 60 公里 方法一是利用比的記法來溝通速率，方法二是利用比值的記法來溝通速率，方法三是日常生活中常用的說法。 建議教師幫助學生熟練「時速 60 公里」、「速率 60 公里/小時」、「60 公里：1 小時」這三種說法間的轉換，但在解題時，儘量利用比的方法來解題，因為比的記法較能夠看到時間和距離兩量的關係。</li> <li>3. 以「甲車 3 小時跑 120 公里，9 小時跑多少公里？」為例，建議教師使用比的想法來解題。 (1) 先用算式「120 公里：3 小時 = □ 公里：9 小時」來記錄問題，再利用關係式的記法，利用單價法或倍數法來解題。</li> </ol>			

單價法： $(120 \div 3) = 40$ ， $40 \times 9 = 360$ ，答：360 公里



倍數法： $3 \times 3 = 9$  (或  $9 \div 3 = 3$ )， $120 \times 3 = 360$ ，答：360 公里



(2) 先用算式「120 公里：3 小時 = □ 公里：9 小時」來記錄問題，再利用「外項乘以外項等於內項乘以內項」來解題。

$120 \times 9 = \square \times 3$ ， $\square = 360$ ，答：360 公里

4. 當學生應該已經認識速度，並能解決生活中的問題。所以本基本學習內容接著幫助學生認識速度常用單位，並進行速度常用單位間的化聚。
5. 以「汽車的時速 90 公里，它的分速是多少公尺？」為例，學生比較無法掌握比值想法解決速度換單位問題解題的意義。

$$90 \frac{\text{公里}}{\text{小時}} = 90 \times \frac{1000 \text{ 公尺}}{60 \text{ 分鐘}} = 90 \times \frac{1000}{60} \frac{\text{公尺}}{\text{分鐘}} = 1500 \frac{\text{公尺}}{\text{分鐘}}$$

建議教師可以透過比的想法，來幫助學生解決時速、分速及秒速單位間的換算問題。

$$\begin{aligned} 90 \text{ 公里/小時} &= 90 \text{ 公里} : 1 \text{ 小時} \\ &= 90000 \text{ 公尺} : 60 \text{ 分鐘} \\ &= 90000 \text{ 公尺} \div 60 : 60 \text{ 分鐘} \div 60 \\ &= 1500 \text{ 公尺} : 1 \text{ 分鐘} \text{ (分速是 1500 公尺)} \end{aligned}$$

6. 教師在教學時，應先進行只有時間單位進行化聚或只有距離單位進行化聚的問題，例如  $60 \text{ 公里/小時} = ( ) \text{ 公尺/小時}$ ，或  $60 \text{ 公里/小時} = ( ) \text{ 公里/分鐘}$ 。再引入時間單位和距離單位都進行化聚的問題，例如  $60 \text{ 公里/小時} = ( ) \text{ 公尺/分鐘}$ ，但是不宜過度評量。

題號	19		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	程序執行
學習內容	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。		
試題內容	<p>19. 阿婆煮了 30.75 公升的冬瓜茶，每 1.2 公升裝成一瓶，最多可裝滿 A 瓶，還剩 B 公升，請問 <math>A + B = ?</math></p> <p>① 25.63 ② 25.75 ③ 25.9 ④ 32.5</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.28	0.35	0.17
2*	0.35	0.19	0.56
3	0.20	0.25	0.12
4	0.17	0.20	0.16
未作答	0.01		
通過率	0.35	鑑別度	0.36
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.36，正確答案為選項②，通過率為35%，顯示有三成五的學生已具備小數除法直式計算的能力。</p> <p>2. 有28%的學生選擇①(低分組有35%)，這些學生可能不具備小數除法直式計算的能力；這些學生可能已具備小數除法直式計算的能力，但是不理解題意問裝滿多少瓶的意義，他們直接計算商到小數第一位後，算出商是25.6，餘數是0.03，得到合起來是25.63的答案。</p> <p>3. 有20%的學生選擇③(低分組有25%)，這些學生可能不具備小數除法直式計算的能力，也不理解題意問裝滿多少瓶的意義，他們直接計算商到小數第一位後，得出商是25.6，但是錯誤的算出餘數是0.3，得到合起來是25.9的答案。</p> <p>4. 有 17%的學生選擇④(低分組有 20%)，這這些學生可能不具備小數除法直式計算的能力。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。	6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備有餘數的小數除法直式計算的能力。
2. 學生可能不理解「最多裝滿幾瓶」的語意。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 除數是小數的包含除問題包含有餘數和沒有餘數兩種題型：

有餘數的問題：緞帶長 29.4 公尺，每 1.8 公尺做一朵花，最多可以做成幾朵花？剩下幾公尺？

沒有餘數的問題：緞帶長 29.4 公尺，每 1.8 公尺做一朵花，全部做完，相當於做成多少朵花？

本基本學習內容限制討論有餘數的包含除問題時，商都必須是整數，但是不可以評量餘數。討論沒有餘數的包含除問題時，商必須能除盡，且商最多是二位小數。

2. 單位數不是整數的問題，數學上稱為「相當於問題」，本基本學習內容限制「相當於問題」的記錄格式只能是  $a \div b = \frac{a}{b}$ ，都不討論餘數。例如「29.4 公升果汁相當於 1.8 瓶，一瓶有多少公升？」的單位數不是整數，不討論餘數。
3. 建議教師限制學生使用「被除數和除數同時換單位」的策略，解決除數是小數，商是整數且有餘數的包含除問題。

以「36.2 公升果汁，1.4 公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」為例，說明如何利用「被除數和除數同時以 0.1 公升換單位」策略，幫助學生解題。

步驟一：幫助學生將被除數 36.2 公升及除數 1.4 公升，同時以 0.1 公升為單位來換單位。36.2 公升轉成 362 個 0.1 公升，1.4 公升換成 14 個 0.1 公升。

步驟二：再透過  $362 \div 14 = 25 \dots 12$ ，得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 12 個 0.1 公升，也就是剩下 1.2 公升。

如果學生無法掌握以 0.1 公升為單位的意義，教師可以透過命名 0.1 公升為 1 杯的方式，將被除數 36.2 公升及除數 1.4 公升，轉換成 362 杯和 14 杯，再透過  $362 \div 14 = 25 \dots 12$ ，得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 12 杯，也就是剩下 1.2 公升的答案。

4. 當商數較小時，例如商數是一位數字時，教師應幫助學生利用「先乘後減」的策略解題。「先乘後減」策略的概念比較簡單，學生不但較易理解其意義，而且也比较有效率。
5. 以「41.57 公升果汁，11.4 公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」為例，說明如何幫助學生利用「先乘後減」的策略來解題。  
步驟一：教師先幫助學生估商，例如 11.4 公升裝一瓶，可以裝滿 3 瓶，但是無法裝滿 4 瓶。

步驟二：裝滿 3 瓶，共裝了多少公升，還剩下多少公升？

$$11.4 \times 3 = 34.2, 41.57 - 34.2 = 7.37$$

得到最多裝滿 3 瓶，剩下 7.37 公升。

6. 當商的數字不大時，教師也可以幫助學生利用「先乘後減」的策略解題。  
以「36.2 公升果汁，1.4 公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」為例，說明如何幫助學生利用「先乘後減」的策略來解題。

步驟一：教師先幫助學生以 10 瓶為單位估商，例如 1.4 公升裝一瓶，  
可以裝滿 20 瓶，但是無法裝滿 30 瓶。

步驟二：裝滿 20 瓶，共裝了多少公升，還剩下多少公升？

$$1.4 \times 20 = 28, 36.2 - 28 = 8.2$$

得到最多裝滿 20 瓶，剩下 8.2 公升。

步驟三：再幫助學生以 1 瓶為單位估商，例如剩下 8.2 公升，1.4 公升裝一瓶，  
可以裝滿 5 瓶，但是無法裝滿 6 瓶。

步驟四：剩下 8.2 公升，裝滿 5 瓶，共裝了多少公升，還剩下多少公升？

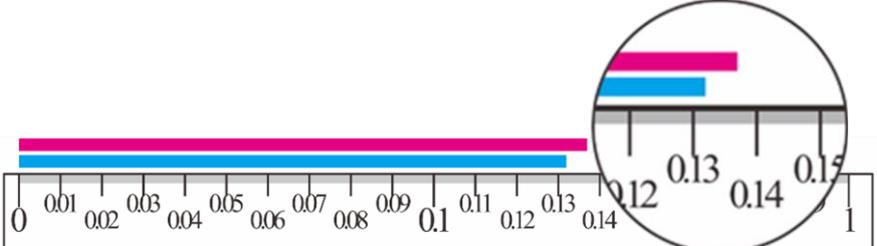
$$1.4 \times 5 = 7, 8.2 - 7 = 1.2$$

得到剩下的果汁最多裝滿 5 瓶，剩下 1.2 公升。

步驟五：回到原問題，要求學生回答最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？

得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 1.2 公升。

題號	20		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	解題思考
學習內容	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。		
試題內容	<p>20. 甲、乙、丙、丁四個人都買了 10 公斤的番茄。</p> <p>甲：買 10 公斤番茄花了 205 元。  乙：買 10 公斤番茄花了 201 元。  丙：買 10 公斤番茄花了 216 元。  丁：買 10 公斤番茄花了 215 元。</p> <p>這四個人取概數到整數位後，都說買番茄的價格是「平均一公斤花了 21 元」。</p> <p>下面關於四人取概數的說法何者<b>錯誤</b>？</p> <p>① 甲是用四捨五入法取概數  ② 乙是用無條件進入法取概數  ③ 丙是用無條件捨去法取概數  ④ 丁是用四捨五入法取概數</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.20	0.04
2	0.18	0.27	0.07
3	0.20	0.29	0.09
4*	0.48	0.23	0.79
未作答	0.01		
通過率	0.48	鑑別度	0.56
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.56，正確答案為選項④，通過率為48%，顯示近五成的學生已具備在指定位數對小數取概數的能力。</p> <p>2. 有12%的學生選擇①(低分組有20%)，這些學生可能不具備在指定位數對小數用四捨五入法取概數的能力。</p> <p>3. 有18%的學生選擇②(低分組有27%)，這些學生可能不具備在指定位數對小數用無條件進入法取概數的能力。</p> <p>4. 有20%的學生選擇③(低分組有29%)，這些學生可能不具備在指定位數對小數用無條件捨去法取概數的能力。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-n-06 能在具體情境中，對大數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減之估算。	6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。	N-10-5 數值計算的誤差：認識計算機的有限性，可察覺誤差的發生並做適當有效位數的取捨。
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能不具備在指定位數對小數利用四捨五入法取概數的能力</li> <li>2. 學生可能不具備在指定位數對小數利用無條件進入法或無條件捨去法取概數的能力。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 以「7.2468 用四捨五入法取概數到小數第一位」為例，部分學生可能從小數點最後一位開始四捨五入，例如 7.2468 最後一位是 8，針對 8 四捨五入後得到 7.247，再針對 7 四捨五入得到 7.25，再針對 5 四捨五入得到 7.3。教師應說明四捨五入的意義，7.2468 介於 7.2 和 7.3 之間，用四捨五入法取概數到小數第一位，教學重點是判斷 7.2468 距離 7.2 比較近，或距離 7.3 比較近，因此當取概數到小數點第一位時，只要判斷小數點第二位即可，7.2468 小數點後第 2 位是 4，也就是 7.2468 距離 7.2 比較近，所以 7.2468 用四捨五入法取概數到小數第一位的結果是 7.2。</li> <li>2. 建議透過下面的測量情境，幫助學生理解四捨五入法取概數的意義例子。</li> </ol>			
			
<p>當我們用最小刻度是 0.01 公尺(1 公分)的直尺測量上圖的上、下兩條繩子長度時，如果用無條件捨去法取概數，剩下不到 0.01 公尺(1 公分)的捨去不算，兩條繩子的長度都是 0.13 公尺(13 公分)；如果用無條件進入法取概數，剩下不到 0.01 公尺(1 公分)的也算 0.01 公尺(1 公分)，兩條繩子的長度都是 0.14 公尺(14 公分)，這兩種描述繩長的誤差很大。</p> <p>如果繩子長度比較接近 0.14 公尺(14 公分)，就記成 0.14 公尺；繩子長度比較接近 0.13 公尺(13 公分)，就記成 0.13 公尺。因此，將下面藍色繩子的長度記成 0.13 公尺，上面紅色繩子的長度記成 0.14 公尺，這樣比較接近實際的長度，也是比較公平的記法；數學上稱這種取概數的方法為四捨五入法。</p> <p>0.135 公尺剛好介於 0.13 公尺和 0.14 公尺之間，為了讓下一位是 0、1、2、</p>			

3、4 時都捨去，5、6、7、8、9 都進位，四捨五入法約定將 0.135 公尺記成 0.14 公尺。

3. 日常生活中常見利用無條件進入法或無條件捨去法取概數的問題，但是它們取概數時不一定都是以十、百、千或萬為單位。

不論是否以十、百、千或萬為單位，都可以透過除法算式來解決問題，建議教師透過除法算式，幫助學生理解利用無條件進入法或無條件捨去法取概數的意義。

(1) 不是以十為單位取概數的問題

「14 人搭計程車，每輛計程車只能坐 4 人，至少要幾輛計程車才夠？」

教師可以透過除法算式「 $14 \div 4 = 3 \dots 2$ 」，幫助學生理解只有 3 輛計程車時，還有 2 人沒車坐，必須要 4 輛計程車才夠。

(2) 以百為單位取概數的問題

「全市運動會路跑參賽選手有 5246 人，一人戴一頂帽子，要為這些選手準備帽子，如果帽子 100 頂裝成一包，至少要準備多少包帽子才夠？也就是多少頂帽子？」

教師也可以透過除法算式「 $5246 \div 100 = 52 \dots 46$ 」，幫助學生理解只準備 52 包時，還有 46 人沒分到帽子，必須要準備 53 包才夠，也就是 5300 頂帽子。

題號	21		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-n-15)		
試題內容	<p>21. 將長 3 公分、寬 4 公分、高 5 公分的長方體黏土揉成一個高是 10 公分的圓柱，請問圓柱一個底面的面積是多少平方公分？ (圓周率 = 3.14)</p> <p>① 6 ② 12 ③ <math>5 \times 5 \times 3.14</math> ④ <math>6 \times 6 \times 3.14</math></p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.43	0.16	0.79
2	0.18	0.30	0.05
3	0.19	0.30	0.06
4	0.18	0.23	0.09
未作答	0.01		
通過率	0.43	鑑別度	0.63
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.63，正確答案為選項①，通過率為43%，顯示超過四成的學生已具備體積保留概念及利用柱體體積公式解題的能力。</p> <p>2. 有18%的學生選擇②(低分組有30%)，這些學生可能尚未具備體積保留概念及利用柱體體積公式解題的能力；也可能誤解題意，算出2個底面積為答案。</p> <p>3. 有19%的學生選擇③(低分組有30%)，這些學生可能尚未具備體積保留概念及利用柱體體積公式解題的能力；這些學生可能已具備利用柱體體積公式解題的能力，但是誤認為和圓有關的長度及面積都要有圓周率3.14，直接選擇有乘以3.14的選項為答案。</p> <p>4. 有18%的學生選擇④(低分組有23%)，這些學生可能已具備利用柱體體積公式解題的能力，利用 <math>3 \times 4 \times 5 = 60</math>，<math>60 \div 10 = 6</math>，算出答案6後，因為誤認為和圓有關的長度及面積都要有圓周率3.14，選擇有乘以3.14的選項為答案。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-s-06 能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。	6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-n-15)	S-9-13 表面積與體積：直角柱、直圓錐、正角錐的展開圖；直角柱、直圓錐、正角錐的表面積；直角柱的體積。

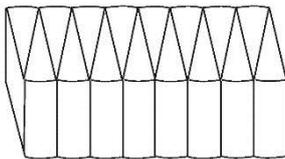
## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用柱體體積公式解題的能力。
2. 學生可能無法掌握體積的保留概念。
3. 學生可能熟悉圓面積公式，認為與圓有關問題的答案中一定要有 3.14。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師由長方體體積公式「(長×寬)×高」，說明四角柱體積公式「底面積×高」，並推廣至簡單直柱體體積公式「底面積×高」。
2. 可以透過下列步驟引入底面是平行四邊形四角柱的體積公式，底面是平行四邊形四角柱的體積=平行四邊形面積(底面積)×高。  
步驟一：底面是平行四邊形的四角柱甲，透過切割、平移、重組，可以拼成底面是長方形的四角柱乙，所以四角柱甲和四角柱乙的體積相等。  
步驟二：四角柱甲和四角柱乙的底面積相等，將四角柱乙的高看成四角柱甲的高。  
步驟三：底面是平行四邊形四角柱甲的體積  
=底面是長方形四角柱乙的體積  
=長方形面積(底面積)×高(四角柱乙)  
=平行四邊形面積(底面積)×高(四角柱甲)
3. 當學生認識長方體的體積是長方形面積(底面積)×高，底面是平行四邊形四角柱的體積是平行四邊形面積(底面積)×高，底面是梯形四角柱的體積是梯形面積(底面積)×高，底面是三角形三角柱的體積是三角形面積(底面積)×高，此時，教師可以說明柱體的體積公式是「底面積×高」。
4. 教師可以類比引入圓面積公式的方法，先將直圓柱切成兩個半圓柱，再將兩個半圓柱都切成很多個全等的扇形柱，將這兩個切成扇形柱的半圓柱上下交錯疊合起來，會變成一個接近直四角柱的立體(如下圖)，直四角柱的體積是「底面積×高」，所以直圓柱的體積也是「底面積×高」。



題號	22		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。		
試題內容	<p>22. 下圖是地圖上的比例尺。</p>  <p>下面是甲、乙二人關於該比例尺的說法。</p> <p>甲說：「地圖上長度 2 公分的線段，實際長度是 2 公里。」</p> <p>乙說：「地圖上的長度：實際長度 = <math>\frac{1}{100000} : 1</math>」</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有甲正確          ② 只有乙正確          ③ 甲和乙都正確          ④ 甲和乙都不正確</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.38	0.35	0.38
2	0.16	0.26	0.05
3*	0.35	0.23	0.52
4	0.10	0.16	0.04
未作答	0.01		
通過率	0.35	鑑別度	0.30
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.30，正確答案為選項③，通過率為35%，顯示有三成五的學生已具備利用比例尺解決生活中問題的能力。</p> <p>2. 有38%的學生選擇①(低分組有35%)，這些學生可能不具備利用比例尺解決生活中問題的能力；這些學生也可能熟悉比例尺「1：100000」的表示法，但不熟悉「<math>\frac{1}{100000} : 1</math>」的表示法。</p> <p>3. 有16%的學生選擇②(低分組有26%)，這些學生可能不具備利用比例尺解決生活中問題的能力；也可能這些學生不熟悉不同單位比例尺的表示法，或不理解比例尺表示地圖上的長度：實際長度的意義。</p> <p>4. 有10%的學生選擇④(低分組有16%)，這些學生可能不具備利用比例尺解決生活中問題的能力。</p>			



### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活上的應用(含「百分率」、「折」)。	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。	S-9-1 相似形：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。

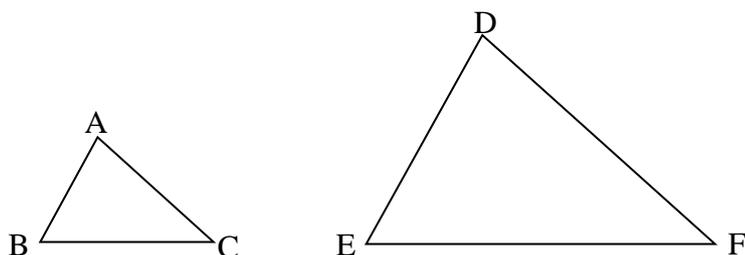
### 補救教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用比例尺解決生活中問題的能力
2. 學生可能熟悉同單位比例尺中「1:100000」的表示法，但不熟悉「 $\frac{1}{100000}$ :1」的表示法。
3. 學生可能不理解比例尺包含同單位與不同單位的表示方法。
4. 學生可能不理解比例尺的後項必須是實際的長度。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師應幫助學生連結「比」、「比值」和「幾倍放大(縮小)圖」的關係。教師應幫助學生認識下面三種表示法都可以說明「三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖」的關係，為引入比例尺的教學鋪路。



第一種：比的表示法

$$\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 1, \overline{EF} : \overline{BC} = 2 : 1, \overline{DF} : \overline{AC} = 2 : 1$$

第二種：比值的表示法

$$\overline{DE} \div \overline{AB} = 2, \overline{EF} \div \overline{BC} = 2, \overline{DF} \div \overline{AC} = 2$$

第三種：倍的表示法

$$\overline{DE} \text{長是} \overline{AB} \text{的} 2 \text{倍}, \overline{EF} \text{長是} \overline{BC} \text{的} 2 \text{倍}, \overline{DF} \text{長是} \overline{AC} \text{的} 2 \text{倍}$$

2. 建議教師透過縮小圖的情境引入比例尺，例如畫出籃球場 $\frac{1}{10}$ 倍的縮小圖，再透過 $\frac{1}{10}$ 倍的縮小圖引入比例尺的意義及記法，不宜直接透過地圖引入比例尺。
3. 數學上習慣將實際的長度當作基準量，地圖上的長度當作比較量，下面以「實際長度1公里，地圖上長1公分」為例，說明比例尺的表示法。  
有兩種表示比例尺的方法，一種是利用同單位的比或比值來表示，另一種是利用不同單位的比或比值來表示。

(1) 同單位的表示法

同單位的表示法又可以區分為比的表示法和比值的表示法，因為單位相同，因此同單位的表示法都不記錄單位。

a. 比的表示法：1 公里 = 1000 公尺 = 100000 公分

可以用「1 : 100000」或「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」來表示。

「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」的記法較容易連結比和比值的關係。

使用 1:100000 溝通比例尺時，表示地圖上長 1 公分，實際的長是 100000 公分；地圖上長 1 公尺，實際的長是 100000 公尺；地圖上長 1 毫米，實際的長是 100000 毫米。

b. 比值的表示法：「1 : 100000」和「 $\frac{1}{100000} : 1$ 」的比值都  $\frac{1}{100000}$ 。

(2) 不同單位的表示法

不同單位的表示法也可以區分為比的表示法和比值的表示法，因為單位不同，因此不同單位的表示法都必須記錄單位。

a. 比的表示法：「1 公分 : 1 公里」。

b. 比值的表示法：1 公分 : 1 公里 = 1 公分/公里，日常生活中不常出現這種記法，都用下面的圖示法來呈現。



題號	23		
內容領域	幾何	認知歷程向度	程序執行
學習內容	5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-n-20)		
試題內容	<p>23. 一個正方體的邊長和是 36 公分，假設該正方體的體積是「甲」立方公分，表面積是「乙」平方公分，請問甲是乙的多少倍？</p> <p>① <math>\frac{2}{3}</math></p> <p>② 2</p> <p>③ 1.5</p> <p>④ 0.5</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.19	0.25	0.12
2	0.28	0.34	0.18
3	0.28	0.27	0.25
4*	0.23	0.12	0.43
未作答	0.01		
通過率	0.23	鑑別度	0.32
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.32，正確答案為選項④，通過率為23%，顯示超過兩成的學生已具備求正方體體積與表面積的能力。</p> <p>2. 有19%的學生選擇①(低分組有25%)，這些學生可能不具備求正方體體積與表面積的能力；這些學生也可能誤解題意，認為36公分是正方體其中一面正方形的周長，利用<math>36 \div 4 = 9</math>，算出正方體邊長是9公分，他們又誤誤解題意，利用<math>(9 \times 9 \times 6) \div (9 \times 9 \times 9) = \frac{2}{3}</math>，算出表面積是體積的<math>\frac{2}{3}</math>倍。</p> <p>3. 有28%的學生選擇②(低分組有34%)，這些學生可能已具備求正方體體積與表面積的能力，他們正確的算出正方體的體積和表面積，但是誤解題意，算出表面積是體積的2倍。</p> <p>4. 有28%的學生選擇③(低分組有27%)，這些學生可能不具備求正方體體積與表面積的能力；這些學生也可能誤解題意這些學生可能誤解題意，認為36公分是正方體其中一面正方形的周長，利用<math>36 \div 4 = 9</math>，算出正方體邊長是9公分後，利用<math>(9 \times 9 \times 9) \div (9 \times 9 \times 6) = 1.5</math>，算出表面積是體積的1.5倍。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年 細目	4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。	5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-n-20)	6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-n-15)
補救教學建議			
<p>(一) 錯誤類型的可能原因</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生可能混淆正方體和正方形邊長和的意義。</li> <li>2. 學生可能尚未理解「甲是乙的多少倍」此敘述中，甲是比較量，乙是基準量，應該要以甲÷乙才能得到兩者的倍數關係。</li> <li>3. 學生可能不具備求正方體體積與表面積的能力。</li> </ol> <p>(二) 核心概念與本題的教學重點</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 長方形將平面分割成長方形、長方形內部和長方形外部三部分，長方形的面積指的是長方形和長方形內部合起來的大小。 引入長方形面積公式時，會在長方形內部鋪設 1 平方公分的方瓦，學生很容易理解這些方瓦合起來的面積，和長方形的面積一樣大，因此可以透過比對長邊和寬邊公分數和長邊和寬邊方瓦個數的方式，導出長方形的面積公式。 長方體將空間分割成長方體、長方體內部和長方體外部三部分，長方體的體積指的是長方體和長方體內部合起來的大小。 引入長方體體積公式時，無法在長方體甲內部填入 1 立方公分的白色積木，必須用白色積木堆疊出一個和長方體甲一模一樣的長方體乙，算出長方體乙的體積後，再透過比對長方體甲的長邊、寬邊和高邊的公分數和長方體乙長邊、寬邊和高邊白色積木個數的方式，導出長方體的體積公式。</li> <li>2. 不宜透過在長方體盒子內堆疊白色積木的方式引入長方體體積公式，因為長方體盒子內能裝滿 60 個白色積木，指的是長方體盒子的容積是 60 毫公升，而不是長方體的體積是 60 立方公分。</li> <li>3. 不宜透過堆疊白紙引入長方體體積公式，例如：拿出一張已知長邊和寬邊的長方形白紙，告訴學生可以利用「長×寬」算出這張白紙的面積，再說明當很多張相同的白紙堆疊在一起時，就會疊成一個長方體，這個長方體體積的大小和高有關，可以得到長方體的體積公式是「長×寬×高」。平面是沒有厚度的，如果很多張白紙堆疊在一起會變成一個長方體，已經預告一張白紙也是有厚度的，也就是說，每一張白紙都是長方體。必須先知道長方體的體積是「長×寬×高」，才能透過上面的方法導出白紙所堆疊成成長方體的體積。例如一張白紙的長度是 a、寬度是 b、厚度是 d，可以利用長方體體積公式算出這張白紙的體積是 <math>a \times b \times d</math>，因此當 n 張白紙堆疊成長方體時，長方體的體積是 <math>a \times b \times d + a \times b \times d + \dots + a \times b \times d = a \times b \times (d + d + d + \dots + d) = a \times b \times nd</math>，也就</li> </ol>			

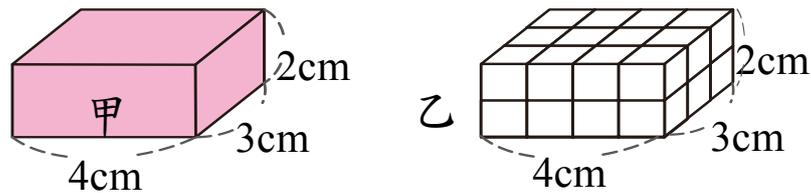
是白紙所堆疊成成長方體的體積「長×寬×n張白紙的厚度」。

國小階段體積教學的重點是點數立體形體是由多少個單位體積合起來的，上面這種教學方式是本末倒置的教學，其目的只是幫助學生記憶長方體的體積公式。

4. 下面先以「長4公分、寬3公分、高2公分長方體的體積是多少立方公分？」為例，說明如何幫助學生理解長方體的體積公式。

建議教師依下列五個步驟幫助學生解題：

步驟一：給定一個長方體積木甲，指導學生使用1立方公分的積木堆疊出一個和積木甲一模一樣的長方體乙，並算出所使用1立方公分積木的個數。



步驟二：察覺長方體甲長、寬、高邊長的公分數和長方體乙長、寬、高邊白色積木個數間的關係。

透過邊長公分數和白色積木個數的關係，教師接著幫助學生察覺長方體甲長邊是4公分，也就是底層一排和4個白色積木一樣多，寬邊是3公分，也就是最底層和3排白色積木一樣多，高邊是2公分，也就是長方體甲和2層白色積木一樣多。

步驟三：利用長、寬、高邊的公分數，直接用乘法算出單位體積的個數，並形成「長乘以寬乘以高」公式算法的共識，

長方體的體積公式＝長×寬×高。

步驟四：長方體的體積＝長×寬×高＝ $4 \times 3 \times 2 = 24$ (立方公分)

步驟五：重複步驟一～步驟四，協助學生理解正方體體積的意義。

正方體的體積＝邊長×邊長×邊長＝ $3 \times 3 \times 3 = 27$ (立方公分)

5. 以「邊長5公分正方體的表面積是多少平方公分？」為例，說明如何幫助學生解題。

教師不宜透過展開圖幫助學生解題，因為理解展開圖的意義，比計算出正方體的表面積更困難。

建議教師依下列四個步驟幫助學生解題：

步驟一：複習正方形的面積公式，正方形面積＝邊長×邊長。

步驟二：拿出一個正方體，標示出該正方體的邊長，並溝通正方體共有六個全等的面。

步驟三：正方體各面面積的總合為正方體的表面積。正方體的表面積是「前、後、上、下、左、右」等六個面的面積和，每個面的面積都一樣大：6個面的面積和是「邊長×邊長×6＝ $(5 \times 5) \times 6$ 」

步驟四：正方體表面積＝邊長×邊長×6＝ $(5 \times 5) \times 6$

6. 以「長 12 公分、寬 10 公分、高 3 公分的長方體」為例，說明如何幫助學生計算長方體的表面積。

步驟一：複習長方形的面積公式，長方形面積=長×寬。

步驟二：拿出一個長方體，標示出該長方體的長、寬和高。引導學生理解長方體中，有上下、前後、左右三組全等的面。

步驟三：上、下2個長方形(長×寬)的面積： $12 \times 10 \times 2 = 240\text{cm}^2$ ，  
前、後2個長方形(長×高)的面積： $12 \times 3 \times 2 = 72\text{cm}^2$ ，  
左、右2個長方形(寬×高)的面積： $10 \times 3 \times 2 = 60\text{cm}^2$ ，  
 $240 + 72 + 60 = 372$ ，得到長方體的表面積是 $372\text{cm}^2$ 。

步驟四：長方體中，有上下、前後、左右三組全等的面。

計算長方體的表面積時，可以先分別算出「上、前、左」三個長方形的面積和，再乘以 2。

「(長×寬+寬×高+長×高)×2」算出長方體的表面積，

$(12 \times 10 + 10 \times 3 + 12 \times 3) \times 2 = 372$ ，

得到長方體的表面積是  $372\text{cm}^2$ 。

題號	24		
內容領域	數與計算	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。		
試題內容	<p>24. 玩具機器人以 5 公尺/分鐘的速率等速前進，行進過程中，距離、時間、速率三個量，哪兩個量成正比的關係？</p> <p>① 距離和時間          ② 距離和速率          ③ 時間和速率          ④ 都不成正比</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.44	0.28	0.63
2	0.19	0.25	0.13
3	0.22	0.27	0.15
4	0.14	0.19	0.08
未作答	0.01		
通過率	0.44	鑑別度	0.34
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.34，正確答案為選項①，通過率為44%，顯示超過四成的學生已理解正比的意義。</p> <p>2. 有19%的學生選擇②(低分組有25%)，這些學生可能不理解正比的意義。</p> <p>3. 有22%的學生選擇③(低分組有27%)，這些學生可能不理解正比的意義。</p> <p>4. 有14%的學生選擇④(低分組有19%)，這些學生可能不理解正比的意義。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。	6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。

## 補救教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不理解正比的意義。
2. 5 公尺/分鐘是集合的概念，本題沒有列出距離和時間、距離和速率及時間和速率的關係表，學生無法解題。

### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 「正比」和「比或比值」的關係密切，比的相等關係強調將相比的兩類量寫在一起，直覺上較簡單；而正比則是兩類量關係中的一種，應採用列表的方式記錄，並強調要使用比值來記錄正比關係，兩者間的關係，可運用列表的方式來統整。

下面以同學們同時量出不同長度的竹竿和對應影子長度的表格來說明：

竹竿長(公分)	40	50	60	70	80	90	100
影子長(公分)	20	25	30	35	40	45	50

國小階段可以透過比或比值的方式來表示不同長度的竹竿和對應影子長度的關係。

- (1) 利用最簡單整數比「竹竿長：影子長=2：1」來表示：

竹竿和對應影子長度的對應關係可以記成「40：20」、「50：25」、...、「100：50」，它們都是相等的比，可以利用最簡單整數比「竹竿長：影子長=2：1」來表示。

- (2) 利用比值「竹竿長：影子長=2」來表示：

「40：20」、「50：25」、...、「100：50」這些相等的比的比值都是2，可以透過比值「竹竿長：影子長=2」來表示這些相等的比，也可以說成「竹竿長是影子長的2倍」。

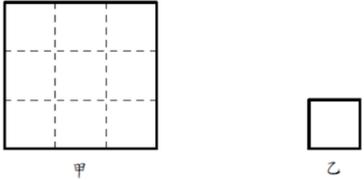
2. 成正比是兩個集合間特殊的對應關係，下面都是成正比的定義。

- (1) 竹竿的長度和對應影子的長度同時改變，而它們的比值不變，數學上稱竹竿的長度和影子的長度「成正比」或「成正比例」。
- (2) 形如「 $y=kx$ 」的函數，數學上稱之為成正比。
- (3) 如果函數的圖形是過原點的直線，數學上稱之為成正比。

國小階段尚未引入函數的記法，只能透過(1)溝通成正比的意義。

3. 讓學生知道兩量變化時，一量增加，另一量也跟著增加的現象，並不一定是正比關係，並能判斷。

例如父和子的年齡、正方形邊長與面積的關係等，都不是正比的關係。

題號	25		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。		
試題內容	<p>25. 如圖，甲是面積 9 平方公分的正方形，乙是面積 1 平方公分的正方形。</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>下面哪些人的說法正確？</p> <p>大毛：乙是甲的 <math>\frac{1}{9}</math> 倍縮小圖。</p> <p>小毛：甲是乙的 3 倍放大圖。</p> <p>① 只有大毛正確</p> <p>② 只有小毛正確</p> <p>③ 大毛和小毛都正確</p> <p>④ 大毛和小毛都不正確</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.48	0.48	0.39
2*	0.22	0.13	0.42
3	0.22	0.26	0.16
4	0.06	0.11	0.02
未作答	0.02		
通過率	0.22	鑑別度	0.29
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.29，正確答案為選項②，通過率為22%，顯示超過兩成的學生已能掌握放大圖與縮小圖的意義。</p> <p>2. 有48%的學生選擇①(低分組有48%)，這些學生可能尚未掌握放大圖與縮小圖的意義，他們沒有利用邊長的關係來描述縮小圖，直觀的利用面積的關係來描述，誤認為小正方形的面積是大正方形面積的<math>\frac{1}{9}</math>倍，所以小正方形是大正方形的<math>\frac{1}{9}</math>倍縮小圖。</p> <p>3. 有22%的學生選擇③(低分組有26%)、這些學生可能尚未掌握放大圖與縮小圖的意義；也有可能不理解題意。</p>			

4. 有6%的學生選擇④(低分組有11%)，這些學生可能尚未掌握放大圖與縮小圖的意義；也有可能不理解題意。

#### 教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
分年細目	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。	S-9-1 相似形：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。

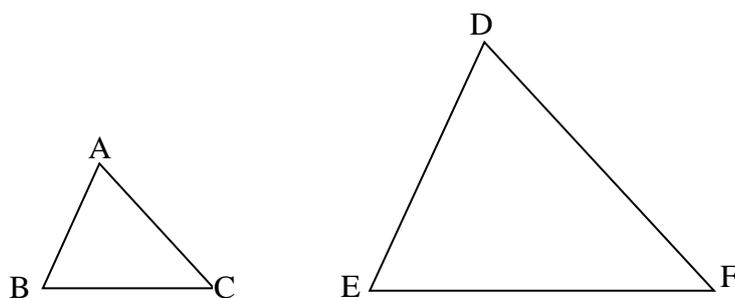
#### 補救教學建議

##### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未掌握放大圖與縮小圖的意義
2. 學生可能利用面積的關係來描述放大圖或縮小圖，誤認為小正方形的面積是大正方形面積的 $\frac{1}{9}$ 倍，則小正方形是大正方形的 $\frac{1}{9}$ 倍縮小圖。

##### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師應透過操作與測量協助學生學習圖形的放大圖、縮小圖，幫助學生看到兩個相似圖形間構成要素的對應關係，例如：三角形DEF是三角形ABC的2倍放大圖，邊AB的對應邊為邊DE，邊DE的長度=邊AB的長度 $\times 2$ ，邊BC的對應邊為邊EF，邊EF的長度=邊BC的長度 $\times 2$ ，邊AC的對應邊為邊DF，邊DF的長度=邊AC的長度 $\times 2$ ；A點的對應點為D點，B點的對應點為E點，C點的對應點為F點； $\angle A$ 的對應角為 $\angle D$ ， $\angle A = \angle D$ ， $\angle B$ 的對應角為 $\angle E$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\angle C$ 的對應角為 $\angle F$ ， $\angle C = \angle F$ 。



2. 教師應幫助學生連結「比」、「比值」和「幾倍放大(縮小)圖」的關係。教師應幫助學生認識下面三種表示法都可以說明「三角形DEF是三角形ABC的2倍放大圖」的關係，為引入比例尺的教學鋪路。

第一種：比的表示法

$$\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 1, \overline{EF} : \overline{BC} = 2 : 1, \overline{DF} : \overline{AC} = 2 : 1$$

第二種：比值的表示法

$$\overline{DE} \div \overline{AB} = 2, \overline{EF} \div \overline{BC} = 2, \overline{DF} \div \overline{AC} = 2$$

第三種：倍的表示法

$$\overline{DE} \text{長是} \overline{AB} \text{的} 2 \text{倍}, \overline{EF} \text{長是} \overline{BC} \text{的} 2 \text{倍}, \overline{DF} \text{長是} \overline{AC} \text{的} 2 \text{倍}$$

3. 以「將正方形甲對摺兩次，得到正方形乙，請問正方形乙是正方形甲的幾倍縮小圖？」為例，有兩種溝通幾倍縮小圖的方法。

第一種：利用邊長的關係來溝通

正方形甲和正方形乙相似，對應邊成比例，正方形乙的邊長是正方形甲對應邊長的 $\frac{1}{2}$ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。

第二種：利用面積的關係來溝通

正方形乙的面積是正方形甲面積的 $\frac{1}{4}$ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 $\frac{1}{4}$ 倍縮小圖。因為長度比面積容易測量，因此數學上約定乙是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍縮小圖，指的是乙的邊長是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍，不是指乙的面積是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍。

4. 放大和縮小都是兩個圖形的關係，教師在課堂活動或評量時，應同時描述放大或縮小前、後的兩個圖形。

例如「 $\triangle ABC$ ， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle B=20^\circ$ ，將該三角形放大 2 倍後， $\angle C=?$ 」就是錯誤的描述方式，因為問題中沒有說明 $\triangle ABC$ 放大為 2 倍後的圖形為何，正確的描述是「 $\triangle ABC$ ， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle B=20^\circ$ ，將 $\triangle ABC$ 放大為 2 倍後的圖形是 $\triangle DEF$ ，求 $\angle F=?$ 」。